Kako daleč je Luna ali skupinska naloga na spletni astronomski olimpijadi

Vid Kavčič

V letošnjem letu so zaradi še preveč znanih razlogov mednarodna tekmovanja odpadla ali pa bila prestavljena v virtualni prostor. Tako je redno mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, 14. po vrsti, nadomestila spletna različica GeCAA.

Dijaki slovenske ekipe so na olimpijadi dobili kar nekaj koščkov žlahtnih kovin. **Domen Lisjak** je osvojil **srebrno medaljo**, **Vid Kavčič**, **Urša Mati Djuraki** in **Urban Razpotnik** (vsi Gimnazija Bežigrad) **bron**, **Simon Bukovšek** (Gimnazija Kranj) pa **pohvalo.**

Na GeCAA, ki so jo organizirali estonski astronomi, je sodelovalo več kot 300 dijakov in dijakinj iz 40 držav.

Uvodnik v prispevek

Tradicionalno je del astronomske olimpijade tudi t. i. tekmovanje skupin (Team Competition), v okviru katerega se, bolj za zabavo kot zares, z astronomskimi zagonetkami soočajo skupine naključno izbranih dijakov iz vseh sodelujočih držav.

Letos so bili zaradi tekmovanja na daljavo člani vsake ekipe razporejeni po vsem svetu, kar pa je bila dobra priložnost za izvedbo astronomskih meritev s hkratnimi opazovanji iz različnih krajev na Zemlji, katerih cilj je bil določitev razdalje do Lune.

Oddaljenost Lune od Zemlje se sčasoma spreminja zaradi ekscentričnosti njene tirnice. Ko je Luna Zemlji najbližje (je v **perigeju**), je od nje oddaljena približno 360 000 km (Če je takrat Luna tudi v fazi ščipa oz. polne Lune, jo zaradi največje navidezne velikosti imenujemo kar *Superluna.*), največja oddaljenost Lune od Zemlje (**apogej**) pa je približno 405 000 km.

Naloga letošnje GeCAA je bila sledeča:

Z ekipnim načrtovanjem in izvajanjem vrste opazovanj ter izračunov določite razdaljo središča Lune od središča Zemlje ob 12.00 UT 6. oktobra 2020, natančno, kot le lahko.

Vsaka ekipa je tako morala pripraviti predstavitev o opazovalnem delu in meritvah ter njihovo obdelavo. Zagotovo je bil to precejšen izziv.

Poskusimo torej predstaviti nekaj idej, kako bi takšno nalogo lahko teoretično rešili, prav tako pa bomo predstavili, kako so zadeve dejansko potekale.

SLIKA 1.
Polna Luna, posneta na dan reformacije.

SLIKA 2.
Pri fotografiranju Lune nam zagodejo oblaki. Kljub zakritju lahko včasih napravimo kar dobre posnetke. Oblaki so vidni kot neobičajni potemnjeni deli.

Teoretični poduk – metode merjenja oddaljenosti Lune od Zemlje

Oddaljenost do Lune je mogoče izračunati na več različnih načinov; predstavimo nekaj različnih.

Paralaksa

Razdaljo do relativno bližnjih vesoljskih telesnih teles lahko določamo s paralakso.

Paralaksa je razlika v navidezni legi objekta. Objekt namreč opazujemo iz različnih smeri, opazovališči se tudi razlikujeta glede na ozadje in sta med seboj oddaljeni za določeno dolžino. Le-to podamo kakor kot med premicama, ki opisujeta ti dve smeri pogleda na vesoljsko telo. Razdaljo med opazovališčema pa imenujemo *baza*.

Čeprav se tega redko zavemo, ja paralaksa zelo pomembna za naše življenje. Imamo dve očesi, ki sta razmaknjeni za določeno razdaljo, *bazo*, kar nam omogoča, da (bližnji) predmet s posameznim očesom vidimo pod drugačnim kotom. To nam nudi *občutek globine*. Če pogledamo npr. svinčnik, ki ga držimo pred seboj, enkrat samo z levimo, drugič samo z desnim očesom, svinčnik glede na ozadje vidimo na različnih mestih.

