PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 3
Strani 134–137

Janez Strnad:

O ARHIMEDOVI KRONI

Ključne besede: fizika, mehanika tekočin, hidrostatika, vzgon, Arhimed.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1519-Strnad.pdf

O ARHIMEDOVI KRONI

Če ni res, je lepo povedano.
Italijanski rek

Zgodbo najdemo celo v nekaterih učbenikih fizike, zato jo pozna precej učencev. Sirakuški vladar Hieron II. je pri zlatarju naročil krono in mu dal v ta namen kos čistega zlata. Krona, ki jo je zlatar izročil Hieronu, je imela enako maso kot kos zlata. A Hieron je pomislil, da ga je morda zlatar ogoljufal tako, da je nekaj zlata nadomestil z manj dragocenenim srebrom. Sum je zaupal Arhimedu, ki mu je že večkrat svetoval in je bil njegov dober znanec, kot tudi znanec njegovega sina Gelona, celo njun sorodnik.

Slika 1. Arhimeda, ki je bil rojen leta 289, je ubil vojak leta 212, ko so Rimljani zasedli Sirakuze. Hieron (306 do 215) je od leta 275 vladal sam in od leta 240 skupaj s sinom Gelonom. Tako bi zgodbo bilo najbrž treba postaviti pred leto 240. Vse letnice zadevajo čas pred našim štetjem.

Arhimed je moral ugotoviti, ali je zlatu v kroni primešano srebro, ne da bi krono, ki jo je Hieron že posvetil bogovom, kakorkoli poškodoval. Arhimed je, tako pripoveduje zgodba, najprej prišel do odkritja, kako izmeriti prostornino krone. Ko je legel v banjo do vrha polno vode, je ugotovil, da je prostornina vode, ki se prelije iz banje, enaka njegovi prostornini in da je prostornina vode v banji za toliko manjša, ko stopi iz nje. Od veselja nad odkritjem je gol stekel po mestu in vpil: "Heureka, heureka!" (Odkril sem, odkril sem!). Nekateri v isti sapi omenjajo še zakon o vzgonu, ki ga je Arhimed tudi odkril. Po tem zakonu se teža potopljenega telesa navidez zmanjša za težo izpodrinjene vode.

S tem spoznanjem Arhimedu ni bilo težko rešiti naloge s krono. Izmeriti je bilo treba prostornino kosa zlata z maso krone in jo primerjati s prostornino krone. Če bi bila prostornina krone večja kot prostornina kosa zlata, bi krona izpodrinila več vode kot kos zlata; to naj bi pomenilo, da je zlatu v kroni primešano srebro. Arhimedov poskus naj bi to zares pokazal in tako razkril zlatarjevo goljufijo.

O zgodbi je prvi poročal rimski inženir Vitruvij v 1. stoletju našega štetja. Toda premislek porodi sum, da so si zgodbo izmislili pozneje. Opisani postopek ne kaže domiselnosti, značilne za Arhimeda, in ne izkoristi zakona o vzvodu (glej *Aristotel in Arhimed o vzvodu*, Presek **24** (1996/97) 70.) in zakona o vzgonu. Še pomembnejši je praktični pomislek, da bi se po opisanem poskusu tedaj bilo težko odločiti, ali je zlatar ogoljufal vladarja ali ne.

To razkrije kratek račun. Šlo naj bi za razmeroma lahko krono v obliki vejice z listi, zvite v venec. Take krone iz 4. stoletja pred našim štetjem so našli v Leti, Amfipoliju in Vergini v Grški Makedoniji ter v Dardanelah. Verginska krona, ki ji sicer manjka nekaj listov, ima premer 18,5 cm in maso 714 g. Vzemimo, da masa krone meri 1000 g in premer posode z vodo, v katero jo potopimo, 20 cm. Ploščina njene osnovne ploskve doseže 314 cm^2. V tablicah poiščemo gostoto zlata in srebra. Podatki segajo od 18,88 g/cm^3, za vakuumsko destilirano, do 19,3 g/cm^3, za lito, in 19,4 g/cm^3, za monokristalno zlato, ter od 10,49 g/cm^3, za mononokristalno, do 10,492 g/cm^3, za vakuumsko destilirano srebro. V Arhimedovih časih niso vakuumsko destilirali kovin in ne vzgajali lepih velikih monokristalov, pa tudi tako čistih kovin kot danes niso mogli dobiti. Ker pač podatke potrebujemo, se odločimo za 19,3 g/cm^3, za gostoto zlata, in 10,5 g/cm^3, za gostoto srebra, z zavestjo, da sta zadnji mesti lahko negotovi.

Naslednje vprašanje je prostornina zlitin. V nekaterih primerih se ta razlikuje od vsote prostornin prvega in drugega elementa, ki ju zlijemo. Tudi v najobsežnejših tablicah snovnih konstant pa ni podatka o prostornini zlitine zlata in srebra. Najbrž v tem primeru podatek ni potreben. Atoma imata zelo podobno kemijsko zgradbo (polmer obeh je enak 0,144 nm) in enako kristalno zgradbo (ploskovno centrirano kubično mrežo z robom osnovne celice 0,407 nm v kristalu zlata in 0,408 nm v kristalu srebra). Zato lahko privzamemo, da se masi obeh atomov razlikujeta samo zaradi mas jeder in da v zlitini le atomi srebra zasedejo mesta atomov zlata. Zlato na 79. mestu periodne preglednice ima relativno atomsko maso 196,97, srebro pa na 47. mestu relativno atomsko maso 107,87. Ti masi sta v razmerju 1,867; le-to se le malo razlikuje od razmerja gostot 1,826. Zato privzamemo, da je prostornina krone kar vsota prostornine zlata in prostornine srebra, ki ju sestavljata.

