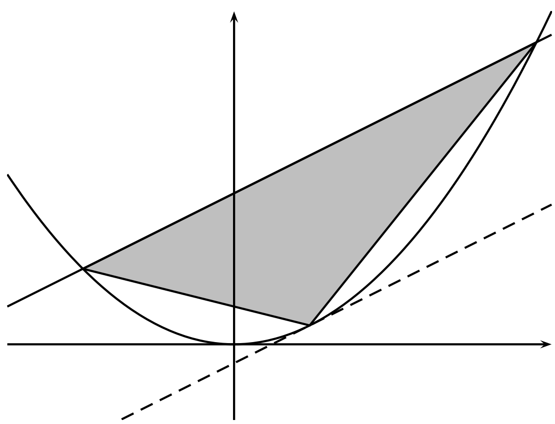
Arhimedova kvadratura parabole

Marjan Jerman

Uvod

Starogrški matematiki so se intenzivno ukvarjali z vprašanji, kako danemu liku poiskati večkotnik z enako ploščino. Najbolj znan problem, ki se je veliko kasneje izkazal za nerešljivega, je, kako krogu poiskati ploščinsko enak kvadrat. Arhimed (287–212 pr. n. št.) je v pismu matematiku Dositeju pokazal, da je ploščina lika, ki ga od parabole odreže njena sekanta, enaka štirim tretjinam ploščine trikotnika, ki ima za osnovnico tetivo, za vrh pa točko na paraboli, v kateri je tangenta na parabolo vzporedna sekanti (glej sliko 1). Arhimedov rezultat je izjemen, sploh če se zavedamo, da mu je to uspelo več kot dve tisočletji pred odkritjem integralov.



SLIKA 1.
Ploščina lika, ki ga od parabole odreže sekanta, je enaka štirim tretjinam ploščine trikotnika, ki ima za osnovnico tetivo, za vrh pa točko parabole, v kateri je tangenta vzporedna sekanti.

Starogrški matematiki so na parabolo gledali kot na presek neskončnega stožca z eno od ravnin, ki je vzporedna neki tangentni ravnini stožca; to je, ravnini, ki se stožca dotika le vzdolž njegove tvorilke. Takšna predstava je Arhimedovo obravnavo še dodatno otežila. Da bi najpomembnejše ideje Arhimedovega dokaza približali bralcem Preseka, si bomo pomagali s koordinatnim sistemom, ki ga je šele mnogo kasneje izumil Rene Descartes (1596–1650). V primerno postavljenem koordinatnem sistemu ima vsaka parabola enačbo $y = Cx^2$, kjer je C realna konstanta. Zaradi enostavnejšega računanja bomo obravnavali le parabolo $y = x^2$.

Tangenta na parabolo

Najprej si brez pomoči odvoda poglejmo, kako najti enačbo tangente na parabolo. Bolj natančno, poiščimo enačbo tangente na parabolo $y = x^2$ v točki (x_0, x_0^2).

Ker gre tangenta skozi točko (x_0, x_0^2), je za primeren naklon k njena enačba enaka

- $y - x_0^2 = k(x - x_0).$

Zato so skupne točke tangente in parabole rešitve enačbe

- $x^2 = k(x - x_0) + x_0^2.$

Ker se tangenta dotika parabole, mora imeti kvadratna enačba

- $x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$

le eno dvojno ničlo, zato je njena diskriminanta

- $D = k^2 - 4(kx_0 - x_0^2) = k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 = (k - 2x_0)^2$

enaka 0. Tako smo pokazali, da je naklon tangente na parabolo $y = x^2$ v točki (x_0, x_0^2) enak $k = 2x_0$. Bralci, ki že poznajo pomen odvoda, lahko preverijo, da se rezultat ujema z vrednostjo odvoda $(x^2)' = 2x$ v točki x_0.

Tangenta, ki je vzporedna sekanti

Pred obravnavo se je Arhimed sklical na nekatere znane lastnosti parabole, ki sta jih dokazala že Evklid (365–275 pr. n. št.) in Aristej (390–320 pr. n. št.). Najpomembnejša pravi, da sta ordinata in abscisa točke na paraboli v kvadratnem sorazmerju. Nas bo zanimalo tudi, v kateri točki parabole je tangenta vzporedna sekanti skozi točki $A(a, a^2)$ in $B(b, b^2)$. Ker imata vzporedni premici enak naklon, iščemo tangento z naklonom

- $k = \dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je naklon tangente v točki (x_0, x_0^2) enak $2x_0$, zato mora biti

- $2x_0 = b + a \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}(a + b).$

S tem smo pokazali zanimiv rezultat, ki pravi, da je tangenta na parabolo vzporedna sekanti v točki $C\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$, ki leži pod razpoloviščem tetive, med točkama, kjer sekanta seka parabolo.

