PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 5
Strani 280–285

Marija Vencelj:

DELITEV PROSTORA Z n RAVNINAMI IN n OBLAMI

Ključne besede: matematika, geometrija, prostorska predstavljivost.

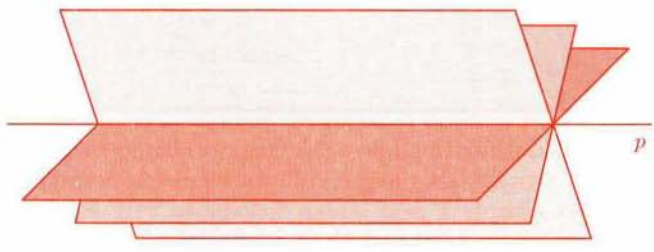
Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1452-Vencelj.pdf

DELITEV PROSTORA Z n RAVNINAMI IN Z n OBLAMI – Odgovor na vprašanji s str. 194 in 195

V prejšnji številki Preseka smo vam zastavili dve sorodni nalogi. V prvi smo spraševali, na koliko delov razdeli prostor n ravnin v splošni legi, druga je zahtevala odgovor na podobno vprašanje, le da ravnine v njem zamenjamo z oblami. Ker bomo tudi rešitvi nalog iskali po sličnih poteh, si ju oglejmo kar v skupnem prispevku.

Delitev prostora z n ravninami v splošni legi

V nalogi smo postavili zahtevo, da imajo poljubne tri ravnine, s katerimi razdelimo prostor, neprazen presek, poljubne štiri pa so brez skupne točke. To pravzaprav pomeni, da imajo poljubne tri ravnine skupno natanko eno točko. Primer medsebojne lege treh ravnin, kakršnega kaže slika 1, namreč ne more nastopiti. Presek poljubne četrte ravnine in dveh od narisanih treh ravnin bi vseboval točko presečne premice p. Ta točka pa bi bila, v nasprotju z našo zahtevo, skupna točka štirih ravnin.



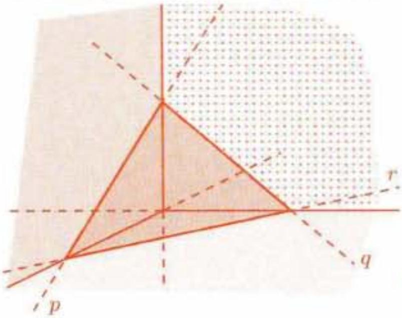
Slika 1.

Je pa navedeni pogoj bistven za enolično rešitev naloge. To lahko uvidimo že na primeru treh ravnin. V primeru s slike 1 je razpadel prostor na šest delov, tri vzporedne ravnine ga razdele na štiri dele. Koordinatne ravnine pravokotnega koordinatnega sistema, na primer, ki imajo skupno natanko eno točko (koordinatno izhodišče), pa razdelijo prostor na osem delov (oktantov).

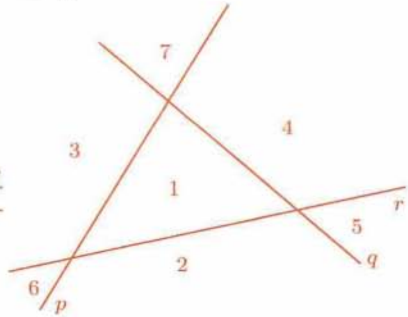
Da bi se splošne naloge lotili z direktnim preštevanjem dobljenih delov prostora, ne pride v poštev, saj bi z večanjem števila ravnin kaj kmalu zašli v brezupno nepregledni položaj. Za nekaj začetnih n pa to le napravimo!

- Ena ravnina razdeli prostor na dva dela.
- Dve sekajoči se ravnini razdelita prostor na štiri dele.

- Tri ravnine, z natanko eno skupno točko, razbijejo prostor na osem delov, kot v primeru koordinatnih ravnin. Na število delov očitno ne vplivajo velikosti kotov, ki jih ravnine oklepajo, da le niso med seboj vzporedne.
- Za $n = 4$ si bomo pomagali s slikama 2a in 2b. Slika 2a prikazuje tipičen primer štirih ravnin v splošni legi.



Slika 2a.



Slika 2b.

Naj bodo prve tri ravnine v našem razmišljanju tiste, ki se na sliki paroma pravokotno sekajo (čeprav taka izbira ni bistvena). Te ravnine sekajo četrto ravnino vzdolž treh paroma se sekajočih premic p, q, r, ki so brez skupne točke (zaradi splošne lege ravnin). Premice p, q in r razdelijo četrto ravnino na sedem kosov (slika 2b). Vsak od teh kosov leži ves v natanko enem od delov, na katere delijo prostor prve tri ravnine, in deli ta del na dva nova dela. Ker ustvarjajo prve tri ravnine v prostoru osem delov, od katerih jih četrta ravnina sedem deli na dva nova dela, je skupno število delov prostora pri razbitju s štirimi ravninami enako $N(4) = 8 + 7 = 15$.

