PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 4
Strani 250–251

Šefket Arslanagič:

GEOMETRIJSKA NEENAKOST NA DVA NAČINA

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/902-Arslanagic.pdf

GEOMETRIJSKA NEENAKOST NA DVA NAČINA

Več različnih rešitev enega matematičnega problema je lahko mnogo koristnejše in bolj ustvarjalno opravilo kot pa reševanje večjega števila rutinskih nalog. Ta prispevek je bil napisan z namenom, da opraviči in potrdi to avtorjevo mnenje.

Gre za dokaz naslednje neenakosti za pravokotni trikotnik:

$$\frac{a+b+c}{2h_c} \geqslant 1+\sqrt{2} \tag{1}$$

kjer sta a, b kateti, c hipotenuza in h_c višina na c.

Dokaz 1

Z upoštevanjem zvez

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{in} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

ter z uporabo znane neenačbe med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \qquad (x, y > 0) \tag{*}$$

dobimo

$$\frac{a+b+c}{2\,h_c} = \frac{c(a+b+c)}{2\,ab} = \frac{c\,(a+b)}{2\,ab} + \frac{c^2}{2\,ab} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2\,ab} + \frac{a^2+b^2}{2\,ab} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2ab}}{2\,ab} + \frac{2\,ab}{2\,ab} = \sqrt{2}+1$$

To smo tudi želeli dokazati.

Ker velja v (*) znak enakosti samo, če je $x = y$, velja v (1) znak enakosti samo, če je $a = b$, torej, če je pravokotni trikotnik tudi enakokrak.

Dokaz 2

Naj označuje R polmer trikotniku očrtanega kroga. Ker je $c = 2R$ in $R \geqslant h_c$, je $c \geqslant 2h_c$ oziroma

$$\frac{c}{h_c} \geqslant 2 \tag{2}$$

Iz (2) sledi

$$\frac{c}{h_c}\left(\frac{c}{h_c}+2\right) \geqslant 8 \quad \text{oziroma} \quad c^2 + 2\,c\,h_c \geqslant 8\,h_c^{\,2}$$

Z upoštevanjem zveze $h_c = \frac{ab}{c}$ in Pitagorovega izreka lahko zadnjo neenakost preoblikujemo v neenakost $a^2 + b^2 + 2\,ab \geqslant 8\,h_c^{\,2}$ oziroma $(a+b)^2 \geqslant 8\,h_c^{\,2}$. Ko korenimo in delimo s h_c, dobimo

$$\frac{a+b}{h_c} \geqslant 2\sqrt{2} \tag{3}$$

Ko seštejemo neenačbi (2) in (3), dobimo

$$\frac{a+b+c}{h_c} \geqslant 2+2\sqrt{2} \quad \text{t.j.} \quad \frac{a+b+c}{2h_c} \geqslant 1+\sqrt{2}$$

kar je bilo treba dokazati.

Prirejeno po besedilu *Šefketa Arslanagića*