Neenakosti med pitagorejskimi sredinami dveh števil

Šefket Arslanagić in Daniela Zubović (prevod in priredba Boštjan Kuzman)

Starogrški matematiki so poznali in geometrijsko opisali različne vrste sredine dveh števil, in sicer harmonično, geometrijsko, aritmetično in kvadratno. S pomočjo znanih neenakosti med temi sredinami lahko včasih dokažemo nekatere izreke ali pa uženemo različne probleme, ki jih pogosto srečujemo tudi v nalogah za srednješolce. V prispevku je predstavljenih nekaj zgledov z uporabo sredin za dve števili.

V sodobnem zapisu različne sredine dveh pozitivnih realnih števil x in y definiramo takole:

- *harmonična sredina* $H(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$,
- *geometrijska sredina* $G(x,y) = \sqrt{xy}$,
- *aritmetična sredina* $A(x,y) = \frac{x+y}{2}$,
- *kvadratna sredina* $K(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

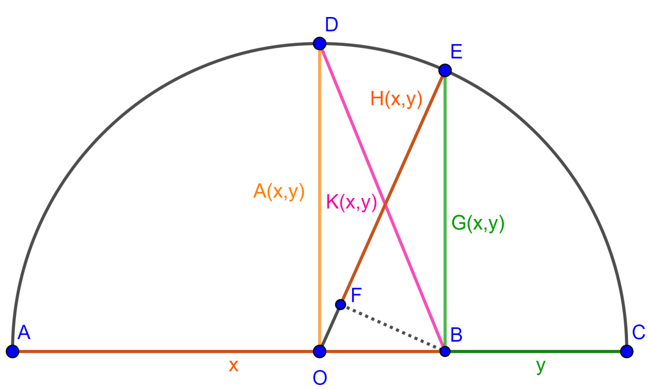
Če, denimo, velja $x = 1$ in $y = 3$, potem je harmonična sredina teh dveh števil enaka $H(1,3) = 3/2$, geometrijska sredina $G(1,3) = \sqrt{3}$, aritmetična sredina $A(1,3) = 2$ in kvadratna sredina $K(1,3) = \sqrt{5}$. Razvrstitev teh vrednosti po velikosti opisuje dobro znani klasični izrek.

Izrek. Za poljubni realni števili $x, y > 0$ velja

- $H(x,y) \leqslant G(x,y) \leqslant A(x,y) \leqslant K(x,y)$.

V neenakostih velja enačaj natanko tedaj, ko je $x = y$.

Dokaz. Veljavnost neenakosti lahko utemeljimo geometrijsko. Za dani vrednosti x, y najprej narišemo daljico AC dolžine $x + y$ in na njej označimo točko B, ki jo razdeli na dela dolžine x in y, ter točko O, ki predstavlja središče polkroga s premerom AC. Nato z D in E označimo preseka polkrožnice s pravokotnicama skozi O in B, s F pa presek daljice OE s pravokotnico skozi B. Očitno je aritmetična sredina $A(x,y)$ enaka dolžini daljice OD, z uporabo Pitagorovega izreka pa se hitro prepričamo, da je geometrijska sredina $G(x,y)$ enaka dolžini daljice BE, harmonična sredina $H(x,y)$ enaka dolžini daljice FE in kvadratna sredina $K(x,y)$ enaka dolžini daljice BD. Zdaj ni težko premisliti, da za štiri sredine res velja omenjena neenakost.



SLIKA 1.
Predstavitev štirih sredin z dolžinami daljic v polkrogu

V nadaljevanju si oglejmo nekaj nalog, v katerih bomo pri rešitvi uporabili zgornje neenakosti. Naloge je seveda mogoče rešiti tudi kako drugače.

Naloga 1. Dokaži neenakost $(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ za $a, b > 0$. Kdaj v izrazu velja enakost?

Rešitev. Neenakost prepišemo v $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. Zaradi neenakosti $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ za $x = a$ in $y = b$ velja $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, zaradi neenakosti $K(x,y) \geqslant A(x,y)$ za $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}$ pa velja $\sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. Produkt teh dveh neenakosti da iskano neenakost. V njej velja enačaj le tedaj, ko veljata obe posamični enakosti, torej le v primeru $a = b$.

Naloga 2. Dokaži neenakost $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} > \frac{2}{a}$ za $a > 1$.

Rešitev. Željeno neenakost dobimo s preureditvijo neenakosti $A(x,y) \geqslant H(x,y)$ za vrednosti $x = \frac{1}{a+1}$ in $y = \frac{1}{a-1}$. Enačaj v tem primeru ni mogoč, saj velja $\frac{1}{a+1} \neq \frac{1}{a-1}$.

Naloga 3. Dokaži neenakost $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \geqslant \frac{25}{2}$, če je $a, b > 0$ in $a + b = 1$. Kdaj velja enakost?

Rešitev. Naredili bomo dva koraka. Najprej v neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ vstavimo $x = a$, $y = b$, upoštevamo $a + b = 1$ in neenakost kvadriramo, da dobimo $\frac{1}{ab} \geqslant 4$. Nato v neenakost $K(x,y) \geqslant A(x,y)$ vstavimo $x = a + \frac{1}{a}$ in $y = b + \frac{1}{b}$ ter jo kvadriramo, da dobimo

- $$\frac{(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1+4}{2}\right)^2,$$

od koder sledi iskana neenakost. Enačaj velja le v primeru, ko je $a = b = 1/2$.

Naloga 4. Dokaži neenakost $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$ za $a, b, c > 0$.

Rešitev. Na dva načina bomo uporabili neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino. V neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ vstavimo $x = a^4$ in $y = b^4$, da dobimo $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$. Na podoben način dobimo še $a^4 + c^4 \geqslant 2a^2c^2$ ter $b^4 + c^4 \geqslant 2b^2c^2$. S seštevanjem vseh treh neenakosti dobimo novo neenakost

- $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Z vstavljanjem $x = a^2b^2$ in $y = b^2c^2$ v neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ sledi $a^2b^2 + b^2c^2 \geqslant 2ab^2c$. Po simetrični menjavi parametrov a, b, c dobimo še dve podobni neenakosti in po seštevanju sledi

- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c)$.

Iskano neenakost zdaj sestavimo iz obeh vmesnih neenakosti.

Naloga 5. Dokaži neenakost $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ za $a, b, c > 0$.

Rešitev. Neenakost med harmonično in geometrijsko sredino $H(x,y) \leqslant G(x,y)$ uporabimo trikrat za $x = 1$ in različne $y = \frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$. Po seštevanju in preoblikovanju dobimo neenakost $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant 2$. Enakost bi pomenila, da je $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = 1$, kar vodi v protislovje.

Zadnjo nalogo v celoti prepuščamo bralcu.

Naloga 6. Dokaži, da velja $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, kjer so a, b, c dolžine stranic nekega trikotnika.

× × ×