Način premišljanja, s katerim smo ugnali nalogo za $n = 4$, pravzaprav ni več navadno preštevanje. Idejo, ki jo vsebuje, bomo uspešno uporabili tudi v splošnem primeru.

— — —

Splošno rešitev bomo poiskali v treh zaporednih korakih.

1. korak

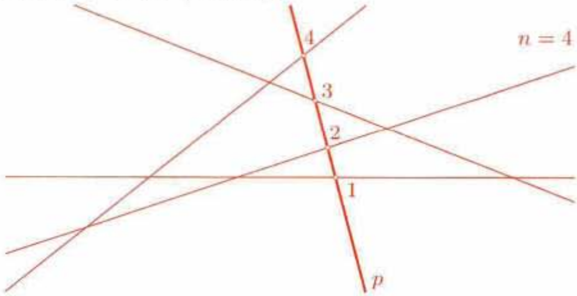
Označimo z $N_1(n)$ število delov, na katere razbije premico n različnih točk te premice. Očitno je $N_1(n) = n + 1$.

2. korak

Naj bo $N_2(n)$ število parcel, na katere razbije ravnino n njenih premic, ki so med seboj v splošni legi (t.j. premice se paroma sekajo, poljubne tri pa so brez skupne točke). Kolikšen je $N_2(n)$?

a) Ena premica razdeli ravnino na dva dela, torej je $N_2(1) = 2$.

b) Denimo, da že poznamo število $N_2(n)$, in opazujmo množico $n+1$ premic iste ravnine v splošni legi. Prvih n premic deli ravnino na $N_2(n)$ parcel; $(n+1)$-ta premica, imenujmo jo p, seka prvih n premic v n različnih točkah. Po rezultatu prvega koraka razdelijo te točke premico p na $N_1(n) = n+1$ delov, katerih vsak deli po eno od prej dobljenih ravninskih parcel na dvoje (slika 3).



Slika 3.

S tem, da smo n premicam dodali še eno, smo torej število $N_2(n)$ povečali za $N_1(n)$ delov. Torej velja

$$N_2(n+1) = N_2(n) + N_1(n) = N_2(n) + (n+1)\,.$$

Nadomestimo n zapored z $n-1$, $n-2$, …, 2 in 1:

$$\begin{aligned} N_2(n) &= N_2(n-1) + n \\ N_2(n-1) &= N_2(n-2) + (n-1) \\ &\vdots \\ N_2(3) &= N_2(2) + 3 \\ N_2(2) &= N_2(1) + 2 \end{aligned}$$

Če zgornje enačbe seštejemo in upoštevamo, da je $N_2(1) = 2$, dobimo

$$N_2(n) = N_2(1) + [2+3+\ldots+(n-1)+n] = 1 + [1+2+3+\ldots+(n-1)+n]$$

in končno

$$N_2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}\,.$$ [1]

[1] Vsota prvih n naravnih števil je enaka $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. korak

Označimo z $N_3(n)$ število delov, na katere razdeli prostor n ravnin v splošni legi, in opazujmo množico $(n+1)$ ravnin v splošni legi. Dodana ravnina $\mathcal{R}$ seka prvih n ravnin vzdolž n premic ravnine $\mathcal{R}$, ki so med seboj v splošni legi, ker so dane ravnine v medsebojno splošni legi. Teh n premic deli ravnino $\mathcal{R}$ (glej 2. korak) na $N_2(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$ ploskev, katerih vsaka deli po enega od prej dobljenih delov prostora na dvoje. Zato velja

$$N_3(n+1) = N_3(n) + N_2(n) = N_3(n) + \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Spet nadomestimo zapored n z $n-1$, $n-2$, ..., 2 in 1. Dobimo

$$\begin{aligned}
N_3(n) &= N_3(n-1) + \frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}\\
N_3(n-1) &= N_3(n-2) + \frac{(n-2)^2+(n-2)+2}{2}\\
&\vdots\\
N_3(3) &= N_3(2) + \frac{2^2+2+2}{2}\\
N_3(2) &= N_3(1) + \frac{1^2+1+2}{2}
\end{aligned}$$

Enačbe seštejemo, preuredimo člene in dobimo

$$\begin{aligned}
N_3(n) = N_3(1) &+ \frac{1}{2}[1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2]+\\
&+\frac{1}{2}[1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)] + \frac{1}{2}\underbrace{[2+2+\ldots+2]}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $N_3(1) = 2$, in uporabimo formuli za vsoto prvih n naravnih števil in vsoto kvadratov prvih n naravnih števil.[2] Dobimo

$$\begin{aligned}
N_3(n) &= 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} + (n-1) =\\
&= \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.
\end{aligned}$$

[2] Vsota kvadratov prvih n naravnih števil je enaka $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Če v formulo vstavimo zapored $n = 1, 2, 3$ in 4, dobimo $N_3(1) = 2$, $N_3(2) = 4$, $N_3(3) = 8$ in $N_3(4) = 15$, kot smo že na začetku izračunali. Pet ravnin v splošni legi razdeli prostor že na 26 delov, deset pa kar na 176 delov. Direktno preštevanje delov pri večjih n bi se torej res ne obneslo.

