PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 6
Strani 331–333

Mitja Mastnak, prir. Darjo Felda:

VSOTA n-TIH POTENC PRVIH m ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, vsota števil.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/19/1101-Mastnak-Felda.pdf

VSOTA n–TIH POTENC PRVIH m ŠTEVIL

Predpostavimo, da za vsako naravno število n obstaja $n+1$ funkcij $f_k : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, tako da velja

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n = f_0(n)m^{n+1}+f_1(n)m^n+f_2(n)m^{n-1}+\cdots+f_n(n)m$$

za vsako naravno število m. Označimo z λ_k vrednosti, ki jih funkcije f_k dosežejo v n in s temi oznakami zapišimo vsoto n–tih potenc prvih m števil in vsoto n–tih potenc prvih $m+1$ števil:

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n = \lambda_0 m^{n+1}+\lambda_1 m^n+\lambda_2 m^{n-1}+\cdots+\lambda_n m$$

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(m+1)^n = \lambda_0(m+1)^{n+1}+\lambda_1(m+1)^n+\cdots+\lambda_n(m+1).$$

Odštejmo prvo enakost od druge: $(m+1)^n = \lambda_0\big((m+1)^{n+1}-m^{n+1}\big)+$ $+\lambda_1\big((m+1)^n-m^n\big)+\lambda_2\big((m+1)^{n-1}-m^{n-1}\big)+\cdots+\lambda_n\big((m+1)-m\big)$. Če upoštevamo, da je $(m+1)^k = 1+\binom{k}{1}m+\binom{k}{2}m^2+\cdots+\binom{k}{k-1}m^{k-1}+m^k$, kjer je $\binom{k}{l} = \dfrac{k!}{(k-l)!\,l!}$, lahko dobljeno enakost zapišemo

$$\lambda_0\Big(1+\binom{n+1}{1}m+\cdots+\binom{n+1}{n}m^n\Big)+\lambda_1\Big(1+\binom{n}{1}m+\cdots+$$

$$+\binom{n}{n-1}m^{n-1}\Big)+\cdots+\lambda_n-\Big(1+\binom{n}{1}m+\cdots+\binom{n}{n-1}m^{n-1}+m^n\Big)=0$$

ali

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)+m\Big(\binom{n+1}{1}\lambda_0+\binom{n}{1}\lambda_1+\cdots+\binom{2}{1}\lambda_{n-1}-\binom{n}{1}\Big)+$$

$$+\cdots+m^n\Big(\binom{n+1}{n}\lambda_0-1\Big)=0.$$

Konstante λ_k niso odvisne od m, zato je leva stran te enačbe pri vsakem naravnem n polinom (naravne) spremenljivke m. Ta bo identično enak nič, če bodo vsi koeficienti enaki nič:

$$\begin{aligned}
&\binom{n+1}{n}\lambda_0 - 1 = 0\\
&\binom{n+1}{n-1}\lambda_0 + \binom{n}{n-1}\lambda_1 - \binom{n}{n-1} = 0\\
&\vdots\\
&\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Izrazimo po vrsti iz vsake enačbe λ_k z najvišjim indeksom, ki v njej nastopa, in upoštevajmo, da je λ_k pomnožen z izrazom oblike $\binom{l+1}{l}$, ki je enak $l+1$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 =& \frac{1}{n+1}\\
\lambda_1 =& \frac{\binom{n}{n-1} - \binom{n+1}{n-1}\lambda_0}{n}\\
\lambda_2 =& \frac{\binom{n}{n-2} - \left(\binom{n+1}{n-2}\lambda_0 + \binom{n}{n-2}\lambda_1\right)}{n-1}\\
&\vdots\\
\lambda_n =& 1 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}).
\end{aligned}$$

Ta sistem lahko podamo tudi takole:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{n+1},\\
\lambda_k &= \frac{\binom{n}{n-k} - \left(\binom{n+1}{n-k}\lambda_0 + \binom{n}{n-k}\lambda_1 + \cdots + \binom{n-k+2}{n-k}\lambda_{k-1}\right)}{n-k+1} =\\
&= \frac{\binom{n}{n-k} - \sum\limits_{l=0}^{k-1}\binom{n+1-l}{n-k}\lambda_l}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Najprej izračunamo λ_1, ker poznamo λ_0, nato izračunamo λ_2, ..., vsak λ_k lahko izračunamo, ko poznamo vse pred njim. Če izraze oblike $\binom{p}{n-k}$ zamenjamo z $\dfrac{p!}{(p-n+k)!\,(n-k)!}$ ter števec in imenovalec pomnožimo z $(n-k)!$, dobimo še drugo obliko

$$\lambda_0 = \frac{1}{n+1}, \quad \lambda_k = \frac{\frac{n!}{k!} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(n+1-l)!}{(k+1-l)!}\lambda_l}{(n-k+1)!}.$$

Če so vsa sklepanja pravilna, velja torej formula $\sum_{r=1}^{m} r^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k m^{n+1-k}$, kjer so λ_k zgornje konstante.

O pravilnosti tega rezultata pa se lahko prav hitro prepričamo z indukcijo. Naj bo najprej $m = 1$. Tedaj nam formula pove

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

kar je res pri vsakem n glede na našo izbiro konstant λ_k.
Denimo, da formula velja pri nekem m (za vsak n):

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n = \lambda_0 m^{n+1}+\lambda_1 m^n+\lambda_2 m^{n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}m^2+\lambda_n m.$$

Oglejmo si $1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n+(m+1)^n$. Vsoto $1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n$ zamenjajmo z zgornjo desno stranjo, člen $(m+1)^n$ pa z izrazom

$$\lambda_0((m+1)^{n+1} - m^{n+1}) + \lambda_1((m+1)^n - m^n) + \cdots + \lambda_n((m+1) - m),$$

ki smo ga že srečali v tem sestavku. Tako imamo

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + m^n + (m+1)^n =$$

$$= \lambda_0(m+1)^{n+1} + \lambda_1(m+1)^n + \cdots + \lambda_{n-1}(m+1)^2 + \lambda_n(m+1),$$

kar potrjuje, da res velja zveza

$$\sum_{r=1}^{m} r^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k m^{n+1-k},$$

kjer je $\lambda_0 = \frac{1}{n+1}$ in $\lambda_k = \dfrac{\frac{n!}{k!} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(n+1-l)!}{(k+1-l)!}\lambda_l}{(n-k+1)!}$.

Mitja Mastnak, prir. *Darjo Felda*