PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 2
Strani 72–78

Janez Strnad:

NEPROŽNI TRKI

Ključne besede: fizika, gibanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1083-Strnad.pdf

NEPROŽNI TRKI

Baseball je v ZDA med najbolj priljubljenimi moštvenimi športi.[1] Igrata dve moštvi s po devetimi igralci. Sredi igrišča je kvadrat s stranico 27,4 metra, katerega oglišča imenujejo domača, prva, druga in tretja baza. Iz središča kvadrata vrže igralec žogico proti soigralcu ob domači bazi. Igralec nasprotnega moštva pred njim si prizadeva s kijem izbiti žogico čim dlje, na primer med gledalce. Tedaj steče ta igralec mimo vseh treh baz nazaj do domače baze in njegovo moštvo dobi točko. Igralci so razmeščeni ob vseh bazah in v polju in poskušajo žogico ujeti in jo vrniti do soigralcev. Če se igralec z žogico v roki dotakne nasprotnega igralca v teku med bazami, mora ta začasno zapustiti igro. Podrobna pravila so dokaj zapletena. Že po povedanem pa uvidimo, kako pomemben je za svoje moštvo igralec, ki veščе ravna s kijem in doseže točko s tem, da izbije žogico z igrišča. V letih od 1950 do 1980 se je to v ameriških profesionalnih ligah primerilo v povprečju po enainpolkrat na tekmo, najboljšim igralcem sezone pa je to uspelo v povprečju pri vsakem tretjem poskusu.

Ker baseball privlači gledalce in ker je izbijanje žogice s kijem pomemben sestavni del igre, je zanimivo obdelati gibanje žogice pred dotikom s kijem in po njem. Omejimo se na *trk* kija z žogico, in to na *premi trk*, pri katerem se telesi gibljeta po premici. Za *neodvisen sistem teles*, skupino teles, za katero lahko privzamemo, da druga telesa ne vplivajo nanje, velja *izrek o ohranitvi gibalne količine*. Skupna gibalna količina obeh teles po trku je enaka kot pred njim. Gibalno količino telesa izračunamo tako, da pomnožimo maso in hitrost. Velja torej

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{1}$$

Z m smo zaznamovali maso in z v hitrost, indeks 1 zadeva prvo telo, indeks 2 drugo, hitrosti s črtico razmere pred trkom in hitrosti brez črtice razmere po njem.

Navadno obdelamo pri fiziki v šoli samo dve vrsti trkov. Preprost je *popolnoma neprožni trk*, po katerem se telesi gibljeta z enako hitrostjo:

$$v_1 = v_2. \tag{2}$$

Če poznamo masi obeh teles in začetni hitrosti, lahko izračunamo končno hitrost. Vzemimo, da od dveh enakih teles drugo pred trkom miruje. Po neprožnem trku se telesi gibljeta s polovično začetno hitrostjo prvega telesa.

[1] Počasi se širi tudi v druge dežele. Junija 1991 je bilo v Ljubljani evropsko prvenstvo.

Pri *prožnem trku* velja poleg izreka o ohranitvi gibalne količine (1) tudi *izrek o ohranitvi kinetične energije*. Skupna kinetična energija obeh teles je po trku enaka kot pred njim:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2. \tag{3}$$

Hitrosti teles po prožnem trku nista med seboj enaki in ju moramo izraziti z začetnima hitrostma. V enačbah (1) in (3) zberemo vse količine z indeksom 1 na levi in vse količine z indeksom 2 na desni, drugo enačbo razstavimo in jo delimo s prvo:

$$v_1' + v_1 = v_2' + v_2 \quad \text{ali} \quad v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2'). \tag{4}$$

Hitrost prvega telesa glede na drugo je po trku nasprotno enaka kot pred njim. Vzemimo, da od dveh enakih teles drugo pred trkom miruje. Po prožnem trku miruje prvo, drugo pa se giblje tako, kot se je pred trkom prvo.

Ali je mogoč trk, ki ni niti popolnoma neprožen niti prožen? Da, to je *neprožni trk*. Zanj ne velja niti enačba (2) niti enačba (4). Namesto tega velja enačba

$$v_1 - v_2 = -k(v_1' - v_2'), \tag{5}$$

ki preide pri $k = 0$ v enačbo popolnoma neprožnega trka (2) in pri $k = 1$ v enačbo prožnega trka (4). Z *restitucijskim* (*"obnovitvenim"*) *koeficientom* k smo zajeli vse trke. Popolnoma neprožni trk ($k = 0$) in prožni trk ($k = 1$) sta dve skrajnosti.

