

BERTRANDOV POSTULAT

ALEKSANDER SIMONIČ

School of Science
The University of New South Wales (Canberra)

Math. Subj. Class. (2010): 11N05, 11A41

V članku predstavimo Ramanujanov dokaz Bertrandovega postulata. Omenimo tudi nekatere odprte probleme v povezavi s praštevilskimi vrzelmi.

BERTRAND'S POSTULATE

We present Ramanujan's proof of Bertrand's postulate. We also mention some open problems related to prime gaps.

Uvod

Leta 1845 je francoski matematik **Joseph Louis François Bertrand** (1822–1900) v razpravi o permutacijah zapisal naslednje: *za vsako naravno število $n \geq 4$ obstaja praštevilo p , ki je večje od n in manjše od $2n - 2$* . Trditev je preveril za $n = 1, \dots, 3 \cdot 10^6$, dokazati pa me je ni uspelo. Domneva je dobila ime *Bertrandov postulat*. Čeprav je že več kot 150 let znana njena pravilnost, se je tako ime še vedno drži. Danes se pogosto navaja šibkejša različica problema: *za vsako naravno število $n \geq 1$ obstaja praštevilo $p \in (n, 2n]$* .

Pafnuciju Lvoviču Čebiševu (1821–1894), očetu ruske matematične šole, je hipotezo sedem let kasneje uspelo dokazati v članku [4]. Pri tem je uvedel posebni funkciji, ki sta postali stalnici v analitični teoriji števil. Enostavnejši dokaz, obravnavan v tem prispevku, je leta 1919 objavil indijski samouk **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920), glej [8]. Ta matematični genij je že v otroštvu pokazal izjemen matematični talent, vendar je bil »odkrit« šele leta 1910. Na prigovarjanje G. H. Hardyja je leta 1914 prispel v Cambridge, kjer so mu po dveh letih podelili doktorat. Kljub pomanjkanju matematične natančnosti, ki je bila posledica neformalne izobrazbe,

je dosegel zavidljive rezultate na področju specialnih funkcij v povezavi s teorijo števil. Kot se je izrazil Hardy, je Ramanujan do svojih odkritij prišel s povezovanjem trditev, intuicije in nepojasnjene sklepanja, sposobnost primerljiva z Eulerjevo. Zaradi izjemno slabega zdravja se je vrnil v Indijo, kjer je kmalu zatem tudi umrl. Leta 1932 je nov dokaz prispeval tudi slovit madžarski matematik **Paul Erdős** (1913–1996), kar je bil njegov prvi raziskovalni prispevek. Erdősev dokaz ne uporablja funkcij Čebiševa in se na številnih mestih, posebno v povezavi z binomskimi koeficienti, ujema z Ramanujanovim dokazom. Manj znan dokaz je leta 1944 objavil še indijski številski teoretik in v številnih pogledih Ramanujanov matematični naslednik **S. S. Pillai** (1901–1950), ki se je proslavil z delom na področju Waringovega problema. Kasneje je izdelal še en dokaz, ki uporablja samo racionalna števila, vendar mu je objavo preprečila letalska nesreča, v kateri je umrl na poti v ZDA na 11. mednarodni kongres matematikov in enoletno izpopolnjevanje na Univerzi Princeton. Oba dokaza sta reproducirana v [7], kjer lahko bralec izve tudi več o njegovem življenju in delu.

Upravičeno lahko rečemo, da je danes Erdősev dokaz najbolj znan, verjetno tudi po zaslugi knjige [2]. Vendar je ozadje dokaza Čebiševa, Ramanujana ali Pillaija bolj v sozvočju s klasičnimi metodami analitične teorije števil, zato je tudi primernejši za uvod v to področje matematike. Za razumevanje članka je dovolj znanje srednješolske matematike.

