PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 1
Strani 47–52

Marko Razpet:

ŽUŽKI – NOŽIŠČNE KRIVULJE ASTEROIDE

Ključne besede: matematika, krivulje, asteroida.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1538-Razpet.pdf

ŽUŽKI – NOŽIŠČNE KRIVULJE ASTEROIDE

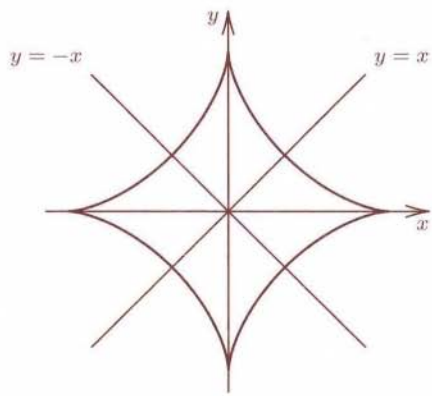
Dano ravninsko krivuljo $\mathcal{K}$ lahko na različne načine preoblikujemo v nove krivulje.

Nožiščno krivuljo $\mathcal{K}_P$ dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ dobimo tako, da v ravnini te krivulje izberemo točko P, nato pa jo pravokotno projiciramo na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$. Množica vseh nožišč N, to je presečišč pravokotnic skozi P z vsemi tangentami krivulje $\mathcal{K}$, je nožiščna krivulja $\mathcal{K}_P$ krivulje $\mathcal{K}$ glede na pol P.

Nekatere krivulje, recimo premica in krožnica, imajo razmeroma enostavne nožiščne krivulje, nekatere pa bolj zapletene. Oglejmo si, kakšne nožiščne krivulje ima asteroida ali zvezdnica. Asteroida je krivulja, ki ima v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy enačbo

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,, \tag{1}$$

kjer je a pozitivna konstanta. Iz same enačbe razberemo, da je neobčutljiva za zamenjave $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$, $x \mapsto y$ in $x \mapsto -y$. To pomeni, da so premice $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ in $y = -x$ simetrale asteroide (1).



Slika 1. Simetrale asteroide.

Asteroido opiše izbrana točka na krožnici polmera $a/4$, če se ta krožnica brez drsenja kotali po notranji strani krožnice polmera a. Zato pravimo, da je asteroida poseben primer hipocikloide. Asteroida je lep primer ravninske krivulje, za katero večina računov poteka brez hujših zapletov.

Asteroido laže obravnavamo, če jo zapišemo v parametrični obliki. Če namreč enačbo (1) preoblikujemo v

$$\left(\frac{x^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^2 + \left(\frac{y^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^2 = 1$$

in se spomnimo, da je $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ za vsako realno število t, potem se samo po sebi vsiljuje, da postavimo

$$\frac{x^{1/3}}{a^{1/3}} = \cos t\,, \quad \frac{y^{1/3}}{a^{1/3}} = \sin t\,,$$

od koder sledi

$$x = a\cos^3 t\,, \quad y = a\sin^3 t\,. \tag{2}$$

To sta parametrični enačbi asteroide.

Funkciji sinus in cosinus smo smeli uporabiti zato, ker lahko že iz (1) sklepamo, da je asteroida omejena krivulja. Če en člen na levi strani v (1) povečamo, se mora drugi zmanjšati in obratno. Za $x = 0$ dobimo $y = \pm a$, za $y = 0$ pa $x = \pm a$. Točke $(a, 0)$ in $(0, a)$, $(-a, 0)$ in $(0, -a)$ so na asteroidi najbolj oddaljene od njenega središča. To so osti asteroide. Po vrsti jih dobimo iz (2) za $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ in $t = 3\pi/2$. Očitno je za en obhod asteroide dovolj, da parameter t preteče interval $[0, 2\pi)$. Za $t = 2\pi$ dobimo zopet isto točko kot za $t = 0$. Vsaki točki na asteroidi ustreza natanko en t na intervalu $[0, 2\pi)$. Za $0 < t < \pi/2$ poteka asteroida po prvem kvadrantu, za $\pi/2 < t < \pi$ po drugem, za $\pi < t < 3\pi/2$ po tretjem in za $3\pi/2 < t < 2\pi$ po četrtem.

