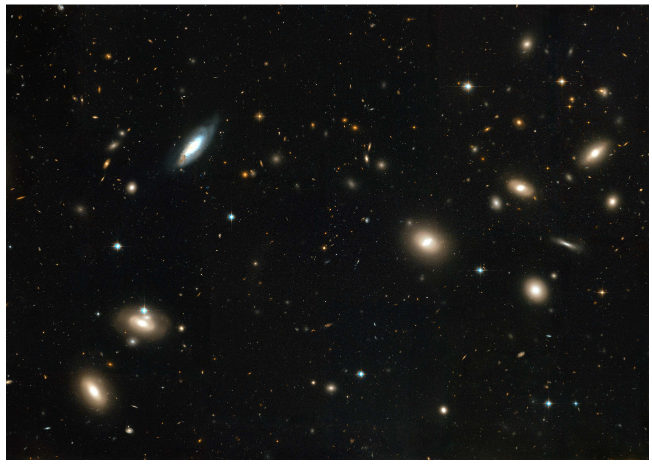
Virialni teorem

Krištof Skok

Virialni teorem je pomembna fizikalna enačba, ki povezuje kinetično in potencialno energijo sistema delcev v stacionarnem stanju. Leta 1870 ga je prvi formuliral nemški fizik in matematik Rudolf Clausius, ki je bil eden od utemeljiteljev termodinamike. Kasneje so ga nadgradili mnogi fiziki in astronomi ter uporabili v raznih področjih fizike. Viralni teorem je zelo uporaben v astrofiziki, saj je močno orodje, s katerim iz opazovanj dinamike delov sistema izračunamo ključne lastnosti sistema; pogosto je to njegova masa. Pri tem je govora o zvezdnih kopicah, ki so gravitacijsko vezane skupine zvezd; o galaksijah, pri katerih iz gibanja zvezd izračunamo t. i. virialno maso; o jatah galaksij, ki so gravitacijsko vezane skupine galaksij, in še o kakšnih drugih, ki bodo podrobneje opisani v članku. Najprej se bomo podali v izpeljavo teorema in si nato ogledali, kako je teorem opozoril na obstoj temne snovi.



SLIKA 1.
Slika Jate v Berenikinih kodrih posneta s kamero Advanced camera for surveys na vesoljskem teleskopu Hubble. Vidno polje je veliko $9{,}01 \times 6{,}40$ ločnih minut in zajema le središčni del jate. Sicer se jata na nebu razprostira na območju, večjem od dveh stopinj, foto: NASA, ESA, Hubble Heritage Team (STScI/AURA).

Izpeljava

Zamislimo si, da imamo sistem več delcev, tj. točkastih teles. Recimo, da kot Mali princ plujemo po praznem vesolju, ko iz žepa zagrabimo pest N frnikol in jih posujemo po prostoru. Gibanje naših frnikol opišemo v inercialnem sistemu. Položaje matematično zapišemo z radij vektorji $\mathbf{r}$, torej vektorji, ki kažejo od koordinatnega izhodišča do delcev. Hitrost je po definiciji časovni odvod položaja $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$, gibalna količina pa $\mathbf{p} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$.

Začnimo z definiranjem količine Q:

$$Q \equiv \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i, \tag{1}$$

pri čemer sta $\mathbf{p}_i$ gibalna količina in $\mathbf{r}_i$ radij vektor delca i. Vsota teče po vseh delcih sistema. Na dolgo bi vrsto zapisali kot $\sum_{i=1}^{N}$, a v literaturi je navada, če gre vsota po vseh možnih vrednostih, ki jih sumacijski indeks i lahko zavzema (tukaj od 1 do N), potem samo napišemo $\sum_i$. Časovni odvod količine Q je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \right). \quad (2)$$

Enačbo (1) lahko zapišemo še drugače. Namesto gibalne količine i-tega delca vstavimo njeno definicijo $m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t}$ ter namesto $\mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t}$ zapišemo $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r_i^2\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i r_i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}. \quad (3)$$

