Trikrat pakiramo

IVAN LISAC

→ Ste se že kdaj prepirali, kako zložiti prtljago v prtljažnik? Tokrat bomo poskusili rešiti nekaj nalog povezanih s pakiranjem.

Pakiranje kvadrov v kvader

Prevoznik Andrej prevaža tovor. Tovornjak ima prostor za tovor, ki meri 630 cm v dolžino, 170 cm v širino in 200 cm v višino. Tokrat prevaža škatle enake oblike, ki merijo 55 cm v dolžino, 45 cm v širino in 35 cm v višino. Kako naj Andrej naloži škatle v tovornjak tako, da bo šlo vanj čimveč škatel, pri čemer se omejimo samo na taka nalaganja, kjer so škatle zložene druga ob/na drugi tako, da vse enakoimenske dimenzije škatel gledajo v isto smer? Pri tem imajo prostor za tovor in škatle obliko kvadra.

Obstaja šest načinov takega pakiranja: prvo škatlo z merami d, s in v lahko namreč postavimo v vogal tovornega prostora z merami D, S in V tako, da je mera d vzporedna meri D, mera s vzporedna meri S, in mera v vzporedna meri V. Nadaljnje možnosti dobimo, če prvo škatlo obrnemo in s tem njene mere glede na ta vrstni red permutiramo. Možnosti so:

d, s, v	d, v, s	s, d, v
s, v, d	v, d, s	v, s, d

TABELA 1.
Šest načinov postavitve prve škatle

Kateri način je najboljši? Pri prvem načinu gre dolžina škatle d kar $\lfloor D : d \rfloor$-krat[1] v dolžino prostora D, širina škatle s gre $\lfloor S : s \rfloor$-krat v širino prostora S in višina škatle v gre $\lfloor V : v \rfloor$-krat v višino prostora V. Zmnožek teh treh dobljenih (navzdol zaokroženih) količnikov pa nam pove, koliko škatel gre na ta način v tovornjak. Pri vrtenju prve škatle in menjavi mer dobimo še druge take količnike in druge zmnožke.

Za dani primer sestavimo sedaj tabelico 2: v gornjo vrstico naštejmo mere tovornega prostora, v levi stolpec pa mere prvo postavljene škatle. Na križišču stolpca in vrstice pa naj bo količnik ustrezne mere prostora in ustrezne mere škatle.

	630	170	200
55	11	3	3
45	14	3	4
35	18	4	5

TABELA 2.
Tabelica količnikov mer

Količnike iz te tabelice jemljemo v zmnožek po vrsticah in stolpcih tako, da količniki niso iz iste vrstice niti iz istega stolpca. Tako dobimo šest zmnožkov v tabeli 3.

d, s, v	d, v, s	s, d, v
$11 \cdot 3 \cdot 5$	$11 \cdot 4 \cdot 4$	$14 \cdot 3 \cdot 5$
165	176	210
s, v, d	v, d, s	v, s, d
$14 \cdot 4 \cdot 3$	$18 \cdot 3 \cdot 4$	$18 \cdot 3 \cdot 3$
168	216	162

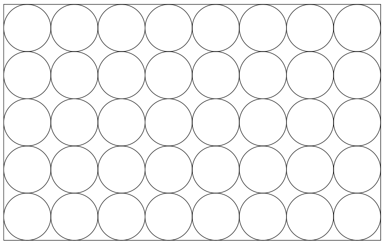
TABELA 3.
Šest načinov, šest zmnožkov

V danem primeru je torej najboljši peti način z 216 naloženimi škatlami. Dodajmo še to: pri vseh teh načinih ostane še nekaj praznega prostora, ki je morda še uporaben za doložitev kake škatle. Kako izkoristiti morebitni tak ostanek, tu ne bomo premišljali.

