PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 4
Strani 203–207

Vilko Domajnko:

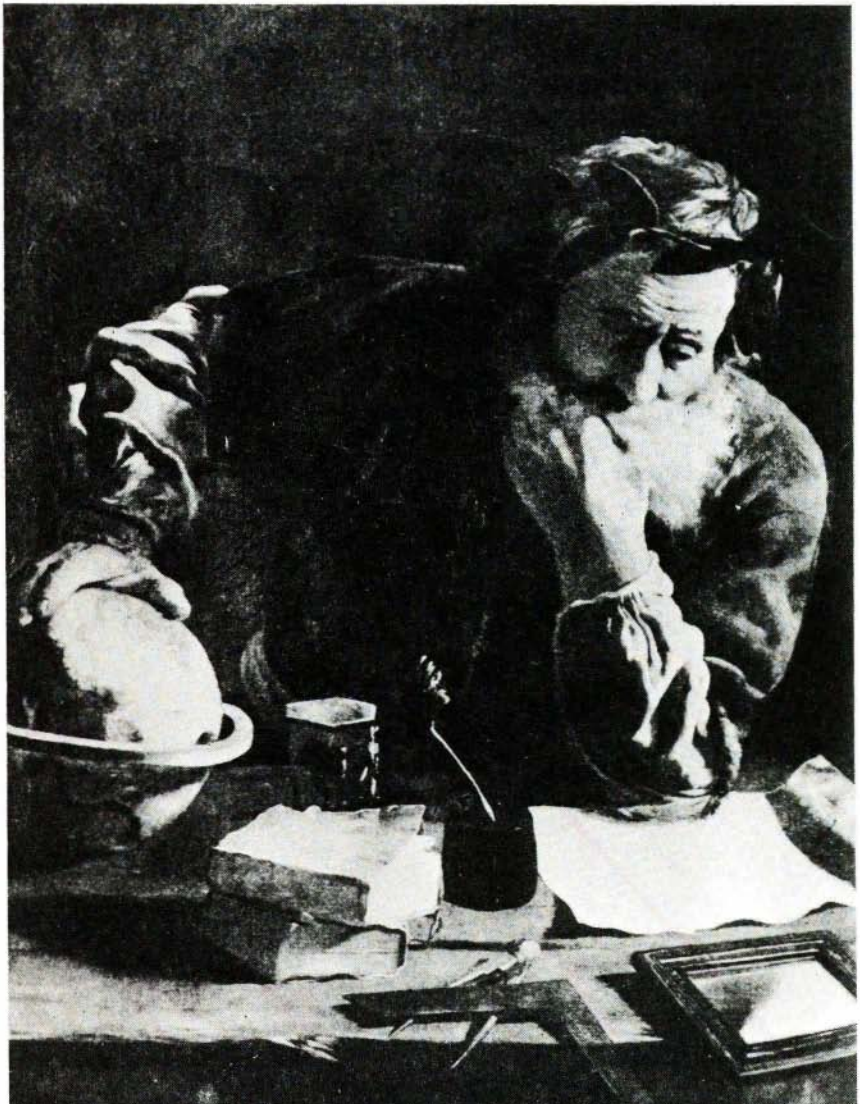
ARHIMEDOVA SPIRALA, 2. del

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/994-Domajnko-Arhimed.pdf

MATEMATIKA

ARHIMEDOVA SPIRALA, 2. del



Slika 7. D. Fettl, *Arhimed*, Umetnostna galerija, Dresden

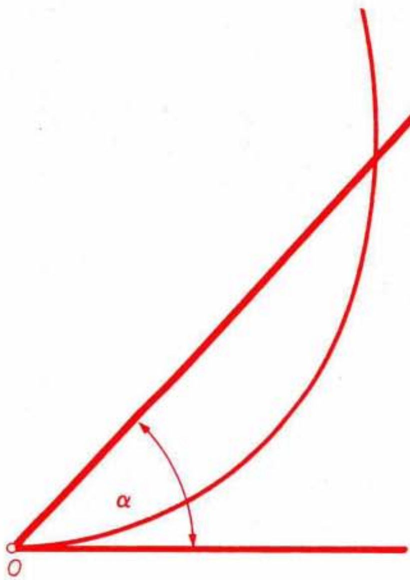
V prejšnjem članku o **Arhimedovi spirali** smo si, resnici na ljubo, krivuljo zgolj ogledovali. Dlje od prve, uvodne definicije v **Arhimedovi** knjigi *O spiralah* nismo prišli. Zato nas tokrat čaka preostanek knjige. Seveda pa bi ga bilo preveč za naenkrat – le kak drobec ali tri si privoščimo.

Bistrec **Arhimed** je prècej opazil, da je njegova **spirala** kakor nalašč za reševanje tistih prav najtežjih in najbolj žgočih starogrških problemov. Namreč z njeno pomočjo je uspel razrešiti problem trisekcije (tretinjenja) kota in kvadrature kroga; torej kar dva iz znamenite trojice "nerešljivih" problemov. Poglejmo, kako zlahka je ugnal s svojo **spiralo** problem trisekcije kota.