Paralakso pri Luni je opazil že starogrški astronom Hiparh (okoli 190–120 pr. n. št.). Ker je poznal razdaljo med obema lokacijama in imel zabeležke v zvezi z lego Lune glede na Sonce med mrkom, je lahko s pomočjo trigonometrije določil razdaljo do Lune. Sledimo torej Hiparhu in razmislimo, kako bi se izziva lotili v naši nalogi.

Določitev baze

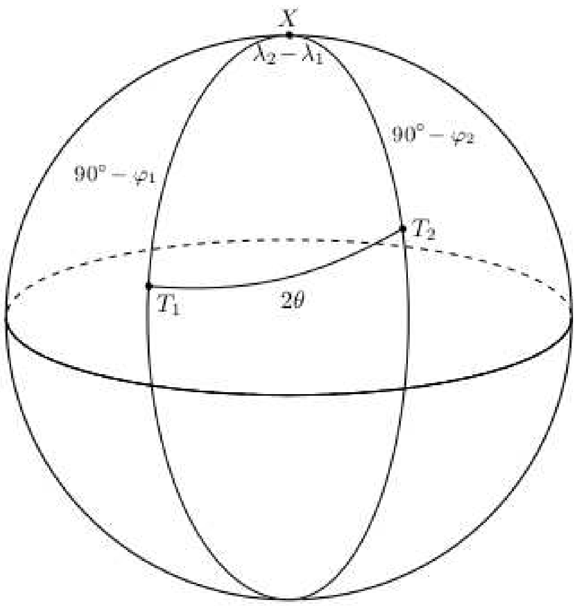
V splošni astronomiji poznamo dve posebej imenovani vrsti paralakse, ki se imenujeta na podlagi tega, kaj vzamemo za bazo – za telesa na večjih oddaljenostih je za natančnost izračuna priporočljivo vzeti večjo bazo.

Kot paralakse, pri katerem iz opazovanega telesa vidimo polmer Zemlje (bazo), ki stoji pravokotno na zorni smeri, imenujemo **horizontska/dnevna paralaksa** telesa. Uporabljamo jo pri računanju oddaljenosti Sonca, Lune in ostalih teles v Osončju.

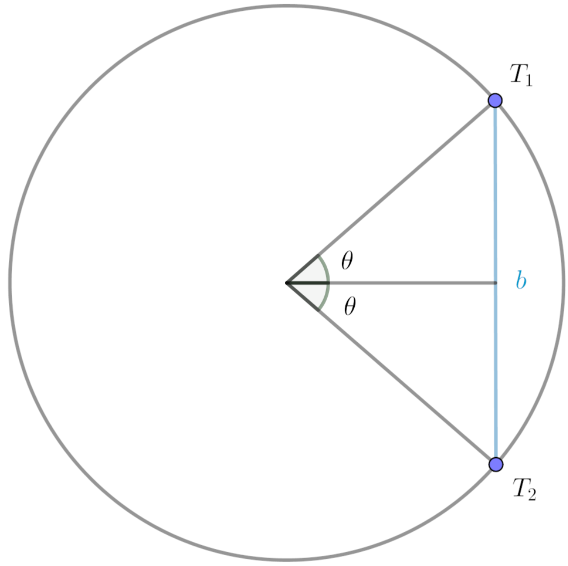
Kot paralakse, pri katerem iz opazovanega telesa vidimo srednjo razdaljo med Zemljo in Soncem (1 astronomsko enoto; 1a.e. $\approx$ 150 000 000 km), imenujemo **letna paralaksa** telesa. Uporabljamo jo pri merjenju oddaljenosti bližnjih zvezd, ki na nebesni sferi med letom opisujejo t. i. *paralaktične elipse*.

Pri našem projektu pa se pojavi težava, saj nismo mogli izbrati nobene od zgornjih standardnih možnosti. Oddaljenost med kraji opazovanja, med mano in posameznim kolegi v ekipi ni bila enaka polmeru Zemlje.