Kakšen geometrijski pomen ima parameter t? Trdimo, da je t suplementaren naklonskemu kotu tangente na asteroido v točki, ki ustreza parametru t. Do tangente pridemo po običajnem postopku: skozi dve različni točki $T_0(x_0, y_0)$ in $T_1(x_1, y_1)$ asteroide najprej postavimo sekanto, potem pa omenjeni točki zbližamo v eno, recimo v T_0. Če pri tem sekanta preide v mejni položaj, smo našli tangento. Smerni koeficient k_s sekante preide pri tem v smerni koeficient k_t tangente.

Denimo, da gre asteroida skozi T_0, ko je $t = t_0$, skozi T_1 pa tedaj, ko je $t = t_1$. Pri tem je seveda $t_0 \neq t_1$. Torej je $x_0 = a\cos^3 t_0$, $y_0 = a\sin^3 t_0$, $x_1 = a\cos^3 t_1$ in $y_1 = a\sin^3 t_1$.

Zapišimo smerni koeficient k_s sekante skozi T_0 in T_1:

$$k_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a\sin^3 t_1 - a\sin^3 t_0}{a\cos^3 t_1 - a\cos^3 t_0}\,.$$

Po krajšanju in razstavljanju dobimo

$$k_s = \frac{(\sin t_1 - \sin t_0)(\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{(\cos t_1 - \cos t_0)(\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}\,.$$

Razliko dveh sinusov in dveh kosinusov lahko prevedemo na produkt

$$k_s = \frac{2\cos\frac{t_0+t_1}{2}\sin\frac{t_1-t_0}{2}(\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{-2\sin\frac{t_0+t_1}{2}\sin\frac{t_1-t_0}{2}(\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}\,.$$

Po ponovnem krajšanju imamo

$$k_s = -\frac{\cos\frac{t_0+t_1}{2}(\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{\sin\frac{t_0+t_1}{2}(\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}\,.$$

Ko gre T_1 proti T_0, gre t_1 proti t_0, koeficient k_s pa proti

$$k_t = -\frac{\cos t_0(3\sin^2 t_0)}{\sin t_0(3\cos^2 t_0)} = -\frac{\sin t_0}{\cos t_0} = -\tan t_0\,.$$

Smerni koeficient k_t tangente na asteroido v točki $T_0(x_0, y_0)$ je torej dan s formulo $k_t = -\tan t_0 = \tan(\pi - t_0)$. Za zgornjo in spodnjo ost k_t ni definiran. Enačba tangente na asteroido v T_0 pa je zato

$$y - a\sin^3 t_0 = -\tan t_0(x - a\cos^3 t_0)\,.$$

Po preuredtitvi dobimo enostavnejšo obliko:

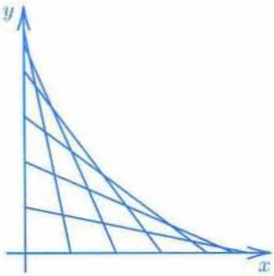
$$x\sin t_0 + y\cos t_0 = a\sin t_0\cos t_0\,.$$

Ta oblika da pravilni rezultat tudi za vse osti asteroide. Naklonski kot α tangente je $\pi - t_0$, torej je t_0 res suplementaren naklonskemu kotu tangente na asteroido v točki, ki pripada parametru t_0. Če izvzamemo osti asteroide, potem njena tangenta preseka os x v točki $A(a\cos t_0, 0)$, os y pa v točki $B(0, a\sin t_0)$. Razdalja med A in B pa je očitno enaka a, neodvisno od izbire točke T_0 na asteroidi. Značilno za asteroido je, da je medosna razdalja za vse tangente asteroide stalna. Izjeme so le tangente v njenih osteh.

Množica vseh tangent na asteroido je dana z enačbo

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t\,. \tag{3}$$

Asteroide (1) se v vsaki točki dotika natanko ena premica oblike (3), v dveh različnih točkah pa dve različni taki premici. Pravimo, da je asteroida (1) ogrinjača množice premic (3). Slika 2 prikazuje nekaj tangent z dotikališči v prvem kvadrantu.