Pakiranje krogov v pravokotnik

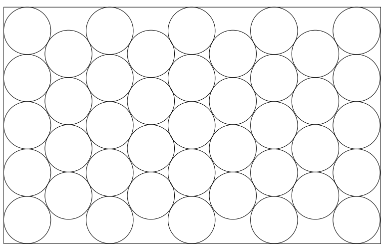
Tokrat ima prevoznik Andrej tovor plinskih jeklenk oblike krožnega valja. Naložil je že 40 jeklenk v osem vrst po pet v vrsto in tako zapolnil razpoložljivi prostor (slika 1 - tloris). Ima še eno jeklenko, ki bi jo rad dodal na tovornjak. →

[1] $\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$



SLIKA 1.
$8 \cdot 5 = 40$

Vendar kako? Po nekaj minutah se domisli. V prvi vrsti pusti pet jeklenk. Iz druge vrste eno umakne in ostale štiri porine nekoliko gor in levo v vmesni prostor. Podobno naredi še z vrstami od tretje do osme ter začuda pridobi prostor za deveto vrsto in skupaj 41 jeklenk (slika 2)!



SLIKA 2.
$8 \odot 5 = 41$

Tak način pridobivanja prostora poglejmo podrobno. Andrej je sprva postavil 40 jeklenk na *štirikotniški* način: vsaka notranja jeklenka se dotika štirih sosednjih. Zatem je poskusil povečati število sosed notranjih jeklenk in izkoristiti obstoječe vrzeli. Lihe vrste so ohranile po pet jeklenk, sodim je bila po ena odvzeta, soda vrsta pa je bila pomaknjena v medprostore prejšnje vrste. To je *šestkotniški* način. Večina notranjih jeklenk ima po šest sosed, vrzeli med tremi sosednjimi jeklenkami pa so se nekoliko zmanjšale: prej je tipična vrzel merila $(4-\pi)r^2 \doteq 0,858r^2$ (na sliki 1 jih je 28), potem pa le še $(\sqrt{3}-\pi:2)r^2 \doteq 0,161r^2$ (na sliki 2 jih je 56).

Uvedimo sedaj novo operacijo $\odot$ takole: zmnožek $v \cdot s$ je število krogov v štirikotniškem načinu nalaganja krogov v v vrst po s v vrsto, zmnožek $v \odot s$ pa naj bo število krogov v šestkotniškem načinu pri *enakem* prostoru kot pri prvem načinu. Zaradi lažje analize privzemimo še, da prvi način zapolni pravokotni prostor v celoti do vseh stranic pravokotnika.

Koliko pa je $v \odot s$? Najprej opazimo, da imajo v vsaki vrsti središča krogov enako koordinato: v prvi vrsti je to kar polmer kroga, v drugi vrsti je to polmer kroga in še premer kroga, pomnožen s $\sqrt{3}:2$, v tretji vrsti je to polmer kroga in še dva premera kroga, pomnožena s $\sqrt{3}:2$ itd. Denimo, da imamo v šestkotniškem načinu skupno v' vrstic, v_1 vrstic po s krogov in v_2 vrstic po $s-1$ krogov. Krogi naj imajo enotski premer. Potem mora veljati:

- $v \odot s = v_1 s + v_2(s-1), \quad v_1 + v_2 = v'$,
- $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(v'-1) + \dfrac{1}{2} \le v.$

Ta sistem enačb in neenačb ima rešitev

- $v' = \lfloor 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}(v-1) \rfloor$,
- $v_1 = \lfloor \dfrac{v'+1}{2} \rfloor, \ v_2 = \lfloor \dfrac{v'}{2} \rfloor.$

Definirajmo še: $v \odot 1 = 1 \odot v = v$.

Videli smo že, da je $8 \odot 5 = 41$. Bralec lahko preveri, da je $5 \odot 8 = 38$ (operacija $\odot$ torej ni komutativna). Zanima pa nas, kdaj je dobro jeklenke nalagati šestkotniško, kdaj pa ne. V tabeli 4 imamo prikazano razliko $v \odot s - v \cdot s$. Negativna števila kažejo prednost pri štirikotniškem načinu nalaganja, pozitivna kažejo prednost pri šestkotniškem načinu nalaganja. Tabela je usklajena s slikama 1 in 2, koordinatni vrstici sta zato izjemoma spodaj in levo.

