

Geometrijska konstrukcija elipse in hiperbole



BOŠTJAN KUZMAN

→ Stožnice običajno definiramo na enega od treh načinov: geometrijsko kot presečišče neskončnega dvojnega stožca z ravnino, algebraično kot množico rešitev splošne enačbe drugega reda, ali pa kot množico točk, ki ustrezajo nekemu geometrijskemu pogoju. V tokratnem GeoGebra inem kotičku si bomo ogledali, kako lahko s konstrukcijo lokusa, ki nastane pri gibanju točke po krožnici, dobimo tako elipso kot hiperbolo.

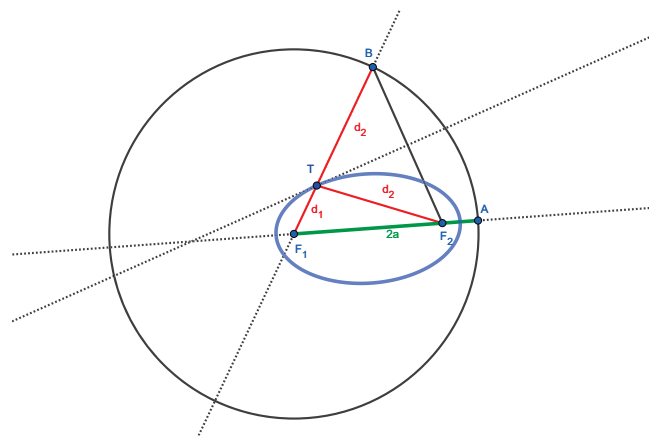
Posvetimo se najprej elipsi. Definiramo jo kot množico točk v ravnini, za katere je vsota razdalj točke od vnaprej izbranih gorišč F_1, F_2 enaka izbrani konstanti, ki jo označimo z $2a$:

$$E = \{T \in \mathbb{R}^2 : d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a\}.$$

Denimo torej, da sta gorišči F_1, F_2 dani točki v ravnini, vrednost $2a$ pa predstavlja polmer krožnice s središčem F_1 (Slika 1). Potem za poljubno točko B na krožnici simetrala daljice BF_2 seka premico skozi B in F_1 v neki točki T , ki je torej enako oddaljena od B in od F_2 . Bralec zdaj zlahka sam razmisli, da je vsota razdalj točke T od gorišč F_1 in F_2 enaka $2a$, ne glede na to, kje na krožnici leži točka B .

Zdaj je kot na dlani tudi ustrezna konstrukcija v GeoGebri:

- Na delovni površini skrijemo koordinatni sistem.
- Izberemo poljubni točki F_1 in F_2 , ki predstavljata gorišči elipse, in narišemo premico skozi ti dve točki.
- Na premici izberemo poljubno točko A tako, da ne leži med goriščema, in narišemo krožnico s središčem F_1 skozi točko A .
- Označimo lahko tudi polmer te krožnice, torej, daljico od F_1 do A , in jo obarvamo z drugo barvo.