Funkciji Čebiševa

Tvorimo zaporedje naravnih števil $n_1, n_2, \dots$ na naslednji način: postavimo $n_1 = 4$ in za $k \geq 2$ naj bo n_k največje praštevilo, manjše od $2n_{k-1} - 2$. Nekaj prvih elementov tega zaporedja je

$$4, 5, 7, 11, 19, 31, 59, 113, 223, 443, 883, 1759, 3511, 7019, \dots$$

Očitno je Bertrandov postulat ekvivalenten trditvi, da je zgornje zaporedje strogo naraščajoče. Označimo s $\pi(x)$ število praštevil, ki ne presegajo po-

zitivnega realnega števila x . Opomnimo, da je kodomena funkcije π podmnožica naravnih števil. Če je $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 8$, je Bertrandov postulat dokazan. Zakaj? Če je slednje pravilno, za vsako naravno število $n \geq 4$ interval $(n, 2n]$ vsebuje vsaj dve praštevili. Ker $2n$ in $2n - 2$ nista praštevili, interval $(n, 2n - 2)$ vsebuje vsaj eno praštevilo, kar pa je vsebina Bertrandovega postulata. Glede na prej zapisano zadošča preveriti $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$.

Bolj prikladno kot s *praštevilsko funkcijo* $\pi(x)$ je delati s *funkcijama Čebiševa*. Čebišev je v dokazu Bertrandovega postulata uvedel funkciji

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

in

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots \quad (1)$$

Zgornja vsota gre po praštevilih p in za $x < 2$ definiramo $\vartheta(x) = 0$. Očitno je $\vartheta(x) \leq \psi(x)$. Funkcijo ψ lahko izrazimo tudi drugače. Naj bo $\Lambda(n)$ funkcija, različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa enaka $\log p$. Potem je

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \dots = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \quad (2)$$

Funkcije π , ϑ in ψ so osrednje funkcije analitične teorije števil. Velikokrat se izkaže, da je najenostavneje delati s funkcijo ψ . Začetna ideja je, da spodnjo mejo za razliko $\pi(x) - \pi(x/2)$ izrazimo s funkcijo ψ . Ker je izraz $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$ enak vsoti logaritmov praštevil na intervalu $(x/2, x]$, velja preprosta ocena

$$\pi(x) - \pi(x/2) \geq \frac{\vartheta(x) - \vartheta(x/2)}{\log x}. \quad (3)$$

Ker po (1) sledi $\psi(\sqrt{x}) = \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/4}) + \dots$, imamo

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \vartheta(x) - \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) \mp \dots$$

Desna stran ni večja od $\vartheta(x)$, saj je ϑ naraščajoča funkcija. Upoštevamo še $\vartheta(x/2) \leq \psi(x/2)$ in dobimo

$$\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\psi(\sqrt{x}). \quad (4)$$

Bistvo Ramanujanovega prispevka k dokazu Bertrandovega postulata je enostavnejša ocenitev desne strani neenakosti (4).

Ramanujanova ideja

Spomnimo se, da za binomski simbol $\binom{n}{m} = n!/(m!(n-m)!)$ velja simetrija $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Binomski koeficienti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ nastopajo v binomskem izreku

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n. \quad (5)$$

Lahko je videti, da je največji binomski koeficient $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, kjer je $\lfloor x \rfloor$ oznaka za celi del nenegativnega realnega števila x .

Ramanujan je za $x > 0$ uvedel funkcijo

$$R(x) = \frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2}.$$

Po osnovnem izreku aritmetike, da lahko vsako naravno število $n \geq 2$ izrazimo kot produkt potenc praštevil, sledi $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$. Dobimo

$$\log \lfloor x \rfloor! = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots,$$

kjer pri dokazu tretjega enačaja poleg upoštevanja (2) naredimo še sklep, da je vseh naravnih števil med 1 in x , deljivih z d , ravno $\lfloor x/d \rfloor$. Potem je

$$\log R(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) \mp \dots \quad (6)$$

Od tod že lahko slutimo, kako bomo to enakost uporabili pri neenakosti (4).