Našo bazo oz. baze je bilo treba izračunati. Za poenostavitev problema predpostavimo, da je Zemlja krogla s polmerom $R = 6370$ km. Koordinate opazovališč so T_1 (φ_1, λ_1) in T_2 (φ_2, λ_2). Ob predpostavki, da je površje Zemlje sferično, lahko uporabim



SLIKA 3.



SLIKA 4.

obrazce sferne trigonometrije, da dobimo kotno oddaljenost med krajema. Narišimo dovolj verno skico in poiščimo trikotnik, iz katerega bi lahko dobili kotno oddaljenost med krajema.

Kosinusni izrek v sferični trigonometriji v splošnem zapišemo kot

- $$\cos a = \cos\alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c. \qquad (1)$$

Poglejmo sferični trikotnik T_1T_2X in zanj zapišimo kosinusni izrek:

- $$\cos 2\theta = \cos(\lambda_1-\lambda_2)\sin(90°-\varphi_1)\sin(90°-\varphi_2) + \cos(90°-\varphi_1)\sin(90°-\varphi_2)$$
$$\cos 2\theta = \cos(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

- $$2\theta = \arccos\left[\cos(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right].$$

Dobili smo izraz za kotno oddaljenost med krajema na Zemlji 2θ. Iz nje moramo dobiti bazo za paralakso. Baza je tako dolžina zveznice med krajema, ki gre skozi Zemljo in ne razdalja med krajema na površju Zemlje. Označimo jo z b. Iz skice 4 izpeljemo enačbo.

Velja

- $$b = 2R_{\oplus}\sin\theta.$$

Enostavni razmislek, zakaj je temu tako, pa prepuščam bralcu. Bazo b torej imamo.

Določitev kota paralakse

Kot paralakse dobimo tako, da vsak od opazovalcev izmeri navidezne nebesne koordinate Lune iz svojega kraja, še najlažje s pomočjo teleskopa. Kotna oddaljenost med izmerkoma predstavlja paralakso. Predstavimo to še računsko. Naj bodo izmerjene koordinate $I_1(\delta_1,\alpha_1)$ in $I_2(\delta_2,\alpha_2)$. Kotno oddaljenost smo, sicer na primeru Zemljinega površja, že izpeljali, zato se tokrat izognimo izpeljavi in kar zapišimo

- $$p = \arccos\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\delta_1\cos\delta_2 + \sin\delta_1\sin\delta_2\right]$$

Določitev razdalje Lune od opazovalca

Ko imamo tako bazo in kot paralakse, lahko ocenimo oddaljenost Lune:

- $d = \frac{b}{p}.$

V enačbi je p v radianih.

Kotna velikost

Oddaljenost Lune lahko določimo tudi iz kotne velikosti Lunine ploskvice. Ta metoda je tako računsko kot izvedbeno enostavnejša od paralakse, vendar pri njej koristimo podatek po Luninem polmeru; če npr. podamo podatek o Luninem polarnem polmeru $R_L = 1736$ km in kotno velikost (kotni polarni premer) Lune δ, potem njeno oddaljenost od opazovalca v tem trenutku s pomočjo skice 3 opišemo z izrazom

- $d = \frac{R_L}{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} \approx \frac{2R_L}{\delta},$

kjer poudarimo, da v zadnjem koraku zahtevamo, da je kot δ v radianih.

Paziti moramo, da pri taki nalogi razmislimo o vplivu ozračja, ki povzroča lom svetlobe (refrakcijo). Ker je refrakcija odvisna od višine nad obzorjem, je Luna (tudi Sonce, mimogrede) navidezno nekoliko sploščena, kar je najbolje vidno, ko je Luna nizko nad obzorjem.

Spremembo (povečanje) kotne višine nebesnega telesa nad obzorjem R za telesa z višino, večjo od 15°, lahko približno opišemo z enačbo

- $R(h > 15^\circ) = \frac{P}{T} \cdot 0{,}00452^\circ \cot h.$

Spremembo (povečanje) kotne višine nebesnega telesa nad obzorjem R za telesa z višino, manjšo od 15°, približamo z drugačno enačbo, saj moramo posebej upoštevati ukrivljenost ozračja:

- $R(h \leqslant 15^\circ) = \frac{P}{T}\frac{0{,}1594 + 0{,}0196h + 0{,}00002h^2}{1 + 0{,}505h + 0{,}0845h^2}.$

V enačbah zgoraj je h kotna višina v primeru odsotnosti ozračja v kotnih stopinjah, P atmosferski tlak v milibarih (oziorma hektopaskalih) in T temperatura v Kelvinih.