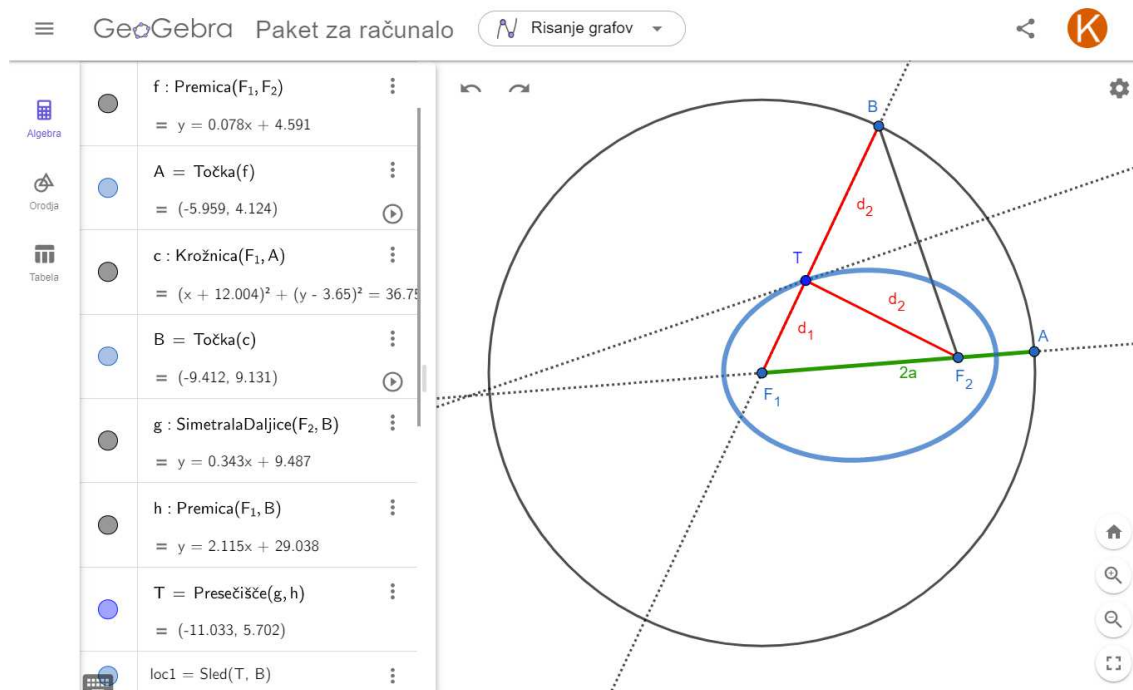


SLIKA 1.

Konstrukcija elipse s pomočjo gibanja točke B po krožnici s središčem v enem od gorišč.

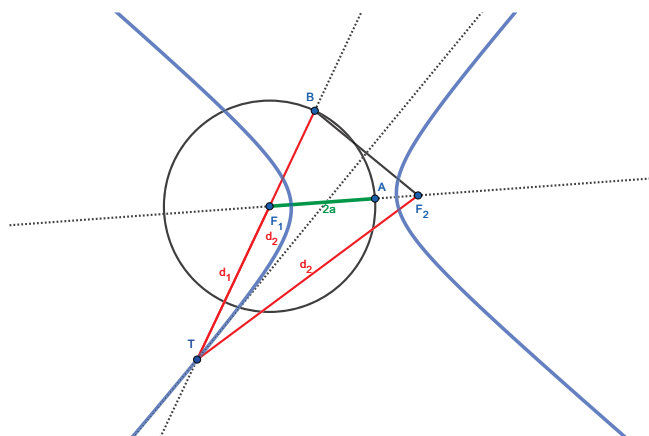
Njena dolžina predstavlja vrednost $2a$, ki jo lahko torej spreminjamo s premikanjem točke A .

- Zdaj izberemo neko drugo točko B na krožnici. Premikanje te točke bo ustvarilo iskano krivuljo.
- Narišemo premico skozi F_1 in B , ter simetralo daljice skozi F_2 in B . Presečišče teh dveh premic označimo s točko T . Risanje lahko skrajšamo, tako da narišemo le točko T z direktnim ukazom $T = \text{Presečišče}(\text{Premica}(F_1, B), \text{Simetrala}(F_2, B))$.
- Zdaj lahko premikamo točko B po krožnici in opazujemo gibanje točke T . Če vklopimo sled točke T in s točko B opišemo cel krog, bomo na sliki prepoznali elipso.
- Če želimo narisano sled zbrisati, najprej izključimo sled točke T , nato še zbrisemo že narisano sled točke s kombinacijo tipk $\text{CTRL} + F$.
- Z ukazom $\text{Sled}(T, B)$ se celotna sled točke vnaprej izriše kot krivulja. V tem primeru lahko opazujemo, kako se elipsa spreminja, če premikamo točki F_2 in A .



SLIKA 2.

Konstrukcijsko okno v GeoGebri.



SLIKA 3.

Če leži drugo gorišče zunaj krožnice, s povsem enako konstrukcijo dobimo hiperbolo.

Zdaj se lahko lotimo še konstrukcije hiperbole. Izkaže se, da zadošča le ena poteza, s katero spremenimo prejšnjo konstrukcijo: točko A, ki določa polmer krožnice, pomaknemo tako, da leži med F_1 in F_2 (torej, da eno od gorišč leži znotraj, drugo pa zunaj krožnice). Po definiciji je namreč hiperbola množica točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj točke od vnaprej izbranih gorišč F_1, F_2 enaka izbrani konstanti $2a$:

$$E = \{T \in \mathbb{R}^2 : |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}.$$

Bralci lahko s pomočjo Slike 3 zdaj sami premislijo, zakaj dolžina daljice F_1A predstavlja ravno razliko razdalj.

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/