Na koncu prepoznamo izraz za vztrajnostni moment i-tega delca, vsota po vseh delcih pa da celotni vztrajnostni moment sistema: $I = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2$. Enačimo oba izraza za časovni odvod ((2) in (3)) in dobimo

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i. \quad (4)$$

Drugi člen na levi strani lahko še nadalje izračunamo:

$$-\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = -2\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = -2K.$$

Na koncu prepoznamo izraz za kinetično energijo i-tega delca, vsota po vseh delcih pa nam da skupno kinetično energijo sistema K. Ko ta rezultat vnesemo v enačbo (4) in upoštevamo drugi Newtonov zakon $\mathbf{F}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$, pridemo do izraza

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - 2K = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (5)$$

Na desni strani enačbe imamo količino, ki se imenuje *Clausiusov virial* ali na kratko le *virial*. Sila, ki deluje na delec, izvira iz ostalih delcev v sistemu. To zapišemo kot $\mathbf{F}_i = \sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij}$. $\mathbf{F}_i$ je skupna sila, ki deluje na delec i, $\mathbf{F}_{ij}$ pa je sila, s katero deluje delec j na delec i. Vsota teče po vseh delcih j, seveda z izjemo delca i, saj ta ne deluje s silo sam nase. Uporabimo še en trik $\mathbf{r}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right)$ in zapišimo virial malo drugače

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \mathbf{r}_i =$$
$$\frac{1}{2}\sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2}\sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Po tretjem Newtonovem zakonu velja $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Zamislimo si, da dvojno vrsto v prvem členu zadnjega izraza na dolgo razpišemo. Ko prva vrsta po i pride do delca k in druga vrsta po j pride do delca l, bo ta člen vrste $\frac{1}{2}\mathbf{F}_{kl}\left(\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_l\right)$. V nekem drugem členu te vrste pa imamo obratno, $i = l$ in $j = k$. Ta člen je $\frac{1}{2}\mathbf{F}_{lk}\left(\mathbf{r}_l + \mathbf{r}_k\right)$. Ker sta si sili po tretjem Newtonovem zakonu ravno nasprotni, se ta dva člena odštejeta. To sklepanje velja za vsak par delcev, zatorej je celotna vrsta enaka nič. Tako lahko virial zapišemo kot

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \cdot \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right). \quad (6)$$

Tipično v astrofiziki delca med sabo interagirajo preko gravitacijske sile. Njena definicija kot vektorska količina je

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}}, \quad (7)$$

pri čemer je $r_{ij} = \left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|$ razdalja med delcema i in j. Izraz za gravitacijsko silo (7) vnesemo v izraz za virial (6) in računamo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq l} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (8)$$

V zadnjem izrazu smo dobili izraz za gravitacijsko potencialno energijo med delcema

$$U_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Seveda velja $U_{ij} = U_{ji}$, to je ena in ista količina. Podobno kot smo imeli prej, imamo v vrsti v zadnjem izrazu (8) pri enem členu $i = k, j = l$ ter pri nekem drugem členu $i = l, j = k$. Zato se nam v vrsti dvakrat pojavi potencialna energija para delcev k in l in je vsota vrste enaka dvakratniku celotne gravitacijske potencialne energije sistema U. Končno lahko izračunamo virial:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} U_{ij} = U. \tag{9}$$

Vrnimo se k naši prvotni izpeljavi. V izrazu (5) virial nadomestimo s potencialno energijo sistema:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - 2K = U. \tag{10}$$

Naslednji korak je, da zapišemo časovno povprečje te enačbe. Povprečje matematične funkcije izračunamo po istem kopitu kot povprečje diskretnih količin, npr. meritev. Seštejemo vse meritve in delimo s številom meritev. Ker je funkcija zvezna, namesto, da seštevamo, integriramo ter namesto, da delimo s številom sumandov, delimo z velikostjo integracijskega intervala. Matematično definiramo kot

$$\langle f \rangle = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Časovno povprečje pa samo pomeni, da funkcijo časa integriramo po časovnem intervalu. Ravno to naredimo na enačbi (10)