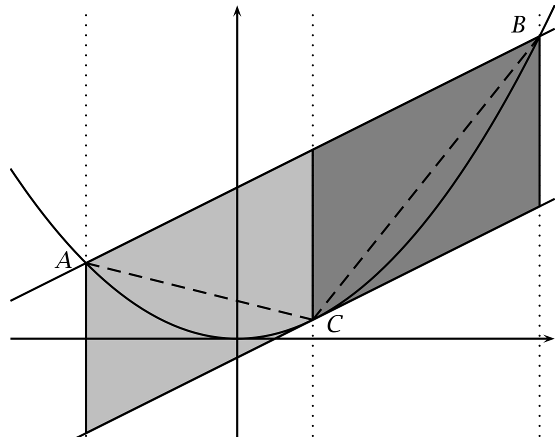
Metoda izčrpavanja ploščine

Ploščino odseka parabole $y = x^2$ s sekanto skozi točki $A(a, a^2)$ in $B(b, b^2)$ bomo izračunali tako, da bomo ta odsek zaporedoma tlakovali s čedalje manjšimi trikotnimi ploščicami, ki bodo v vsakem novem koraku pokrivale čedalje večji del odseka. Za največjo ploščico vzemimo trikotnik ABC.

Primerjajmo ploščino celotnega odseka in ploščino trikotnika ABC. Navpični premici $x = a$ in $x = b$ skupaj s tetivo AB in tangento skozi C oklepata paralelogram. Če ga v mislih razrežemo na dva kosa še z navpičnico $x = \frac{1}{2}(a + b)$ skozi točko C, vidimo, da je zaradi skladnosti ustreznih parov trikotnikov ploščina paralelograma dvakrat večja od ploščine trikotnika ABC. Hkrati je jasno, da je celoten odsek parabole vsebovan v tem paralelogramu. Zato lahko zelo grobo ocenimo, da trikotnik ABC pokriva vsaj polovico ploščine paraboličnega odseka.

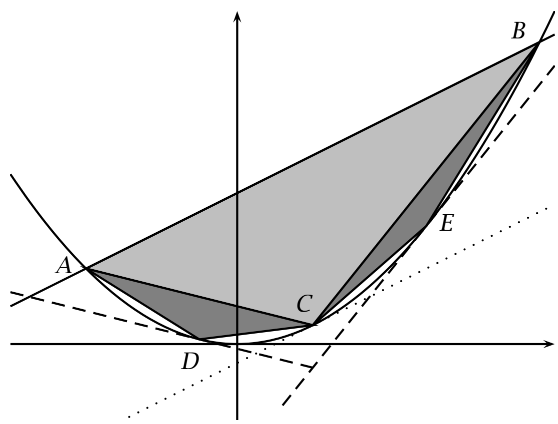
Nadaljujmo z včrtovanjem novih, manjših trikotnikov, ki bodo pokrili še nepokriti del paraboličnega odseka.

Najprej narišimo dva nova trikotnika z osnovnicama AC in CB ter vrhovoma v točkah D in E, kjer



SLIKA 2.
Včrtani trikotnik pokriva več kot polovico ploščine odseka parabole.

je tangenta na parabolo vzporedna premicama AC in CB (glej sliko 3). Premislek od prej nam pove, da smo s tem pokrili več kot polovico še nepokritega dela. Zato je ostala nepokrita še največ četrtina odseka.