Ker je tudi ψ naraščajoča funkcija, sklepamo

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \log R(x) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right),$$

kar pomeni $\psi(x) - \psi(x/2) \geq \log R(x) - \psi(x/3)$ in

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{8}\right)\right) + \dots \\ &\leq \log\left(R(x)R\left(\frac{x}{2}\right)R\left(\frac{x}{4}\right)R\left(\frac{x}{8}\right)\dots\right).\end{aligned}$$

Označimo z $\bar{R}(x)$ produkt v oklepaju. Ko v to neenakost vstavimo $x/3$ in uporabimo prejšnjo neenakost, skupaj s (3) in (4) končno dobimo

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{\log x} \left(\log R(x) - \log \bar{R}\left(\frac{x}{3}\right) - 2 \log \bar{R}(\sqrt{x}) \right). \quad (7)$$

Sedaj smo nalogo prevedli na iskanje primerne zgornje in spodnje meje za funkcijo $R(x)$. Ramanujan je na tem mestu uporabil zelo pomembno, toda neelementarno aproksimacijo fakultete

$$1 < \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} < e^{\frac{1}{12n}}, \quad (8)$$

ki zagotavlja $\log R(x) < (3/4)x$ in $\log R(x) > (2/3)x$ za $x > 300$. Neenakosti (8) sledita iz Stirlingove formule za funkcijo gama, glej [1, str. 204]. Zaključil je, da tedaj velja

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x} \left(\frac{x}{6} - 3\sqrt{x} \right), \quad (9)$$

saj je $\bar{R}(x) < e^{3x/2}$. Ker je za $x \geq 400$ desna stran večja od 1, je Bertrandov postulat nemudoma dokazan, vendar za ceno Stirlingove formule. V članku [6] je bilo pokazano, da lahko Ramanujanovi oceni nadomestimo s šibkejšima, toda elementarnima ocenama. To bomo kasneje tudi storili.

Na tem mestu je vredno omeniti, da je Ramanujan na koncu članka brez razlage napisal $\pi(x) - \pi(x/2) \geq 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ za vse $x \geq 2, 11, 17, 29, 41, \dots$. Ta ugotovitev je vzpodbudila matematike za naslednjo definicijo: *za vsako naravno število n naj bo R_n najmanjše naravno število, za katerega velja $\pi(x) - \pi(x/2) \geq n$ za vse $x \geq R_n$* . Enostavno preverimo, da prvih pet Ramanujanovih števil ustreza tej definiciji. Opazimo še, da so vsa ta števila tudi praštevila. Po definiciji interval $(x/2, x]$ za vsak $x < R_n$ vsebuje največ

$n - 1$ praštevil. Zato interval $(R_n/2, R_n]$ vsebuje natanko n praštevil, kar pomeni, da je R_n praštevilo. To dejstvo upravičuje izraz *Ramanujanova praštevila*.

Primerjava z ocenama Čebiševa in Pillaia

V tem razdelku bomo navedli oceni, ki ju dasta metodi Čebiševa in Pillaia. Dokazov zaradi obsežnosti ne moremo podati, bralec jih lahko poišče v [4] in [3, str. 71–75].

Čebišev je namesto funkcije $R(x)$ uporabljal

$$\frac{[x]! \cdot [x/30]!}{[x/2]! \cdot [x/3]! \cdot [x/5]!}.$$

Iz njegovih spodnjih mej za $\vartheta(x)$ dobimo neenakost

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x} \left(\frac{2A}{5}x - \frac{24 - 5\sqrt{2}}{10}A\sqrt{x} \right) - \frac{15}{8\log 6} \log x - \frac{5}{4} \left(3 + \frac{2\log 3}{\log 6} \right) - \frac{5}{4\log x} \left(4 + \frac{\log^2 2}{\log 6} - 2\log 2 \right),$$

kjer je $A = \log(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}) - \log \sqrt[30]{30} \approx 0,9213$. Desna stran je za $x > 240$ pozitivna, za $x > 261$ pa večja od 1.

Pillai je sledil Ramanujanovemu dokazu in je zato študiral funkcijo $R(2n)$ za naravna števila n , vendar se je želel izogniti aproksimaciji (8). Zato je na elementaren način pokazal, da velja $2^{2n-1}/\sqrt{n} < R(2n) < 2^{2n}/\sqrt{2n}$ za $n \geq 2$. S skrbnim ocenjevanjem mu je za $n \geq 32$ uspelo dokazati neenakost

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\log 2}{\log 2n} \left(\frac{2n}{3} - 1 \right) - \left(\frac{\sqrt{2n} + 1}{2} \right) \frac{\log n}{\log 2n}.$$

Desna stran je za $n \geq 45$ pozitivna, za $n \geq 74$ pa večja od 1.