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} \right\rangle - 2\langle K \rangle = \langle U \rangle.$$

Povprečje drugega odvoda vztrajnostnega momenta lahko izračunamo:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} dt = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\bigg|_\tau - \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 \right). \tag{11}$$

Če je sistem periodičen, kot na primer dvojne zvezde, lahko za τ določimo periodo sistema in se člena zadnjega izraza odštejeta. Če pa to ne velja, pa povprečje vseeno pade na nič, če le dovolj dolgo povprečimo, torej $\tau \to \infty$. To velja za sisteme, ki so že dosegli statistično ravnovesje, oz. rečemo, da so virializirani. V takem primeru je odvod $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ omejen med največjo in najmanjšo vrednostjo, razlika v oklepaju v (11) je končna količina, faktor $\frac{1}{\tau}$ pa gre proti nič, ko gre τ proti neskončnosti. Sedaj, ko imamo $\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} \right\rangle = 0$, smo končno prispeli do virialnega teorema

$$2\langle K \rangle + \langle U \rangle. = 0 \tag{12}$$

Celotna mehanska energija je $E = K + U$, zato velja še

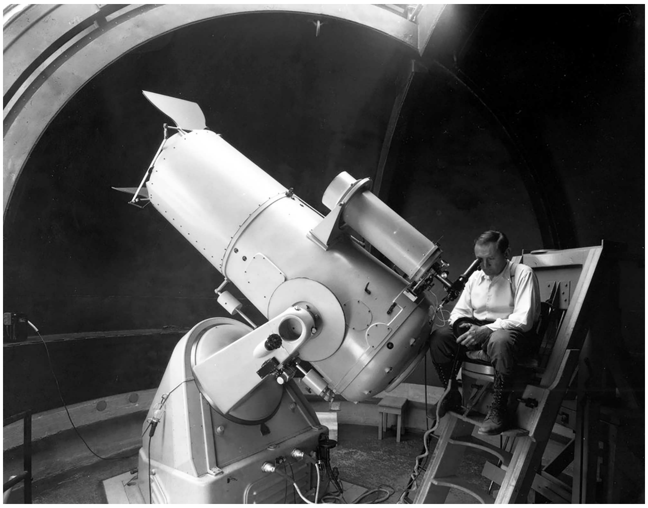
$$\langle E \rangle = -\langle K \rangle,$$
$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}\langle U \rangle.$$

Potencialna energija satelita v krožni Zemljini orbiti je $U = -\frac{GMm}{r}$, pri čemer je M masa Zemlje, m masa satelita in r polmer kroženja. Ker je njegova krožilna hitrost $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, je kinetična energija $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}$. Tako res velja $U = -2K$. Mehanska energija satelita je $E = U + K = -\frac{GMm}{2r}$, tako da velja tudi $E = -K = \frac{1}{2}U$.

Pomen in primer uporabe

Fritz Zwicky je bil švicarski astronom, ki je večino življenja deloval na California Institute of Technology ter bil del osebja na observatorijih Mount Wilson in Palomar. V času med in po drugi svetovni vojni se je ukvarjal z raketnim pogonom. Znan je po mnogih stvareh; ena od teh je, da je skupaj z Walterjem Badom skoval termin supernova. Te je zavzeto iskal na nočnem nebu s primerjanjem fotografksih plošč na oko; v življenju jih je odkril kar 120. Je tudi oče termina nevtronska zvezda. Leta 1937 je objavil članek, dolg pol strani, v katerem je predlagal, da bi kot posledica takrat še sveže Einsteinove splošne teorije relativnosti galaksije delovale kot gravitacijske leče. To bi dalo novo preizkušnjo za novo teorijo gravitacije ter omogočilo opazovanja sicer pretemnih, zelo oddaljenih objektov. Nenazadnje bi to bil način meritve mase galaksije, ki deluje kot leča. Tako bi lahko razjasnili neujemanje njegovega predhodnega odkritja, ki se tiče našega virialnega teorema.