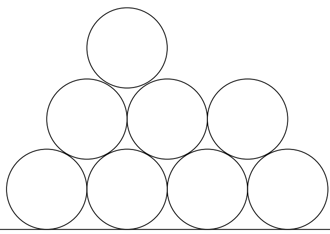
Iz tabele razberemo, da pri majhnih merah prostora bolje deluje prvi način, pri večjih merah pa bolje šestkotniški način. Primer $8 \odot 5$ je prvi, kjer pride do prevlade šestkotniškega načina. Še to: pokazali smo primer, kjer je šestkotniški način boljši, ni pa rečeno, da je *naj*boljši tudi v splošnem.

Pakiranje krogov vzdolž premice

Tokrat morajo gozdarji za d enako debelih okroglih debel pripraviti na tleh skladovnico. V njej bo v prvi vrsti k debel, v vsaki nadaljnji pa eno manj oziroma kolikor jih pač ostane v zadnji vrsti. Vsako deblo je bodisi na tleh bodisi med dvema spodnjima debloma. Skladovnica naj sprejme vseh d debel, vendar naj bo čim ožja, lahko pa je visoka. Primer skladovnice z $d = 8$ debli in $k = 4$ debli v prvi vrsti je na sliki 3.

9	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	5	4
8	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	4	3
7	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	3	2
6	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	2	1
5	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	1	0
4	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	0	−1
3	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	−1	−2
2	0	−1	−1	−2	−2	−3	−3	−2	−3
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s/v	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABELA 4.
$v \odot s - v \cdot s$



SLIKA 3.
$8 = 4 + 3 + 1$

Naš cilj bo za dani d izračunati ustrezni k, da bo mogoče skladovnico pravilno začeti s prvo vrsto s k debli. Najprej opazimo tole: če se d debel postavi v skladovnico tako, da je v zadnji vrsti eno samo deblo, je število debel d enako

- $d = k + (k-1) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2}.$

V takih primerih je d enak *trikotniškemu številu* T_k. Zaporedje trikotniških števil smo verjetno že srečali, gre pa takole:

- $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots.$

Vidimo, da T_k debel napolni skladovnico s prvo vrsto s k debli. Za splošni d pa iščemo tak k, da bo

- $T_{k-1} < d \leq T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}.$

Število k mora biti najmanjša naravna rešitev kvadratne neenačbe $k^2 + k - 2d \geq 0$, katere diskriminanta je $D = 1 + 8d$, pozitivna realna rešitev $(\sqrt{D} - 1) : 2$, naravna rešitev pa navzgor zaokrožena:[2]

- $k = \lceil(\sqrt{8d+1} - 1) : 2\rceil = \lceil\sqrt{2d + 1 : 4} - 1 : 2\rceil.$

Primer za $d = 30$: $D = 241$, $\sqrt{D} = 15,524\ldots$, $k = 8$ in $30 = 8 + 7 + 6 + 5 + 4$.

Naloge

1. Poišči čim večje število škatel za podane mere v spodnji tabelici:

	550	150	180
60			
55			
40			

2. Na šahovnico je mogoče postaviti 64 krogov s premerom, enakim robu enega polja. Koliko takih krogov dobimo s šestkotniško postavitvijo?

3. Gozdarji so posekali 50 debel. V kakšno skladovnico naj jih naložijo?

Rešitve

1. Tabelica je taka:

	550	150	180
60	9	2	3
55	10	2	3
40	13	3	4

   Največje število škatel je $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$.

2. Izračunamo $8 \odot 8 = 68$.

3. Za $d = 50$ izračunamo $D = 401$, $\sqrt{D} = 20{,}024$ in $k = 10$ ter $50 = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 1$.

× × ×

[2] $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$.