Iz enačb (1) in (5) sledi za hitrost žogice po trku v splošnem zveza

$$v_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1' + (1 + k)m_2 v_2'}{m_1 + m_2}, \tag{7}$$

ki jo lahko uporabimo pri popolnoma neprožnem trku, če postavimo $k = 0$, in pri prožnem trku, če postavimo $k = 1$.

Koeficient k lahko zavzame v splošnem katero koli vrednost med 0 in 1. Za trk kija in žogice pri baseballu pa velja $k = 0,55$. Tvrdka Spalding Sports Worldwide, ki edina izdeluje žogice za profesionalne igre, nenehno natančno preverja ta predpis.

Kij mora biti izdelan iz enega kosa lesa, a njegova masa ni natančno predpisana. Žogica ima po pravilih maso $m_1 = 0,145$ kg (in premer 7,32 cm). Hitrost žogice je pri tem izbijanju večja, pri drugem manjša, a tukaj za začetno hitrost upoštevamo dokaj veliko vrednost 40 m/s. V vetrovniku so izmerili, da se žogica tedaj, ko enakomerno pada in sta zračni upor in

Po *Galilejevem zakonu relativnosti* se oblika enačb ne spremeni, če opazujeta pojave mirujoči opazovalec ali opazovalec z vozečega se vlaka. Izrek o ohranitvi gibalne količine (1) in enačba (2) pri neprožnem trku ali izrek o ohranitvi kinetične energije (3) pri prožnem ostaneta v veljavi, če vsem hitrostim prištejemo enako hitrost:

$$v_1' \to v_1'^* = v_1' + v_0, \quad v_1 \to v_1^* = v_1 + v_0,$$

$$v_2' \to v_2'^* = v_2' + v_0, \quad v_2 \to v_2^* = v_2 + v_0. \qquad (6)$$

Pri prožnem trku sledita iz enačb (1) in (3) enačbi (4) in (6). Enako sledita iz enačb (4) in (6) enačbi (1) in (3) ali iz enačb (1) in (4) enačbi (2) in (6). Pri popolnoma neprožnem trku stopi na mesto enačbe (3) enačba (2), pri neprožnem trku pa na mesto enačbe (4) enačba (5).

teža v ravnovesju, giblje s hitrostjo 43 m/s. Zagotovo doseže vsaj v nekaterih primerih po trku s kijem večjo hitrost. Za največjo hitrost žogice pri baseballu navajajo 45 m/s. Hitrejša je na športnih igriščih samo žogica pri teniškem servisu (nekaj desetin metra na sekundo več) in pri golfu (61 m/s).

Hitrost kija blizu mesta, kjer trči z žogico, so merili s časovnim razmikom med prekinitvama dveh svetlobnih curkov. Želeli so določiti najugodnejšo maso kija za posamezne igralce. Nekateri igralci so namreč stavili na težji kij, drugi na lažjega. Prvi so zabijali v kij gramofonske igle ali žeblje, drugi pa izvrtali vanj luknjo in jo napolnili s plutovino. Merjenja so po pričakovanju pokazala, da pojema hitrost kija z naraščajočo maso. Pri nekaterih profesionalnih igralcih so ugotovili, da pojema hitrost kija pred trkom linearno z naraščajočo maso (slika 1 spodaj):

$$v_2' = v_{2o}' - \alpha m_2 .$$

S to zvezo dobimo za hitrost žogice po trku (slika 1 zgoraj)

$$v_1 = \frac{-\alpha(1+k)m_2^2 + [(1+k)v_{2o}' - k v_1']m_2 + m_1 v_1'}{m_1 + m_2}$$