Vzemimo, da je zlatar 300 g zlata zamenjal za 300 g srebra. Čisto zlato ima značilno rumeno barvo, medtem ko ima srebro "kovinsko barvo" (nekateri pravijo, da je brezbarvno). To je povezano z valovno dolžino svetlobe, ki jo absorbira kristal. Odbita svetloba, v kateri ni te sestavine, kaže značilno barvo. Že pri 300 g srebra je zlitina utegnila biti opazno bolj "bela" od čistega zlata. Morda je prav to zbudilo Hieronov sum? Večji delež srebra bi bil še bolj tvegan. Barva se manj spremeni, če zlato zlijemo z bakrom. Toda baker ima gostoto 8,9 g/cm^3, torej je precej manjša od gostote srebra. Zato bi bilo primes bakra pri Arhimedovem poskusu laže odkriti.

Pri navedeni izbiri je prostornina krone 700 g/19,3 gcm^{-3}+ + 300 g/10,5 gcm^{-3}=64,8 cm^3. V izbrani posodi ji ustreza višina vode 64,8 cm^3/314 cm ^{2} = 0,206 cm. Prostornina kosa zlata z maso 1000 g je 1000 cm^3/19,3 = 51,8 cm^3 in ji v posodi ustreza višina vode 51,8 cm^3/312 cm^2 = 0,165 cm. Razlika obeh višin doseže komaj 0,041 cm = 0,41 mm. Tolikšno razliko gladin bi težko opazili s prostim očesom. Ustreza ji prostornina 0,041 cm · 314 cm^2 = 13 cm^3 vode, ki bi dodatno stekla iz posode, če bi v zvrhano polno posodo najprej potopili kos zlata, ga vzeli iz vode in potem potopili krono. Upoštevati je treba, da je gladina vode zaradi površinske napetosti ukrivljena ter da nekaj vode lahko ostane na zlatu. Razlika višin in dodatna prostornina bi bili še manjši, če bi bili masa krone in masa kosa zlata manjši, če bi zlatar manjši del zlata nadomestil s srebrom ali če bi imela posoda večji premer.

Z bolj domiselnim poskusom pa bi Arhimed precej laže ugotovil, ali je zlatar goljufal. Oprl bi se prav tako na zakon o vzvodu in zakon o vzgonu. Krono in kos zlata bi obesil na krajišči enakoročnega vzvoda, kakršnega uporablja tehtnica. Vzvod, ki bi bil na zraku v ravnovesju, bi se dvignil na strani krone, ko bi ga potopil v vodo. Krona z večjo prostornino bi izpodrinila več vode z večjo maso od mase kosa zlata in bi bila zato navidez lažja. S prejšnjimi podatki ugotovimo, da se masa krone, ki ustreza njeni teži, navidez zmanjša za 64,8 g, to je na 1000 g − − 64,8 g = 935,2 g, ker je gostota vode 1 g/cm^3. Masa, ki ustreza teži kosa zlata, pa se navidez zmanjša za 51,8 g na 1000 g − 51,8 g = 948,2 g. Razlike teh mas 948,2 g − 935,2 g = 13 g s potopljeno tehtnico tudi v Arhimedovih časih ne bi bilo težko ugotoviti. V tem primeru napake, ki smo jih omenili pri prejšnjem načinu merjenja, ne bi motile. Poleg tega bi vzvod lahko uporabili tudi, če krona ne bi imela natančno enake mase kot kos zlata. Na zraku bi dosegli ravnovesje, če bi povečali ročico krone, v kolikor bi imela krona manjšo maso, ali če bi ročico zmanjšali, v kolikor bi imela krona večjo maso.

Kaj se je dogajalo v davnih časih, ne vemo in najbrž nikoli ne bomo vedeli. Ni pa dvoma, da so si veliko zanimivih zgodb izmislili kasneje z dobrim namenom, da bi pritegnili pozornost bralcev in poslušalcev. O eni od njih, v katero je bil prav tako vpleten Arhimed, je Presek že poročal. Trdni fizikalni razlogi govorijo za to, da rimskih ladij niso zažgali s sončno svetlobo, ki se je odbila na vdrtih ščitih (*Arhimed in sežig ladij*, Presek **21** (1993/94) 2). To ne pomeni, da bi bilo treba zanimive stare zgodbe pregnati iz šole. Prav pa je, če jih jemljemo z zabavne strani in v njih ne iščemo "naravoslovne resnice".

Pri računanju smo uporabili naslednje enačbe:

a) za ploščino kroga, to je dna posode: $p = \pi r^2$, če je r polmer kroga,
b) za prostornino valja: $V = \pi r^2 h$, če je h njegova višina,
c) zvezo med maso in prostornino: $m = \rho V$, če je ρ gostota, in
d) zvezo med težo in maso: $F = mg$, če je g težni pospešek.

Zaradi zadnje zveze smo lahko razpravljali o masi, ki ustreza teži, čeprav zakon o vzgonu pravi, da se teža potopljenega telesa navidez zmanjša za težo izpodrinjene tekočine.

Janez Strnad