Pri sploščenosti igra veliko vlogo razlika refrakcije na dololočenem intervalu, npr. za zgornji in spodnji del Lunine ploskvice. Razlika je na obzorju veliko opaznejša kot takrat, ko je Luna višje na nebu. V našem izračunu bomo razliko omenjenih refrakcij zanemarili, saj je bila višina Lune v času fotografiranja okoli 30°.

Vrnimo se torej k izrazu za oddaljenost Lune od opazovalca v danem trenutku.

Seveda pa, ker nas zanima oddaljenost med središčema Lune in Zemlje, in ne oddaljenost med opazovalcem in Luno, moramo dobljeno razdaljo malo prilagoditi, kar pa s pomočjo skice 4 niti ni težko.

Naj bo torej iskana, prava, razdalja D. Po kosinusnem izreku za trikotnik iz skice velja

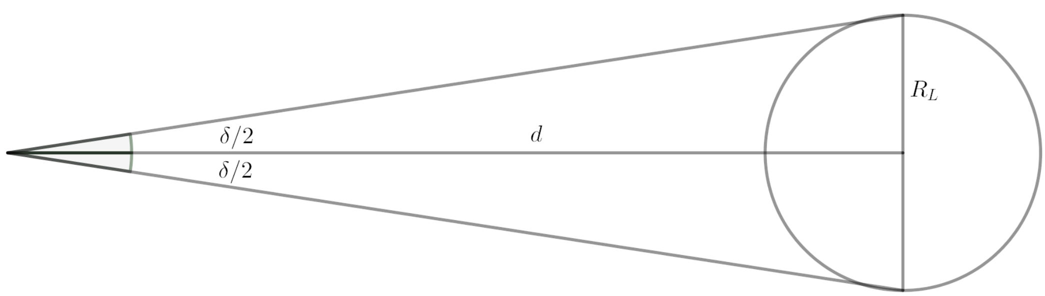
- $D^2 = R_\oplus^2 + d^2 - 2R_\oplus d\cos(90^\circ + h)$

$$D = \left(R_\oplus^2 + d^2 + 2R_\oplus d\sin h\right)^{\frac{1}{2}},$$

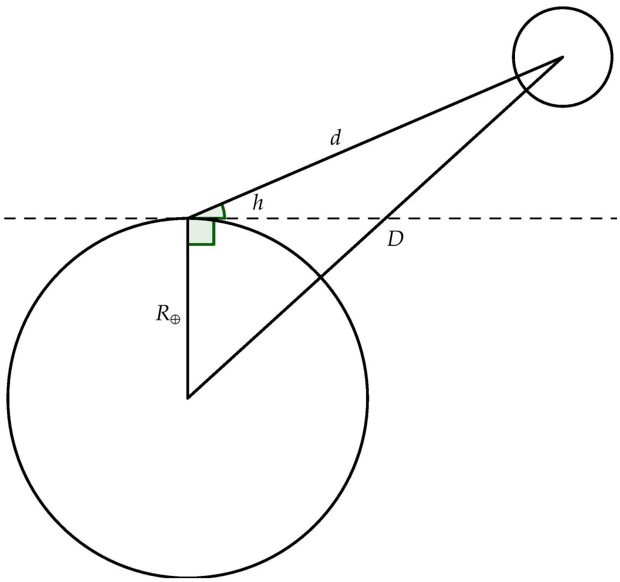
s tem pa smo izpeljavo zaključili.

Ostale metode

Obstaja še vrsta metod, s katerimi bi lahko izračunali iskano oddaljenost. V primeru Luninega **mrka** bi si lahko pomagali z velikostjo Zemljine sence, v primeru boljše opremljenosti pa bi oddaljenost lahko izračunali iz časa potovanja **radarskih valov** do Lune in nazaj. Podobno bi lahko storili tudi z **laserskim žarkom**, ki bi se odbil od zrcala, ki ga je na Luni pustila misija Apollo v letu 1969.