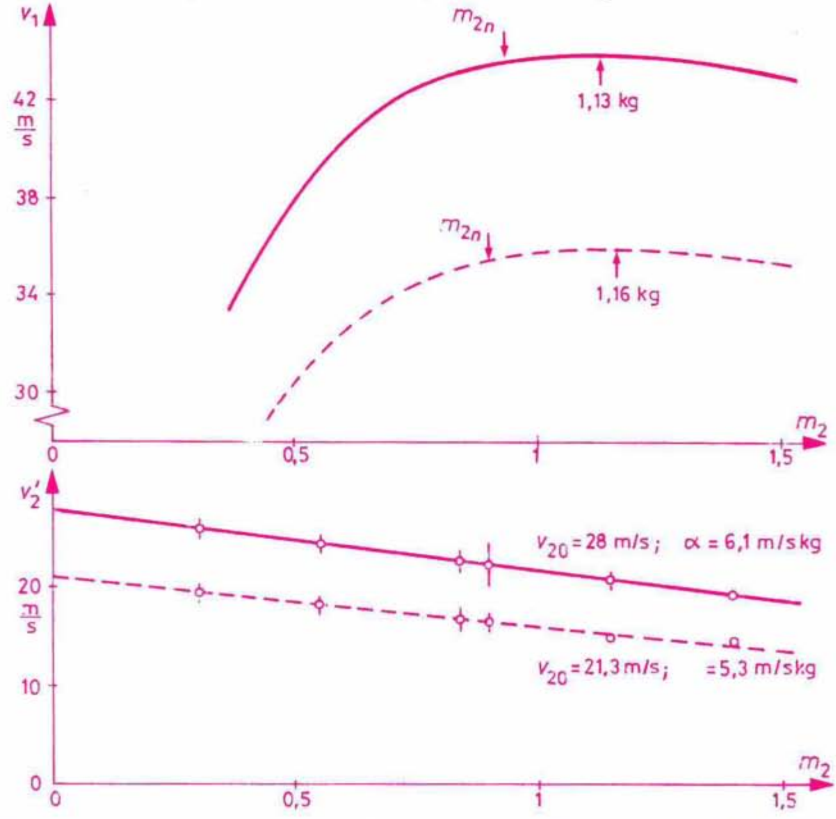
Iz zahteve $dv_1/dm_2 = 0$ sledi masa kija pri največji hitrosti

$$m_{2n} = \sqrt{\frac{m_1(v_{2o}' - v_1')}{\alpha} + m_1^2} - m_1 .$$

S podatkoma za enega izmed profesionalnih igralcev $v_{2o}' = 28\ \mathrm{m/s}$ in $\alpha = 6,1\ \mathrm{m/skg}$ ter s hitrostjo žogice pred trkom $v_1' = -40$ m/s dobimo $m_2 = 1,13$ kg. Z negativnim znakom smo upoštevali, da se pred trkom žogica giblje v nasprotni smeri kot kij. V tem primeru meri hitrost žogice po trku 43,9 m/s.

Hitrost žogice po trku je okoli največje vrednosti le rahlo odvisna od mase kija (slika 1 zgoraj). Kij z manjšo maso je laže voditi in z njim polno zadeti žogico. Zato izberejo kot *najugodnejšo maso kija* manjšo vrednost, na primer tisto, pri kateri je hitrost za 1 % manjša od največje vrednosti. S prejšnjimi podatki dobimo za najugodnejšo maso 0,94 kg. Večina profesionalnih igralcev uporablja kij z nekoliko manjšo maso 0,91 kg.

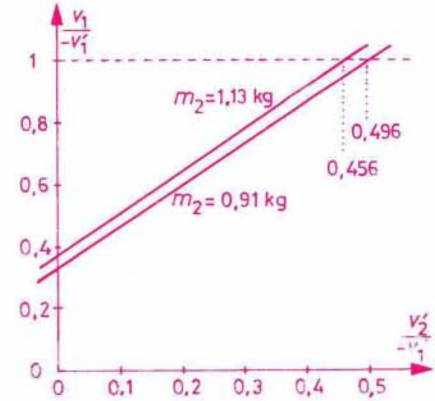
Kako je hitrost žogice po trku odvisna od hitrosti kija pred trkom, če vzamemo maso kija za dano? Enačbo (7) delimo z $-v_1'$:



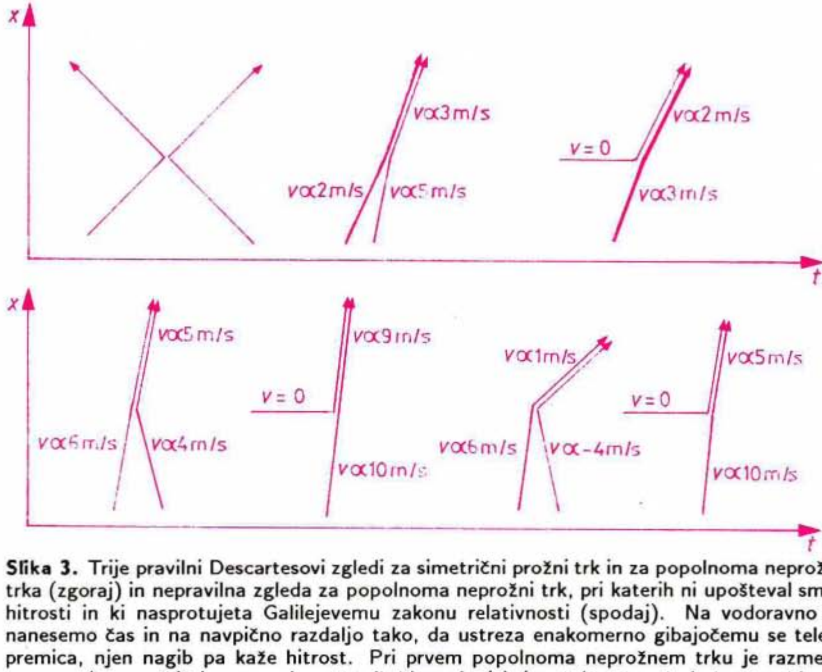
Slika 1. Izmerjena odvisnost hitrosti kija od mase za dva igralca sanfranciških Velikanov (spodaj). Podatki so iz članka T.Bahill, W.Karnavas, *The ideal baseball bat*, New Scientist 6.april 1991, str.26. Izračunana odvisnost hitrosti žogice po trku s kijem za te podatke in začetno hitrost $v_1' = -40$ m/s (zgoraj).

$$\frac{v_1}{-v_1'} = \frac{(1+k)m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{v_2'}{-v_1'}\right) + \\ + \frac{km_2 - m_1}{m_1+m_2}.$$

Razmerje hitrosti $v_1/(-v_1')$ je linearno odvisno od razmerja $v_2'/(-v_1')$ (slika 2). Da ima žogica po trku vsaj enako veliko hitrost kot pred



Slika 2. Odvisnost razmerja hitrosti $v_1/(-v_1')$ od razmerja $v_2'/(-v_1')$ za kij z maso 0,91 kg in z maso 1,13 kg. Vodoravna črta ustreza žogici, ki je po trku enako hitra kot pred njim.



Slika 3. Trije pravilni Descartesovi zgledi za simetrični prožni trk in za popolnoma neprožna trka (zgoraj) in nepravilna zgleda za popolnoma neprožni trk, pri katerih ni upošteval smeri hitrosti in ki nasprotujeta Galilejevemu zakonu relativnosti (spodaj). Na vodoravno os nanesemo čas in na navpično razdaljo tako, da ustreza enakomerno gibajočemu se telesu premica, njen nagib pa kaže hitrost. Pri prvem popolnoma neprožnem trku je razmerje mas $m_1/m_2 = 1/2$ in razmerje začetnih hitrosti $v_1'/v_2' = 5/2$ tako, da je končna hitrost sorazmerna s $(5+2.2)/3 = 3$. Pri drugem je razmerje mas enako, le da lažje telo miruje in je končna hitrost soramerna z $(2.3+1.0)/3 = 2$. Pri nepravilnem zgledu trčita telesi z enako maso in bi morala biti hitrost sorazmerna z $[1.6+1.(-4)]/2 = 1$, ne pa s $(1.6+1.4)/2 = 5$.

njim, mora veljati

$$\frac{v_2'}{-v_1'} \geq \frac{1-k+2m_1/m_2}{1+k}.$$

Kij z maso 0,91 kg mora v tem primeru imeti vsaj polovično hitrost žogice: $v_2' \geq -0,50v_1'$. Mimogrede omenimo zanimivost, da ima žogica s hitrostjo 40 m/s enako kinetično energijo kot kij s hitrostjo 16 m/s.

Po trku žogice s kijem s hitrostjo 20 m/s odleti žogica s hitrostjo 40 m/s, če je priletela s to hitrostjo. V tem primeru bi padla na tla v razdalji več kot $v_1^2 \sin 2\beta/g = 160$ m, če bi jo igralec usmeril pod kotom $\beta = 45^\circ$ proti vodoravnici. Zagotovo bi taka žogica zletela z igrišča in prinesla točko.

