

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 16 (1988/1989)

Številka 5

Strani 312-315

Marija Vencelj:

NEWTONOVA NALOGA

Ključne besede: matematika, naloge, Newton.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/16/947-Vencelj-Newton.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

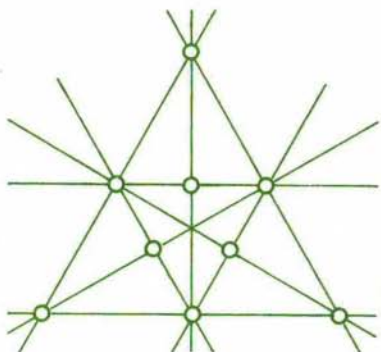
Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NEWTONOVA NALOGA

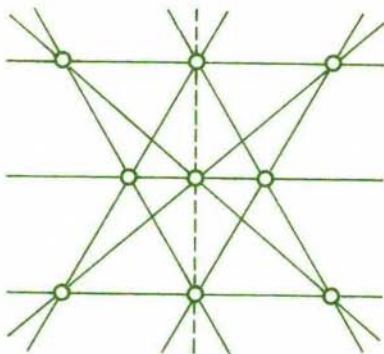
V letošnji 2. številki Preseka osnovnošolka Tina v pismih bralcev opozarja na napako v rezultatu 356. naloge matematičnega učbenika za šesti razred. Na vprašanje: kako naj zasadimo devet dreves vzdolž *devetih* premic tako, da bodo na vsaki premici natanko tri drevesa, ponuja knjiga rešitev z *desetimi* premicami.

V knjigi torej napaka res je, toda ne v rezultatu, ampak v vprašanju. Isaac Newton je namreč zastavil takole nalogo: *Kako naj zasadimo 9 dreves vzdolž desetih premic tako, da bodo na vsaki premici natanko tri drevesa*. Torej je bil na delu tiskarski škrat, ki je črko *s* spremenil v *v*. A kaj, ko se škratje odraslim (to pot avtorjem) tako radi skrijejo.

Ko se je že ponudila prilika, si obe nalogi malo pozorneje oglejmo. Lažja je tista z devetimi drevesi vzdolž devetih premic. Rešimo jo lahko na veliko zelo raznolikih načinov. Ena od rešitev je npr. Tinina (slika 1), drugo dobimo, če v rešitvi iz učbenika opustimo edino navpično premico (na sliki 2 je lega opuščene premice črtkana).



Slika 1

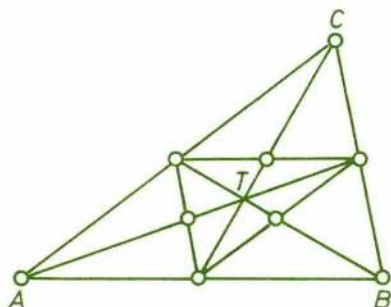


Slika 2

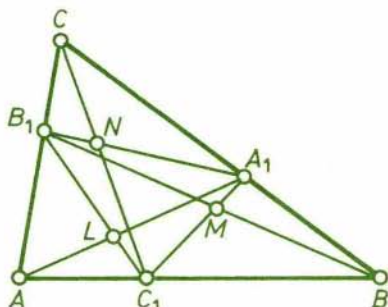
Rešitvi sta tipično različni. Na sliki 1 je poseben primer rešitve s slike 3, kjer je ABC poljuben trikotnik in T njegovo težišče. Zaradi preglednosti so namesto premic narisane le potrebne daljice. Pri tem ne spreglejmo, da težišče T ni "drevo" in da ni prav nič pomembno, da je tam ravno težišče. Enako dobro bi rešili nalogo, če bi imeli namesto težiščnic na primer višine in namesto težišča višinsko točko. Poleg tega pa sploh ni potrebno, da se premice, ki potekajo skozi oglišča in točke na nasprotnih straneh, sekajo v isti točki. Očitno to za rešitev naloge ni potreben pogoj.

ln že je tu splošna ideja: vzamemo poljuben trikotnik ABC , na vsaki od

njegovih stranic izberemo poljubno točko, različno od oglišč, recimo A_1, B_1, C_1 , ter narišemo figuro, kot na sliki 4. Kar malo preveč preprosto, kajne?



Slika 3

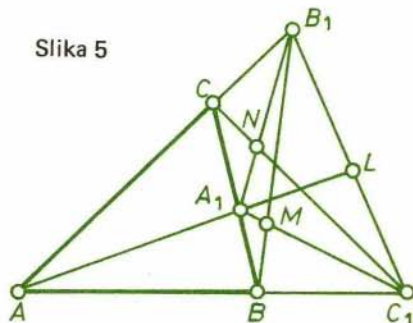


Slika 4

Točke A_1, B_1, C_1 si lahko izberemo tudi na podaljških trikotniških stranic, da le leže na njihovih nosilkah (slika 5).