Obe neenakosti sta boljši od Ramanujanove ocene (9), vendar dokaza v primerjavi z njegovim pristopom nista tako enostavna in pregledna, še zlasti ker lahko Stirlingovo formulo povsem zaobidemo. Čeprav pri tem dobimo slabšo oceno, je ta vseeno dovolj dobra za enostaven dokaz Bertrandovega postulata.

Meji za funkcijo $R(x)$

Funkcijo $R(x)$ bomo za $x \geq 3$ izrazili glede na sodost in lihost števila $\lfloor x \rfloor$. Brez težav izračunamo $R(x) = \binom{2k}{k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k$ in $R(x) = \binom{2k+1}{k}(k+1)$ za $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. Po binomski formuli za $x = y = 1$ sledi neenakost $\binom{n}{m} \leq 2^n$ za vse $0 \leq m \leq n$. V nadaljevanju naj bo $n \geq 2$. Če je n lih, velja $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Torej imamo v tem primeru dva največja binomska koeficienta. Zato za lih n velja neenakost $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^{n-1}$. Ker je $\binom{n}{0} + \binom{n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ in $\binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, sledi

$$\frac{2^n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

S temi elementarnimi neenakostmi dobimo $\frac{2^{2k}}{2k} \leq R(x) \leq 2^{2k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k$ in $(k+1)\frac{2^{2k+1}}{2k+1} \leq R(x) \leq (k+1)2^{2k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. Po primerjanju vseh neenakosti imamo

$$\frac{2^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} = \min \left\{ \frac{2^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor}, \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2^{\lfloor x \rfloor}} 2^{\lfloor x \rfloor} \right\} \leq R(x) \leq \max \left\{ 2^{\lfloor x \rfloor}, \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2} 2^{\lfloor x \rfloor - 1} \right\} \\ = (\lfloor x \rfloor + 1) 2^{\lfloor x \rfloor - 2}.$$

Če upoštevamo $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, dobimo

$$\frac{2^{x-1}}{x} \leq R(x) \leq (x+1) 2^{x-2}. \quad (10)$$

Enostavno preverimo, da velja $(x+1)2^{x-2} \leq x2^{x-1}$ in $x/2 < (3/2)^{x/2}$. Torej je $x2^{x-1} < 6^{x/2}$ in s tem $R(x) < 6^{x/2}$. Od tod dobimo

$$\overline{R}(x) < 6^{x/2+x/4+x/8+\dots} \leq 6^x. \quad (11)$$

Sedaj je jasno, da bomo v (7) uporabili (11) in levo neenakost v (10).

Dokaz

Po uporabi ocen iz prejšnjega razdelka na (7) dobimo

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x} \left(\frac{x}{3} \log \frac{4}{3} - 2\sqrt{x} \log 6 - \log 2x \right)$$

za $x \geq 3$. Označimo s $f(x)$ funkcijo v oklepaju. Ker za $x \geq 2$ velja $\sqrt{x} \leq x/\sqrt{2} < 5x/7$ in $\log x < x$, s pomočjo žepnega računalna dobimo

$$\begin{aligned} f(10^3 x) &= \left(\frac{10^3}{3} \log \frac{4}{3} \right) x - \left(20\sqrt{10} \log 6 \right) \sqrt{x} - \log(2 \cdot 10^3) - \log x \\ &\approx 95,894x - 113,321\sqrt{x} - 7,601 - \log x > 13,91x - 7,601 \end{aligned}$$

in s tem

$$\pi(10^3 x) - \pi\left(\frac{10^3 x}{2}\right) > \frac{13,91x - 7,601}{x + 6,908}.$$

Torej je $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$, kar pa že pomeni pravilnost Bertrandovega postulata.