SLIKA 5. S to vinjeto si lahko pomagamo pri izpeljavi razdalje. Upoštevamo, da je Luna daleč stran.



SLIKA 6.
Skica za pretvorbo v pravo razdaljo

In kako smo rešili nalogo?

Pri praktični izvedbi se je, vsaj pri naši skupini, nekoliko zapletlo. Astronomski kolegi so namreč imeli težavo, da položaja Lune s teleskopom niso mogli izmeriti. Prav tako so se ocene kotne velikosti Lune lotili s posnetka, ki so ga napravili s svojim mobilnim telefonom, kar pa je premalo natančno.

Sam sem izvedel meritev oddaljenosti Lune na dan 4. 10. 2020 ob 23.19.

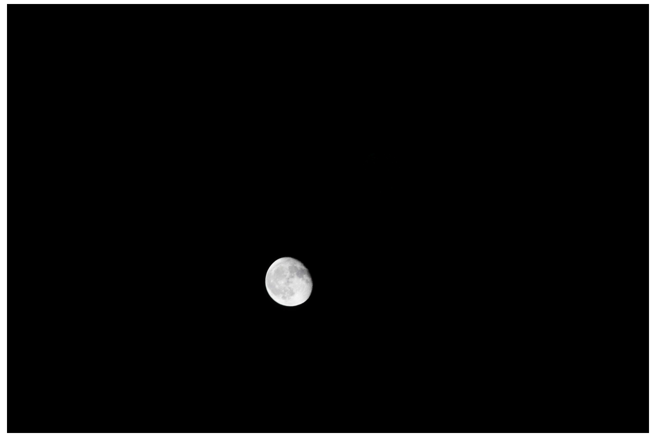
Podatke o fotoaparatu in objektivu prikazuje tabela 1.

Pri fotografiranju je bil objektiv nastavljen na najmanjšo goriščno razdaljo; $f_{min} = 200$ mm. Kotna velikost stranice slikovne točke v radianih je

$$\varphi_0 = \frac{x_0}{f_{min}}.$$

Iz analize posnetka ugotovimo, da na posnetku Lunin premer predstavlja $N = 405$ slikovnih točk. Kotna velikost je tako

$$\varphi = N\frac{x_0}{f_{min}} \approx 0{,}49774°.$$



SLIKA 7.
Fotografija Lune iz Ljubljane dne 4. 10. 2020 je nastala (zaradi okoliščin) brez stojala.

EOS CANON 1200D		
Daljša stranica čipa	a	22,3 mm
Krajša stranica čipa	b	14,9 mm
Velikost ene slikovne točke	x_0	4,29 μm
Koeficient efektivne goriščne razdalje	k	1,61
Premer objektiva	D	86 mm
Goriščno razmerje objektiva	F	5,0
Najmanjša goriščna razdalja objektiva	$f_{\min}$	200 mm
Največja goriščna razdalja objektiva	$f_{\max}$	500 mm

TABELA 1.
Podatki o fotoaparatu in objektivu, s katerim smo fotografirali v Ljubjani 4. 10. 2020 ob 23:19, ko je bilo to še dovoljeno.

Izračunano vstavimo v enačbo za oddaljenost Lune od nas, opazovalca:

$$d = \frac{R_L}{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} \approx \frac{2R_L}{\delta} \approx 399666 \text{ km}.$$

Računamo naprej, za podatke vzamemo $h = 30°$ in $R_\oplus = 6370$ km:

$$D = \left(R_\oplus^2 + d^2 + 2R_\oplus d \sin h\right)^{\frac{1}{2}} \approx 402889 \text{ km}. \quad (2)$$

Rezultat je več kot zadovoljiv, saj je bila prava oddaljenost Lune dne 4. 10. 2020 ob 23.19 od središča Zemlje 402307 km, kar je izjemno blizu našemu izračunu. Razlog za odstopanje bi lahko bila refrakcija, vendar ima tu verjetno večji vpliv nenatančnost pri fotografiranju (odsotnost stojala, za objektiv bi lahko uporabil teleskop) in obdelava posnetka.

