Pravokotne ure

Miha Mihovilovič

V nedeljo mi je Janez zastavil zanimivo nalogo, ki se je spominja še iz mladosti. Zanimalo ga je, kolikokrat na dan ter ob katerih časih kazalca na uri oklepata pravi kot. Takoj sem začel razmišljati o rešitvi.

Urni kazalec za en obhod potrebuje dvanajst ur, kar pomeni, da se giblje s kotno hitrostjo $\omega_U = \frac{2\pi}{12}\,\mathrm{h}^{-1}$. Minutni kazalec za isto pot potrebuje le eno uro in ima zatorej kotno hitrost $\omega_M = \frac{2\pi}{1}\,\mathrm{h}^{-1}$. Denimo, da kroženje kazalcev začnemo opazovati točno opolnoči, ko sta kazalca poravnana v navpični legi. Ker se kazalca gibljeta enakomerno, njuna trenutna odklona od navpičnice ϕ_U, ϕ_M izračunamo tako, da njuni kotni hitrosti pomnožimo s trenutnim časom t. Kot med kazalcema $\Delta\phi$ potemtakem določa razlika med njunima odklonoma:

$$\Delta\phi = |\phi_M(t) - \phi_U(t)|\,, \qquad \phi_M = \omega_M\,t, \quad \phi_U = \omega_U\,t. \qquad (1)$$

Čase t_n, pri katerih kazalca oklepata pravi kot, poiščemo tako, da rešimo enačbo:

$$\Delta\phi(t_n) = \pi/2 + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Periodo $n\pi$ potrebujemo zato, da poleg kota $\Delta\phi = \pi/2$ upoštevamo tudi kot $\Delta\phi = 3\pi/2$, ko se minutni kazalec nahaja na nasprotni strani ure, ter vse nadaljne kote, ko minutni kazalec začne prehitevati urnega (glej sliko 1). Uporabimo izraz (1) v enačbi (2):

$$|\omega_M - \omega_H|\,t_n = \frac{11\pi}{6\,\mathrm{h}}\,t_n = \pi/2 + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

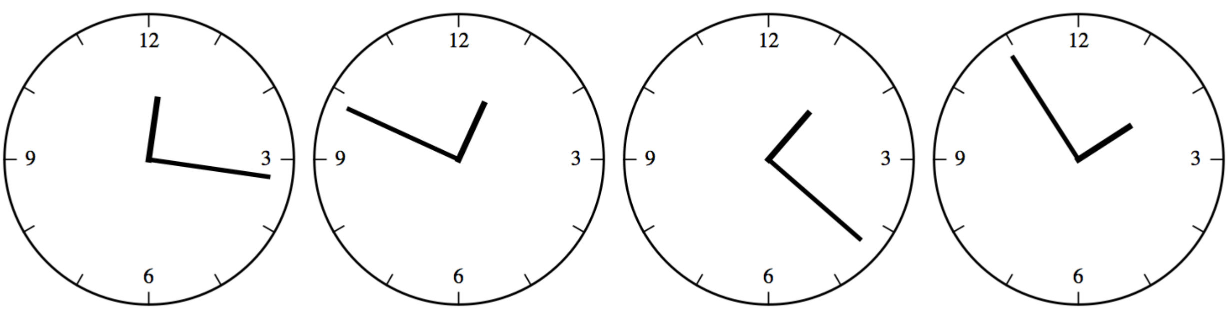
Če od tod izrazimo t_n, dobimo končno formulo, po kateri izračunamo čase, ko kazalca na uri oklepata pravi kot:

$$t_n = (2n+1)\frac{3}{11}\,\mathrm{h}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Kolikokrat na dan pride do omenjenega pojava, izračunamo tako, da iz enačbe (3) izrazimo n in dobljeni izraz izračunamo za $t = 24\,\mathrm{h}$:

$$n = \left.\frac{11}{6\,\mathrm{h}}\,t + \frac{1}{2}\right|_{t=24\,\mathrm{h}} = 44{,}5.$$

Ker je n nenegativno celo število, vzamemo le celi del rezultata. Urina kazalca tako 44-krat na dan oklepata pravi kot. Točni časi, ob katerih se to zgodi, pa so zbrani v tabeli na naslednji strani.



SLIKA 1.
Štirje zaporedni primeri časov, ko kazalca na uri oklepata pravi kot.

zap. št.	čas
1	00:16:22
2	00:49:05
3	01:21:49
4	01:54:33
5	02:27:16
6	03:00:00
7	03:32:44
8	04:05:27
9	04:38:11
10	05:10:55
11	05:43:38
12	06:16:22
13	06:49:05
14	07:21:49
15	07:54:33
16	08:27:16
17	09:00:00
18	09:32:44
19	10:05:27
20	10:38:11
21	11:10:55
22	11:43:38

zap. št.	čas
23	12:16:22
24	12:49:05
25	13:21:49
26	13:54:33
27	14:27:16
28	15:00:00
29	15:32:44
30	16:05:27
31	16:38:11
32	17:10:55
33	17:43:38
34	18:16:22
35	18:49:05
36	19:21:49
37	19:54:33
38	20:27:16
39	21:00:00
40	21:32:44
41	22:05:27
42	22:38:11
43	23:10:55
44	23:43:38

TABELA 1.
Točni časi, ob katerih kazalca na uri oklepata pravi kot.

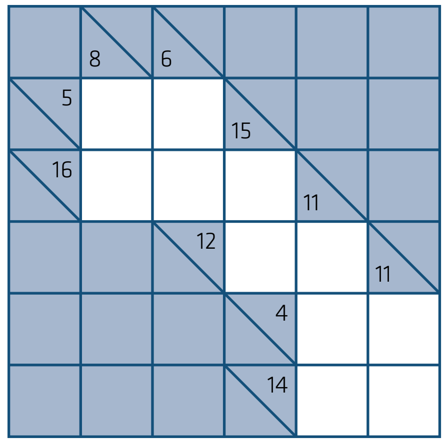
Rešitev testa iz prejšnje številke Preseka

→ V prejšnji številka Preseka smo vam v članku »Ful drgačen test iz mate« zastavili nekaj vprašanj in možnih odgovorov nanje. Edini pravilni odgovori so:

- 1f, 3e, 5b, 7c, 8b, 9d, 10b, 11a,b.

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



Rešitev križne vsote