Delitev prostora z n oblami

V zastavljeni nalogi smo bralcu prepustili, da v primerjavi s prejšnjo nalogo sam ugotovi, da pogoj, da se oble paroma sekajo, ni dovolj za enolično rešitev naloge. Lahko najdemo primere, ko z enakim številom obel dobimo po številu delov različna razbitja prostora (poiščite kakšen tak primer).

Zato dodatno zahtevamo, da imajo poljubne tri oble skupni vsaj dve točki, poljubne štiri oble pa so brez skupne točke. Tedaj je naloga enolično rešljiva. V takem primeru dobimo tudi največje možno število delov prostora pri delitvi z n oblami.

Spet bomo rešitev naloge poiskali v treh zaporednih korakih.

1\. korak

Označimo z $\mathcal{N}_1(n)$ število lokov, na katere razdeli krožnico n parov točk, to je $2n$ točk te krožnice?

Ni težko uvideti, da je $\mathcal{N}_1(n) = 2n$.

2\. korak

V ravnini naj bo dana množica krožnic, ki se paroma sekajo, poljubne tri pa so brez skupne točke. Tako množico bomo imenovali množica krožnic v splošni legi. Izračunajmo število parcel, na katere ta množica krožnic razdeli ravnino.

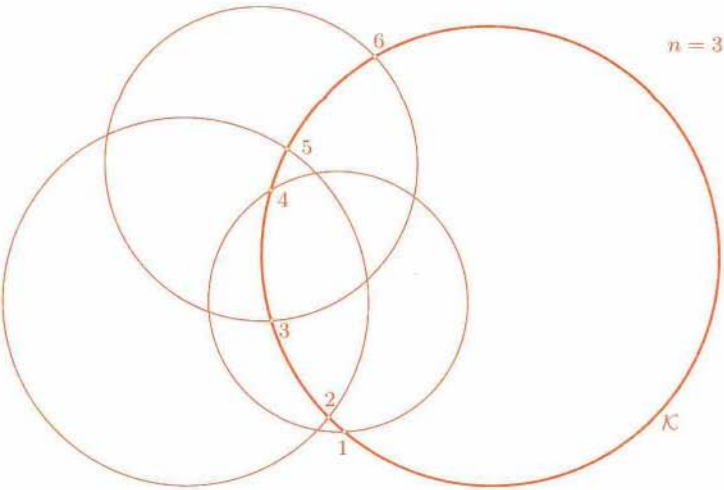
Označimo z $\mathcal{N}_2(n)$ število parcel, na katere razdeli ravnino n krožnic v splošni legi, in opazujmo $(n+1)$-to krožnico te ravnine, ki je s prvimi n krožnicami v splošni legi. Prvih n krožnic seka $(n+1)$-to krožnico, imenujmo jo $\mathcal{K}$, v n parih različnih točk. Te točke razdele $\mathcal{K}$ (glej 1. korak) na $\mathcal{N}_1(n) = 2n$ lokov. Vsak od teh lokov deli po eno od prej dobljenih parcel na dvoje (slika 4).

Zato je

$$\mathcal{N}_2(n+1) = \mathcal{N}_2(n) + \mathcal{N}_1(n) = \mathcal{N}_2(n) + 2n\,.$$

Upoštevamo, da je $\mathcal{N}_2(1) = 2$, poračunamo kot v nalogi z ravninami in dobimo

$$\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2\,.$$



Slika 4.

Posledica

Tudi oblo, na kateri je razporejenih n krožnic v splošni legi, delijo te krožnice na $\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2$ parcel.

3. korak

Naj bo danih $n + 1$ obel, katerih poljubne tri imajo vsaj po dve skupni točki, poljubne štiri pa so brez skupne točke. Od tod sledi, da imajo poljubne tri oble natanko dve skupni točki. Premislite, zakaj!

Označimo z $\mathcal{N}_3(n)$ število delov, na katere razdeli prostor prvih n obel, in opazujmo $(n + 1)$-to oblo. Prvih n obel seka $(n + 1)$-to oblo v n krožnicah, ki so na $(n + 1)$-ti obli razporejene v splošni legi. Te krožnice dele $(n + 1)$-to oblo na $\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2$ parcel, katerih vsaka deli po enega od prej dobljenih prostorskih delov na dva dela. Zato velja

$$\mathcal{N}_3(n+1) = \mathcal{N}_3(n) + \mathcal{N}_2(n) = \mathcal{N}_3(n) + (n^2 - n + 2).$$

Ker je $\mathcal{N}_3(1) = 2$, dobimo, če malo poračunamo, da je

$$\mathcal{N}_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}.$$

Vrednosti za prve tri n so enake kot pri razbitju z ravninami v splošni legi: $\mathcal{N}_3(1) = 2$, $\mathcal{N}_3(2) = 4$, $\mathcal{N}_3(3) = 8$. Potem pa začne $\mathcal{N}_3(n)$ hitreje naraščati kot $N_3(n)$. Tako je $\mathcal{N}_3(4) = 16$, $\mathcal{N}_3(10)$ pa že 260.

Marija Vencelj