PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 4
Strani 224–225

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

PLOSČINA PRAVILNEGA OSEMKOTNIKA

Ključne besede: matematika, geometrija, ploščina, osemkotnik.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/444-Milosevic-Petek.pdf

PLOŠČINA PRAVILNEGA OSEMKOTNIKA

Pokažimo, kako lahko izračunamo ploščino pravilnega osemkotnika, če poznamo njegovo stranico!

1. način

Na sliki 1 imamo pravilni osemkotnik s stranico a. Potegnemo daljice AF, BE, CH in DG in dobimo kvadrat $MNPQ$, katerega stranica je enaka stranici osemkotnika. Očitno so enakokraki pravokotni trikotniki AQH, BMC, DNE in FPG medsebojno skladni. Ker je njihova hipotenuza obenem tudi stranica osemkotnika, bo njih kateta po Pitagorovem izreku enaka $\sqrt{a^2/2} = a\sqrt{2}/2$. Torej je pravilni osemkotnik $ABCDEFGH$ sestavljen iz kvadrata stranice a in štirih pravokotnih trapezov z osnovnicama $a + a\sqrt{2}/2$ in a ter višino $a\sqrt{2}/2$. Zato je ploščina enaka

$$P = a^2 + 4 . \frac{1}{2} ((a + a\sqrt{2}/2) + a) . a\sqrt{2}/2$$

$$P = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

2. način

Pravilni osemkotnik je sestavljen iz osmih skladnih enakokrakih trikotnikov z osnovnico a in krakom R. (Glej sliko 2). Pri tem je a stranica pravilnega osemkotnika in R polmer temu osemkotniku očrtanega kroga. Trikotnik AOH je eden takih trikotnikov. Konstruiramo višino HP na krak AO. Ker je $\sphericalangle AOH = 360^o : 8 = 45^o$ in kot pri P pravi, je tudi $\sphericalangle PHO = 45^o$. Nasproti enakim kotom leže enake stranice, zato je $\overline{HP} = \overline{OP}$. Označimo dolžino daljice OP s črko x; potem je $\overline{AP} = R - x$. Po Pitagorovem izreku za trikotnik HPO je seveda

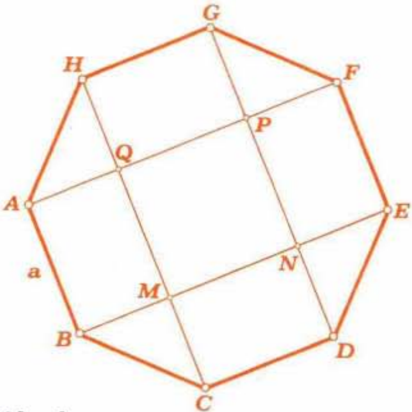
$$R^2 = x^2 + x^2$$

$$x = R\sqrt{2}/2$$

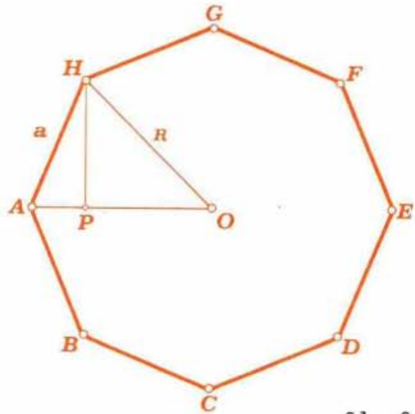
Nadalje je

$$\overline{AP} = R - R\sqrt{2}/2 = \frac{R}{2} (2 - \sqrt{2})$$

Iz trikotnika APH pa po Pitagorovem izreku dobimo



Sl. 1



Sl. 2

$$\overline{AH}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PH}^2$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4}(2 - \sqrt{2})^2 + \frac{R^2}{2}$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4}(4 - 4\sqrt{2} + 1 + 2) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$R^2 = a^2/(2 - \sqrt{2}) = (a^2/2)(2 + \sqrt{2}) \qquad (1)$$

Ploščina trikotnika AOH je enaka $(1/2).\overline{AO}.\overline{PH} = (1/2).R.R\sqrt{2}/2 = R^2\sqrt{2}/4$, ploščina osemkotnika je osemkrat večja

$$P = 2R^2\sqrt{2} \qquad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi

$$P = 2.\frac{a^2}{2}(2 + \sqrt{2}).2 = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

Rezultat je seveda isti, kot smo ga dobili na prvi način.

NALOGI

1. Izrazi - brez uporabe trigonometrije - ploščino pravilnega osemkotnika s polmerom temu osemkotniku včrtanega kroga.

2. Dokaži, da je ploščina pravilnega osemkotnika enaka produktu njegove najkrajše in najdaljše diagonale!

Dragoljub M. Milošević

prevedel *Peter Petek*