Leta 1933 je Zwicky objavil članek, v katerem je komentiral takratno novo tehniko določevanja razdalj do izvengalaktičnih meglic (kot so takrat rekli galaksijam) preko rdečega premika in možne teoretične kozmološke razlage tega pojava. Eno poglavje članka nosi naslov Komentarji o disperziji hitrosti v Jati v Berenikinih kodrih. V njem najprej omeni opazovane razlike v hitrosti galaksij od 1500 do 2000



SLIKA 2.
Fritz Zwicky, foto: Caltech, Palomar Observatory.

km/s. Če je sistem Jate v Berenikinih kodrih (ang. Coma cluster) v mehaničnem stacionarnem stanju, potem zanjo velja virialni teorem (12). Privzemimo, da je masa porazdeljena enakomerno po Jati, da poenostavimo oceno. Jata ima približen polmer R en milijon svetlobnih let in vsebuje 800 galaksij, vsaka z maso 10^9 mas Sonca. Tako imamo maso

- $M \approx 800 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} = 1{,}6 \cdot 10^{42}\ \mathrm{kg}$.

Potencialna energija gravitacijsko vezane homogene krogle je

- $U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$.

Specifična potencialna energija Jate, torej potencialna energija na maso, je

- $\epsilon_p = \frac{U}{M} \approx -64 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}$.

Specifična kinetična energija je potemtakem

- $\epsilon_k = -\frac{\epsilon_p}{2} = 32 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}$.

Če to enačimo z $\frac{\bar{v}^2}{2}$, je povprečna hitrost $\bar{v} = 80\frac{km}{s}$. V enem od prejšnjih poglavij izvornega članka je zapisana opazovana povprečna hitrost galaksij te jate, ki je 7500 km/s, kar je mnogo več, kot smo naračunali. Kot pravi Zwicky po zadnjemu rezultatu: »Da bi pridobili, kot opazovano, zmeren Dopplerjev efekt 1000 km/s ali več, bi morala povprečna gostota Jate v Berenikinih kodrih biti vsaj 400-krat večja kot izračunana na podlagi opazovanj svetle snovi /.../. Če bo to potrjeno, bo vodilo do presenetljivega rezultata, da je gostota temne snovi mnogo večja od gostote svetle snovi.«

Ta Zwickyjev članek je prelomen v zgodovini raziskovanja vesolja, kajti je eno od pionirskih del, kjer so astronomi prišli na sled obstoju temne snovi. Avtor je podal močan argument za njen obstoj kot rešitev neujemanja rezultatov novih opazovanj. Dolgo časa so zamisel obravnavali kot le eno izmed možnosti za razlago uganke; široko sprejeta je postala šele v 70-ih in 80-ih letih z odkritji ravnih rotacijskih krivulj galaksij.

Predstavljen izračun, ki sledi originalnemu članku, naj služi kot primer pomembnosti virialnega teorema v astrofiziki. Več ostalih računskih primerov pa si lahko obetate v prihodnjih številkah Preseka.

Literatura

[1] B. W. Carroll in D. A. Ostlie, *Introduction to modern stellar astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996.

[2] *Palomar Skies* dostopno na `palomarskies.blogspot.com/2008/02/happy-birthday-fritz-zwicky.html`, ogled 24. 12. 2020.

[3] *Wikipedia contributors*, »Fritz Zwicky«, Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostopno na `en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fritz_Zwicky&oldid=980194858`, ogled 23. 12. 2020.

[4] *Angleški prevod originalnega članka*, dostopno na `ned.ipac.caltech.edu/level5/March17/Zwicky/frames.html`, ogled 23. 12. 2020.

× × ×