Verjetno je marsikoga zmotila »nerigorozna« uporaba računalna v prejšnjih vrsticah. In prav je tako, saj mora biti matematik v strogih dokazih neodvisen od računskih pripomočkov, čeprav nam ti velikokrat pokažejo pravo pot. Za zaključek razdelka je podan strog dokaz, kjer privzamemo na znanje le naslednjo potenčno vrsto

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots, \quad (12)$$

veljavno za $x \in (-1, 1]$.

Z uporabo substitucije $x \rightarrow 1/x - 1$ preoblikujemo (12) v enakost

$$\log x = \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \dots,$$

ki je veljavna za $x \geq 1/2$. To vrsto uporabimo pri oceni spodnje in zgornje meje za logaritem. Za spodnjo mejo upoštevamo prve tri člene v vrsti, za zgornjo pa preostale člene zamenjamo z ustrežno geometrijsko vrsto. Dobimo

$$\frac{(x-1)(11x^2 - 7x + 2)}{6x^3} < \log x < \frac{(x-1)(3x^3 + 13x^2 - 5x + 1)}{12x^3}.$$

Ti oceni nam da $\log(4/3) > 55/192$, $\log 6 = \log 2 + \log 3 < 4753/2592$, $\log 1000 = 3(\log 2 + \log 5) < 30007/4000$ in $\log 2000 = 4\log 2 + 3\log 5 <$

24599/3000. Kot prej naj bo $x \geq 2$. Če upoštevamo še $\sqrt{10} < 16/5$, $\log x < x$ in $\sqrt{x} < 5x/7$, dobimo

$$f(10^3x) > \frac{6907}{648}x - \frac{24599}{3000}.$$

Od tod sledi

$$\pi(10^3x) - \pi\left(\frac{10^3x}{2}\right) > \frac{4}{81} \frac{863375x - 664173}{4000x + 30007},$$

kar znova pomeni $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$.

Kako naprej?

Problemi teorije števil, v katere spada Bertrandov postulat, sprašujejo po intervalih z vsaj enim praštevilom. Veliko matematikov je zastavilo razna vprašanja na to temo, ki jih v glavnem zaokroža *Oppermannova domneva*. Kot je navada v teoriji števil, imajo vsi ti problemi enostavno formulacijo, zares pa je znanega le malo.

Danski matematik **Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann** (1817–1883) je leta 1882 postavil domnevo, da za vsako naravno število $n \geq 2$ obstajata praštevili p in q , za kateri velja $n(n-1) < p < n^2$ in $n^2 < q < n(n+1)$. Od tod takoj sledi, da vedno obstaja praštevilo med zaporednima popolnima kvadratoma, kar je vsebina slavne *Legendrove domneve*, ki jo je zastavil francoski matematik **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833).

Razliko med zaporednima prašteviloma imenujemo *praštevilska vrzel*. V zvezi z Oppermannovo domnevo se lahko vprašamo po zgornjih mejah za praštevilske vrzeli. Naj bodo $p_1, p_2, \dots$ zaporedna praštevila. Bertrandov postulat zagotavlja obstoj praštevila na intervalu $(p_n, 2p_n - 2)$ za vse $n \geq 3$, od koder sledi $p_{n+1} - p_n < p_n - 2$ za $n \geq 3$. Bi veljavnost Oppermannove domneve to oceno kaj izboljšala? Tvorimo množico

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} ((n(n-1), n^2) \cup (n^2, n(n+1))) = (2, 4) \cup (4, 6) \cup (6, 9) \cup (9, 12) \cup \dots$$

Opazimo, da za vsak $n \geq 2$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $p_n \in (k^2 - k, k^2)$ ali $p_n \in (k^2, k^2 + k)$. Po Oppermannovi domnevi imamo v prvem primeru $p_{n+1} < k^2 + k$, v drugem pa $p_{n+1} < (k+1)^2$. Najprej obravnavajmo prvi primer. Ker je tedaj $(k - 1/2)^2 = k^2 - k + 1/4 < p_n$, sledi $k < 1/2 + \sqrt{p_n}$ in s tem $p_{n+1} - p_n < 2k < 1 + 2\sqrt{p_n}$. V drugem primeru pa imamo $k < \sqrt{p_n}$ in tako ponovno $p_{n+1} - p_n < 2k + 1 < 1 + 2\sqrt{p_n}$. Ker slednje velja tudi za $n = 1$, Oppermannova domneva implicira

$$p_{n+1} - p_n < 1 + 2\sqrt{p_n}, \quad n \geq 1, \quad (13)$$

kar je znano kot *Andricajeva domneva* (1986). Ta domneva je ekvivalentna trditvi