Naši računi so dali vsaj površen pregled nad trkom žogice in kija pri baseballu. Prizadevali smo si, da bi bilo računanje čim preprostejše, zato se nismo mogli izogniti poenostavitvam. Trk navadno ni prem in žogica in kij se gibljeta tako, da nimajo vsi njuni deli enake hitrosti. Žogica in kij nista popolnoma neodvisna od okolice, saj igralec drži kij v rokah. Dotik žogice in kija traja samo dobro tisočino sekunde in v tem času smemo vzeti, da se skupna kinetična energija žogice in kija ne spremeni. Roki pa lahko vplivata na gibanje kija, ker ga žogica ne zadene v težišču. Zračni upor na eni strani zmanjša domet žogice. Na drugi strani pa zrak na žogico, ki se vrti tako, da se se spodnji deli gibljejo v smeri leta in zgornji v nasprotni smeri, deluje z

Trke je med prvimi podrobno obravnaval René Descartes (1596 do 1650). Leta 1644 je v *Principih filozofije* postavil tri trditve: Vsaka stvar (gibanje, oblika...) se ohrani, dokler je ne spremeni kak zunanji vzrok. Gibanje se nadaljuje v ravni črti. Pri trku se ohrani gibanje.

Vidimo, da je Descartes poudaril pomen tega, kar danes imenujemo *ohranitvene zakone*. *Gibanje* mu je v tej zvezi pomenilo nekako našo gibalno količino. Spregledal pa je, da je pomembna tudi smer hitrosti in da je pri premem trku hitrost lahko pozitivna ali negativna. (V optiki pa je upošteval pri hitrosti tudi smer.) Namesto kinetične energije je računal s tedanjo *živo silo* mv^2. Descartes je našel prave rešitve le pri simetričnem prožnem trku in pri popolnoma neprožnem trku, če so imele vse hitrosti isto smer (slika 3). Od osmih zgledov jih je pet rešil napačno. Descartes je imel trke za posebno pomembne, ker je sodil, da deluje telo na drugo telo le, če se ga dotakne.

Tudi drugi so spoznali pomen trkov in Kraljeva družba (angleška akademija znanosti) v Londonu je vzpodbudila poskuse in razpisala nagradno nalogo. Ob koncu leta 1668 je dobila tri rešitve. Matematik John Wallis je pri popolnoma neprožnem trku upošteval pozitivne in negativne hitrosti, od prožnih trkov pa je upošteval samo nekaj najpreprostejših zgledov. Arhitekt in matematik Christopher Wren je prišel nekaj dlje na osnovi izrekov, ki jih pa ni utemeljil. Vprašanje je do kraja rešil Christian Huygens (1629 do 1695). S trki se je ukvarjal že od leta 1652 in je ugotovil, da so Descartesove rešitve v splošnem napačne. Postopno je našel enačbi (3) in (5). Leta 1661 je v Londonu razpravljal z Wallisom in Wrenom, ne da bi tedaj kaj objavil. V rešitvi nagradne naloge je upošteval zakon relativnosti (6). Vse izpeljave pa je mogoče najti šele v razpravi, ki je izšla po njegovi smrti leta 1703. V njej je zakon relativnosti pojasnil z zgledi na gibajočih se ladjah. V zvezi s tem je tudi priredil hitrosti z njenim kvadratom sorazmerno dvižno višino in tako ugotovil enakovrednost kinetične in potencialne energije.

dodatno silo navzgor in poveča domet. Zaradi tega je kot proti vodoravnici, pri katerem je domet žogice največji, manjši kot 45°. Žogica, ki se zavrti 68-krat na sekundo v pravi smeri, naj bi kljub zračnemu uporu dosegla 133 m, če bi odletela pod kotom 16°. Pri tem pride do izraza hrapava površina žogice in imajo svojo vlogo tudi šivi. Zadeve so dokaj zapletene in čeprav so nekateri delni izidi precej zanesljivi, to za druge ne velja. Mogoče je slišati nasprotujoče si trditve. Igralcem baseballa je morda koristil podatek o najugodnejši masi kija, z drugimi nasveti pa jim fiziki doslej niso mogli kaj prida pomagati.

Janez Strnad