SLIKA 3.
Zaporedno tlakovanje odseka parabole

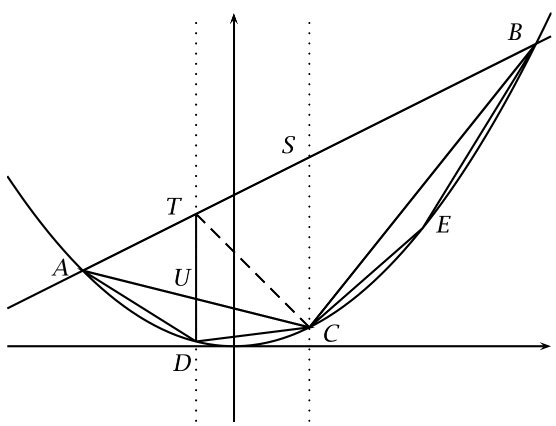
Nato narišimo še štiri nove trikotnike z osnovnicami AD, DC, CE in EB ter vrhovi v točkah parabole, kjer je tangenta vzporedna premicam AD, DC, CE in EB. Enak sklep kot prej nam pove, da je del odseka, ki ga ne pokriva sedem pravkar narisanih trikotnikov, manjši od osmine ploščine celotnega odseka.

S postopkom nadaljujemo. Vsakič na enak način kot prej dorišemo dvakrat toliko trikotnikov kot v prejšnjem koraku in ploščino nepokritega dela zmanjšamo vsaj za polovico. Zato lahko z dovolj potrpežljivim včrtovanjem novih in novih trikotnikov poljubno zbližamo ploščino odseka parabole ter vsoto ploščin včrtanih trikotnikov.

Ploščine manjših trikotnikov

V tem razdelku bomo dokazali, da je ploščina vsakega od trikotnikov ADC in CEB osemkrat manjša od ploščine trikotnika ACB.

Navpičnica $x = \frac{1}{2}(a+b)$ skozi C naj seka sekanto AB v točki S (glej sliko 4). Ker je navpičnica skozi C enako oddaljena od navpičnic $x = a$ in $x = b$ skozi A in B, leži točka S na sredini daljice AB. Trikotnika SAC in BSC imata enako dolgi osnovnici $AS = SB = \frac{1}{2}AB$ in isto višino, zato imata enako ploščino. Tako bo dovolj, če pokažemo le, da je ploščina trikotnika ADC enaka četrtini ploščine trikotnika ACS.



SLIKA 4.
Ploščina manjšega trikotnika ADC je enaka osmini ploščine večjega trikotnika ACB.

Sedaj potegnimo navpičnico skozi D, ki seka sekanto AB v točki T. Enak premislek kot prej nam pove, da točka T leži na sredini daljice AS. Trikotnika ACT in TCS imata enako dolgi osnovnici $AT = TS = \frac{1}{2}AS$ in isto višino, zato sta ploščinsko enaka in pokrivata vsak polovico ploščine trikotnika ACS. Zato je dovolj pokazati, da je ploščina trikotnika ADC enaka polovici ploščine trikotnika ACT.

Daljica DT naj seka daljico AC v točki U. Trikotnika ADC in ACT imata isto osnovnico AC, njuni višini pa sta v razmerju $DU : UT$. Dokaz bo tako končan, ko pokažemo, da je $UT = 2\,DU$.

Pomagajmo si s koordinatnim sistemom. Ker točke D, U in T ležijo na isti navpičnici

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{3a+b}{4},$$

sta dolžini daljic UT in DU enaki razliki ordinat ustreznih točk.

Točka D leži na paraboli $y = x^2$, zato ima ordinato enako

$$y_D = \frac{(3a+b)^2}{16}.$$

Točka T leži na sekanti AB, katere naklon $k_{AB} = a+b$ smo že izračunali. Enačba sekante AB je

$$y - a^2 = (b+a)(x-a).$$

Zato je ordinata točke T enaka

$$y_T = (a+b)\left(\frac{3a+b}{4} - a\right) + a^2 = \frac{b^2+3a^2}{4}.$$

Točka U leži na premici skozi A in C z naklonom

$$k_{AC} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a^2}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}$$

in enačbo

$$y - a^2 = \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}(x-a).$$

Ordinata točke U je zato enaka

$$y_U = a^2 + \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}\left(\frac{3a+b}{4} - a\right) = \frac{5a^2+2ab+b^2}{8}.$$

Krajši računa nam dá dolžini daljic UT in DU:

$$y_T - y_U = \frac{(a-b)^2}{8},$$

$$y_U - y_D = \frac{(a-b)^2}{16}.$$

Res velja $UT = 2\,DU$, to pa smo želeli pokazati.

Ker je trikotnik CEB dobljen na enak način kot trikotnik ADC, je tudi njegova ploščina enaka četrtini ploščine trikotnika BSC in zato enaka osmini ploščine trikotnika ACB.