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1, \quad n \geq 1. \quad (14)$$

Slednje je ekvivalentno neenakosti $p_{n+1} - p_n < \sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}$, torej iz (14) sledi (13). Obrat pokažemo tako, da iz nepravilnosti (14) sklepamo o nepravilnosti (13).

Ocena (13) je boljša od tiste, ki jo da Bertrandov postulat, ni pa zadnje, kar matematiki verjamejo, da je res. *Cramérjeva domneva* (1936) zagotavlja celo $p_{n+1} - p_n \leq C \log^2 p_n$ za neko konstanto $C > 0$. Švedski matematik **Harald Cramér** (1893–1985) je na začetku matematične kariere naredil pionirsko delo na področju uporabe teorije verjetnosti v teoriji števil, kasneje pa se je ukvarjal tudi z aktuarsko in finančno matematiko. Temelji za domnevo so v *Riemannovi hipotezi*, enem izmed najslavnejših odprtih problemov v matematiki, saj je Cramér leta 1920 dokazal, da njena pravilnost zagotavlja $p_{n+1} - p_n \leq C\sqrt{p_n} \log p_n$. Neodvisno od katerekoli domneve so znane šibkejšje ocene oblike $p_{n+1} - p_n \leq Cp_n^{1/2+\varepsilon}$, kjer poskušajo najti čim manjše vrednosti $\varepsilon > 0$. Baker, Harman in Pintz so leta 2001 dokazali veljavnost prejšnje neenakosti za $\varepsilon = 0,025$, glej knjigo [5, str. 32].

Omenimo še, da obstajajo tudi razne domneve o porazdelitvi elementov množice $\{p_{n+1} - p_n : n \in \mathbb{N}\}$, ki so vedno soda števila, le prvi element

je 1. Naj bo $P_k(n)$ število elementov množice $\{i < n: p_{i+1} - p_i = k\}$. Definirajmo še

$$C_2 := \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0,66016.$$

Zelo splošno domnevo o asimptotiki funkcije $P_k(n)$ za sodo števila k sta postavila Hardy in J. E. Littlewood:

$$P_k(n) \sim \frac{2C_2 n}{\log^2 n} \prod_{p|k, p \geq 3} \frac{p-1}{p-2}$$

če k ni potenca števila 2, ter $P_k(n) \sim 2C_2 n / \log^2 n$ sicer. Trivialna posledica te domneve je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_k(n) = \infty$ za vsako sodo število k . V primeru $k = 2$ domneva govori o porazdelitvi *praštevilskih dvojčkov* in še vedno ni znano, ali jih je res neskončno. Yitang Zhang je leta 2014 dokazal obstoj števila k_0 , da je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{k_0}(n) = \infty$, pri čemer je eksplicitno podal le precej veliko zgornjo mejo za število k_0 . Matematiki poskušajo nadgraditi Zhangovo metodo v upanju, da bi rešili domnevo o neskončnem številu praštevilskih dvojčkov. Obetavne rezultate je dal *Project Polymath*, spletni forum za reševanje pomembnih in težkih matematičnih problemov s področja teorije števil in diskretne matematike.

LITERATURA

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.
- [2] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, 5th ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [3] K. Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 148, Springer-Verlag, New York, 1968.
- [4] P. L. Čebišev, *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Math. Pures Appl. **17** (1852), 366–390.
- [5] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, 3rd ed., Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] J. Meher in M. Ram Murty, *Ramanujan's proof of Bertrand's postulate*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), 650–653.
- [7] S. S. Pillai, *Collected works of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Volumes I&II, Ramanujan Mathematical Society, Mysore, 2010.
- [8] S. Ramanujan, *A proof of Bertrand's postulate*, J. Indian Math. Soc. **11** (1919), 181–182.