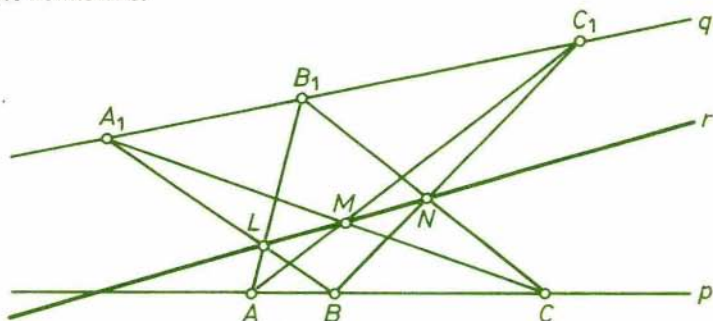
Poglejmo sedaj rešitev na sliki 2. Njeno posplošitev daje izrek, ki mu pravimo *Pappus – Pascalov izrek* in se glasi:

Slika 5



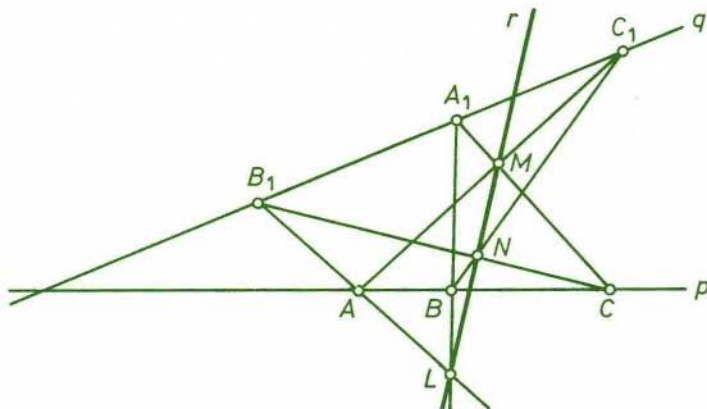
Naj bosta p in q poljubni različni premici v ravnini. Nadalje naj bodo A, B, C tri različne točke premice p in A_1, B_1, C_1 tri različne točke premice q (slika 6). Če je L presečišče premic $p(A, B_1)$ in $p(A_1, B)$, M presečišče premic $p(A, C_1)$ in $p(A_1, C)$ ter N presečišče premic $p(B, C_1)$ in $p(B_1, C)$, potem so točke L, M, N kolinearne.

Slika 6



Na sliki 6 smo njihovo nosilko označili z r . S slike je tudi razvidno, da smo dobili precej splošno rešitev naše naloge. Na sliki 2 je le njen poseben primer.

Pappus — Pascalov izrek velja tudi v primeru, če sta vrstna reda točk A, B, C na premici p in A_1, B_1, C_1 na premici q drugačna kot na sliki 6. Prav nič ni namreč pomembno, katera od danih treh točk na posamezni premici leži med drugima dvema. Tak drugačen primer je narisana na sliki 7.



Slika 7

Izreka ne bomo dokazovali. Lahko pa si za ilustracijo izreka in v njegovo potrditev sami narišete še nekaj primerov.

Poglejmo sedaj pravo *Newtonovo nalogo*: *razporediti devet točk na deset premic, natanko po tri na vsako*. Ena od rešitev je narisana v učbeniku za 6. razred na strani 190 (ali na naši sliki 2, če dodamo tudi navpično črtkano premico).

Naloga je težja od prejšnje in so jo najbrž avtorji učbenika zastavili bolj za razvedrilo, za "kviz", ker se pač da rešitev s strani 190 zaradi njene simetrije z malo sreče uganiti.

Poglejmo, kako lahko nalogo rešimo z uporabo Pappus — Pascalovega izreka. Izrek nam devet točk lepo razporeja na devet premic, po tri na vsako. Newtonova naloga bo rešena, če bodo tri od teh devetih točk ležale vse še na neki dodatni premici. Poglejmo sliko 6! Točka L že ima skupne premice z vsemi točkami, razen z C in C_1 , M z vsemi, razen z B in B_1 , ter N z vsemi, z izjemo A in A_1 . Če na enak način premislimo še za ostale točke, vidimo, da bo naloga rešena, če bo izpolnjen eden od naslednjih pogojev:

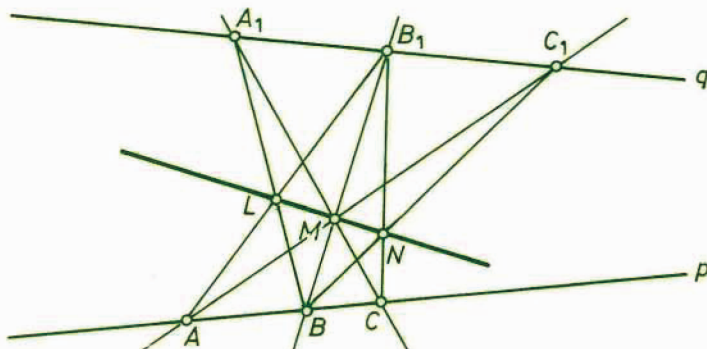
ali $L \in p(C, C_1)$

ali $M \in p(B, B_1)$

ali $N \in p(A, A_1)$

Tak pogoj pa še zlahka ustvarimo. Kako, pogledjmo kar ob konstrukciji rešitve!

V ravnini izberimo poljubni različni premici p in q in poljubno točko M , ki ne leži na nobeni od izbranih premic. Skozi M narišimo tri različne premice, od katerih naj vsaka seka tako p kot q . Označimo presečišča kot na sliki 8.



Slika 8

Nato za kolinearni trojico točk A, B, C in A_1, B_1, C_1 uporabimo Pappus – Pascalov izrek. Po konstrukciji je ena od presečnih točk, ki so po trditvi tega izreka kolinearne, kar naša na začetku izbrana točka M . Ostali dve označimo z L in N . Tako je Newtonova naloga rešena. Imamo deset premic, na katerih leži devet točk $A, B, C, A_1, B_1, C_1, L, M, N$, natanko po tri na vsaki premici.

Seveda bi namesto s točko M lahko konstrukcijo začeli tudi s točko L ali z N .

Marija Vencelj