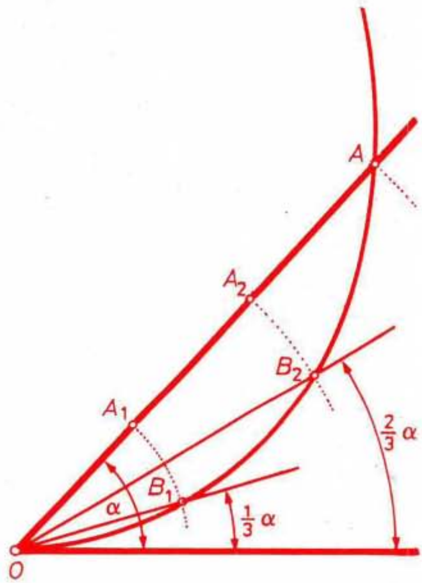
Naj bo dan kot α z vrhom v točki O. Narišimo katerokoli izmed **Arhimedovih spiral** $r = a.\varphi$ ($a \in \mathbb{R}^+$) (slika 8).

Spirala seka zgornji krak v točki A. Po definiciji **spirale** bo točka s krivulje trikrat bližje izhodišču O pri trikrat manjšem kotu, pri $\alpha/3$ torej. No, nič lažjega kot razdeliti daljico OA na tri enake dele! Tako dobim na daljici OA točki A_1 in A_2. Tretinski in dvotretinski oddaljenosti točke A od točke O poiščem le še ustrezni točki B_1 in B_2 na **spirali.** S šestilom, kakopak! In še enkrat se spomnimo – oddaljenosti $\overline{OA}/3$ pripada kot $\alpha/3$, oddaljenosti $2.\overline{OA}/3$ pripada kot $2\alpha/3$, oddaljenosti $\overline{OA}$ pa kot α.

Hura!



Slika 8



Slika 9

A nekaj je le treba pripomniti. Spretni **Arhimed** naloge vendarle ni opravil v duhu Platonovih in Evklidovih zahtev. Očitno je ignoriral zahtevo, da se sme pri geometrijskih konstrukcijah uporabljati le šestilo in (neumerjeno) ravnilo. **Arhimedova** konstrukcija **spirale** pa seveda zahteva umerjeno ravnilo.

Pa poglejmo še, kakšnih vse čudovitih domislic se **Arhimed** nikakor ni in ni mogel ubraniti, zroč v svojo mično krivuljo.

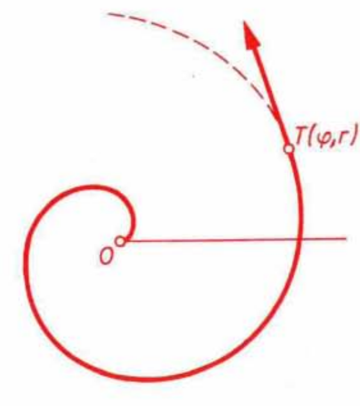
Takole se je vprašal: Na **spirali** si izberem točko T. Če gledam na **spiralo** kot na sled tiste točke, ki se giblje enakomerno po poltraku, medtem ko se ta vrti z enakomerno kotno hitrostjo okrog izhodišča, potem me mika zvedeti, kakšna je smer gibanja izbrane točke T v pripadajočem času t; oziroma v kateri smeri bi točka, ki se je doslej povsem ubogljivo gibala po **spirali** okrog izhodišča, odfrčala naprej po ravnini, če bi v tistem "usodnem" času t (na mestu izbrane točke T torej) nenadoma iz kakršnihkoli vzrokov zapustila spiralo (slika 10).

Predpostaviti seveda smemo, da je točka neskončno drobcena (čisto po **Evklidovem**) in že kar nemasni delec, brez teže torej, ter da bi potemtakem odfrčala kar po ravni črti naprej svojo pot.

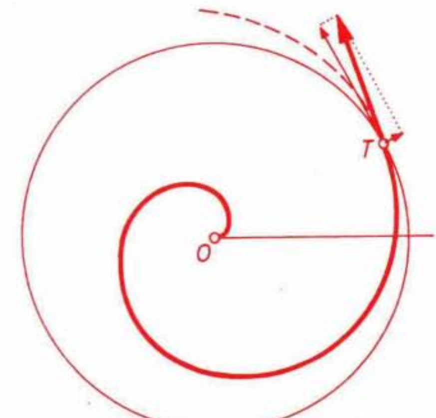
Arhimed je sklepal takole:

V tistem odločilnem trenutku t je točki (označeni s T) podeljeno dvoje hitrosti – konstantna hitrost, ki kaže v "smeri" od točke O do točke T, in pa kotna hitrost, ki ima "smer" tangente na krožnico, pritrjene v točki T.