Določevanje razdalje na točno določeni trenutek

Vrnimo se k prvotni nalogi. Ta je zahtevala, da izračunamo oddaljenost Lune na točno določen datum in uro, to je 6. 10. 2020 ob 12.00 UT. Že po teoretičnem razmisleku je stvar težko dosegljiva. Ob tej uri iz naših krajev Lune sploh ne bi mogli opazovati, spet druga težava pa je vreme v naših krajih in prav tako vreme v kraju, v katerem prebiva naš astronomski kolega (če se odločimo za metodo paralakse).

Torej moramo iz več opazovanj konstruirati Lunino orbito, iz katere lahko s spodnjo enačbo dobimo razdaljo v poljubnem trenutku:

- $$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}. \qquad (3)$$

Enačba podaja odvisnost razdalje od kota θ med zveznico perigej-Zemlja in zveznico Luna-Zemlja. Kot θ lahko prav tako dobimo iz Lunine faze. Ekscentričnost e pa dobimo iz ocene orbite, ki jo dobimo iz opazovanj. Veliko polos a pa poznamo, saj je konstanta.

Na tak način lahko predvidimo oddaljenost Lune 6. 10. 2020 ob 12.00 UT.

Naloge za bralce

- Iz podatkov, ki jih lahko najdeš v članku, izračunaj srednjo horizontsko paralakso Lune.
- Izračunaj, kako daleč je Soncu najbližja zvezda Proksima Kentavra, če je njena letna paralaksa $768{,}5 \pm 0{,}2$ mas. Rezultat podaj v svetlobnih letih z napako.
  Opomba. Oznaka mas pomeni mili ločna sekunda; torej tisočinka kotne sekunde.
- Eden od načinov, ki jih astronomi uporabljajo za merjenje oddaljenost Lune, je merjenje s pulzom laserske svetlobe, ki ga proti Luni pošljejo skozi teleskop. Svetloba se odbije od posebnih zrcal, ki so jih astronavti postavili na Luni, in se po odboju vrne v teleskop. Astronomi izmerijo čas med trenutkom, ko laserski pulz zapusti teleskop, in trenutkom, ko s teleskopom zaznajo vrnjeni pulz. Kolikšna je razdalja med teleskopom in zrcali na Luni, če so astronomi ugotovili, da je bil čas med oddajo pulza in sprejetjem odboja 2,5 sekunde? Za hitrost svetlobe vzemi vrednost 300 000 km/s. Kolikšna pa je razdalja med središčema Zemlje in Lune?
- Zgodila se je čarovnija! Luna se zmanjša v kroglo s polovico svoje prvotne prostornine. Na nebu opazimo, da je njen kotni premer prav tako prepolovil. Izračunaj, za koliko je čarovnija spremenila oddaljenost Lune od Zemlje.
- S fotoaparatom, opisanim v članku, in z Newtonovim reflektorskim teleskopom z goriščno razdaljo $f = 1000$ mm in premerom zrcala $D = 20$ cm smo fotografirali Mars dne 13. 10. 2020, ko je bil v opoziciji s Soncem. Izmerili smo, da njegov premer na posnetku 20 slikovnih točk. Na podlagi teh meritev izračunaj premer Marsa. Predpostavi, da Zemlja in Mars krožita okoli Sonca po krožnih orbitah. Vzemi, da polmer Marsove tirnice $d_M = 1{,}52$ a.e.
- Pokaži, da kosinusni izrek za sferični trikotnik preide v običajnega, ki ga poznamo iz gimnazijske trigonometrije, če upoštevamo, da so stranice trikotnika izrazito majhne. V skrajnem primeru velja zveza $\sin x = x$.
- *Izpelji *enačbo elipse v polarni obliki* (3) iz definicije elipse. Izpelji podobni enačbi še za parabolo in hiperbolo iz njunih definicij.

Literatura

[1] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1969.

[2] H. Karttunen in drugi, *Fundamental astronomy*, Springer, Berlin; New York, 2007.

× × ×