Vsota ploščin trikotnikov

Recimo, da je ploščina trikotnika ACB enaka S. V vsakem koraku tlakovanja dodamo dvakrat več novih trikotnikov kot v prejšnjem koraku, ploščina vsakega novega trikotnika pa je osemkrat manjša. Premislili smo že, da je po dovolj korakih vsota ploščin vseh tlakovcev poljubno blizu ploščini paraboličnega odseka. Po n korakih je vsota ploščin trikotnikov enaka

$$\begin{aligned} S_n &= S + 2 \cdot \tfrac{1}{8}S + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8^2}S + 2^3 \cdot \tfrac{1}{8^3}S + \\ &\quad \ldots + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{8^{n-1}}S \\ &= S\left(1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{4})^{n-1}\right). \end{aligned}$$

To je vsota končnega geometrijskega zaporedja s prvim členom S in kvocientom $\frac{1}{4}$, od koder sledi

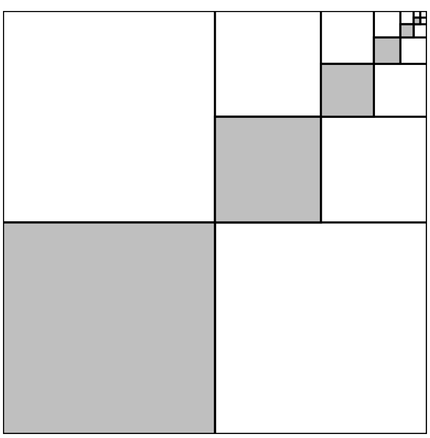
$$S_n = S\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S\left(1-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right).$$

Ko število korakov večamo čez vse meje, postaja potenca $(\frac{1}{4})^n$ poljubno majhna, zato je ploščina paraboličnega odseka enaka

$$S_\infty = \frac{4}{3}S.$$

To pa je natanko Arhimedov rezultat.

Arhimed še ni poznal geometrijskih vrst in je zgornjo vsoto izračunal s pomočjo naslednjega trika:



SLIKA 5.
Geometrijska interpretacija vsote geometrijske vrste s kvocientom $\frac{1}{4}$

Kvadrat s stranico 1 razrežimo na štiri enake kvadratne dele (glej sliko 5). Vsak del ima ploščino $\frac{1}{4}$. Postopek ponovimo z manjšim zgornjim desnim kvadratkom, ki ga na enak način razdelimo na še manjše kvadratke s ploščino $\frac{1}{4^2}$. V nadaljevanju postopka na diagonali osnovnega kvadrata dobimo čedalje manjše kvadrate. Vsakemu diagonalnemu kvadratku pripadata kvadratka z enako ploščino, eden od njiju leži nad njim, drugi pa na njegovi desni strani.

Zato si lahko predstavljamo, da ploščino največjega kvadrata izčrpamo z manjšimi kvadrati na naslednji način.

Najprej vzamemo vse tri začetne polovične kvadratke razen zgornjega desnega. Nato manjkajoči zgornji desni kvadratek pokrijemo s tremi manjšimi ploščinsko enakimi kvadratki, preostali kvadratek spet s tremi manjšimi in tako naprej. Površno povedano bomo v neskončno korakih s trojicami čedalje manjših skladnih kvadratkov izčrpali ploščino celotnega osnovnega kvadrata. Drugače, ploščino 1 osnovnega kvadrata lahko razbijemo na neskončno vsoto ploščin čedalje manjših kvadratkov takole:

$$1 = 3\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4^2} + 3\frac{1}{4^3} + \ldots$$

Od tod dobimo vsoto iskane neskončne geometrijske vrste

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$$

Primerjava rezultata z modernim izračunom

Bralci, ki jih je prispevek pritegnil in že poznajo pomen integrala, lahko Arhimedov rezultat potrdijo tako, da najprej izračunajo ploščino S trikotnika z oglišči $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ in $C(\frac{1}{2}(a+b), (\frac{1}{2}(a+b))^2)$, nato pa izračunajo ploščino območja med parabolo $y = x^2$ in njeno sekanto skozi točki A in B s pomočjo integrala

$$\int_a^b \left(((a+b)(x-a)+a^2) - x^2\right) dx.$$

× × ×