Velikosti obeh hitrosti sta seveda dani kot začetna podatka pri risanju **spirale.** Potemtakem ju lahko zarišemo na obeh omenjenih poltrakih z izhodiščem v točki T. Hitrost točke, ki v času t v točki T postane "prosta" in ne-



Slika 10



Slika 11

odvisna od dotedanjega gibanja po krivulji, je (vektorski) seštevek obeh (vektorskih) hitrostnih komponent, ki se ga da prav zlahka odčitati na risbi. Smer gibanja točke je smer premice, ki je določena z vsoto obeh komponent hitrosti.

Dvoje je sedaj treba dodati.

Prvič. **Arhimed** takrat zagotovo še ni poznal vektorjev, kakor jih poznamo danes, torej tudi vektorske vsote ne. Danes pa je ob pomoči vektorjev naloga seveda smešno lahka za slehernega srednješolca.

In drugič. Očitno je tista premica, ki mi kaže nadaljno pot točke T, kar tangenta na **Arhimedovo spiralo** v izbrani točki T.

In reči je treba, da je bil **Arhimed** prvi v zgodovini, ki se je ukvarjal s problemom, kako poiskati tangento na krivuljo (ki ni ravno pretirano enostavne oblike) v njeni poljubni točki. No, še več – očitno je, da ga je celo uspešno rešil.

Pa še z eno izmed precejšnjega števila lepih lastnosti te krivulje se pobliže seznanimo.

Naj bo P_1 ploščina območja, ki ga **Arhimedova spirala** oklepa s polarno osjo pri svojem prvem zasuku za polni kot, P_2 ploščina območja, ki ga spirala skupaj s polarno osjo zagrajuje med prvim in drugim zasukom, $P_3, P_4, P_5, \ldots$ pa so nasledniki te zgodbe.

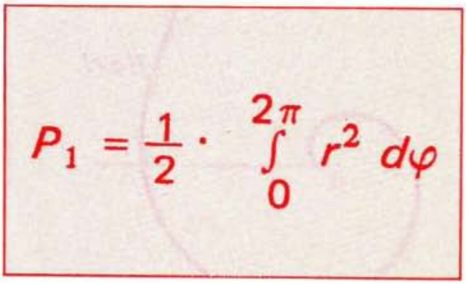
Arhimed je ugotovil tole:

1. Ploščina P_1 je enaka tretini ploščine prvega kroga, to je tistega, ki ima za svoj polmer oddaljenost točke po koncu "prvega obhoda" po spirali.
2. Zaporedje ploščin P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) se razvrsti po naslednjem pravilu

$$P_1, 6P_1, \tfrac{2}{1}P_2, \tfrac{3}{2}P_3, \tfrac{4}{3}P_4, \ldots$$

$$\ldots, \frac{n}{n-1}P_n, \ldots$$

Dokaz prve trditve je v originalni **Arhimedovi** obliki za bralca precej zahteven. Toda danes, ko poznamo integralski račun, ga z lahkoto opravi vsak študent, ki je le količkaj pazljiv pri predavanjih višješolske matematike. Namreč



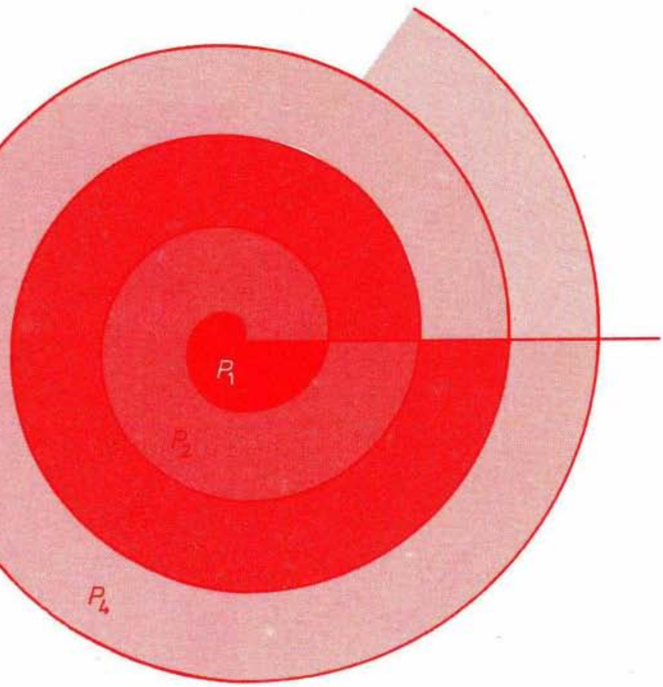
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi$$

Slika 12

Podobno težaško branje bi bralec srečal tudi v dokazu druge **Arhimedove** trditve. **Arhimed** je namreč tudi tukaj pokazal prav izjemno mero znanja in spretnosti pri dokazovanju izrekov, ki v okviru današnjega znanja o matematiki sodijo že v področje integralskega računa. Nam ostane pač le to, da vsaj poskušamo v zapisu vrste ploščin

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$$

opaziti enako mero lepote kakor v lepi risbici pod njo.



Slika 13

Vilko Domajnko