Slika 2. Tangente na asteroido.

Sedaj pa že lahko izpeljemo izraza za koordinati (x, y) nožišča N izbrane točke $P(p, q)$ – pola – na katerokoli tangento asteroide. Pravokotnica na tangento (3) skozi P ima očitno enačbo

$$(x - p)\cos t - (y - q)\sin t = 0\,.$$

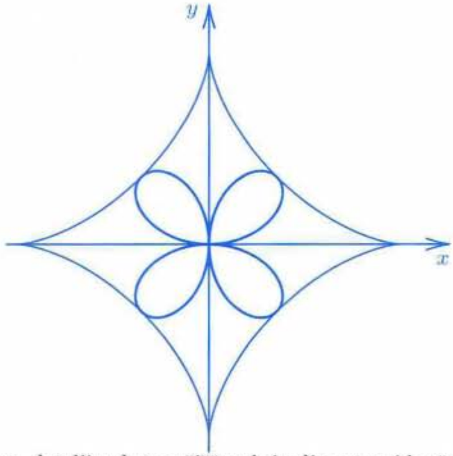
Rešitev x in y sistema enačb

$$x \cos t - y \sin t = p \cos t - q \sin t$$
$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t$$

sta koordinati točke N. Preprost račun nam da

$$x = (p \cos t - q \sin t + a \sin^2 t)\cos t\,,$$
$$y = (-p \cos t + q \sin t + a \cos^2 t)\sin t\,.$$

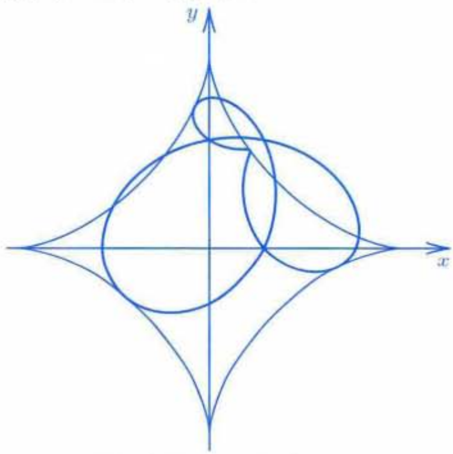
To sta parametrični enačbi nožiščne krivulje asteroide (2) glede na dani pol $P(p, q)$.



Slika 3. Štiriperesna deteljica kot nožiščna krivulja asteroide, če je pol izhodišče.

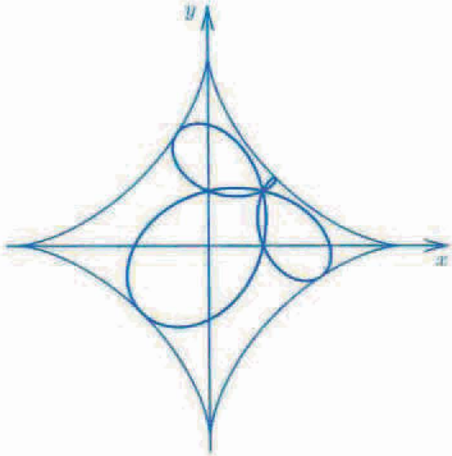
Oblika nove krivulje je precej odvisna od izbire točke P. V najenostavnejšem primeru $p = q = 0$ ima nožiščna krivulja asteroide glede na njeno središče parametrični enačbi $x = a\sin^2 t\cos t\,, y = a\cos^2 t\sin t$. Ker je v tem primeru $x^2 + y^2 = a^2\sin^2 t\cos^2 t = (a/2)^2\sin^2 2t$, se polarni radij iskane krivulje izraža z $\varrho = (a/2)\sin 2t$. Krivulja je štiriperesna deteljica (slika 3).

Če izberemo točko P kar na slepo, ne predaleč od asteroide, dobimo krivuljo, ki bolj ali manj spominja na nekakšnega žužka. Na sliki 4 je primer, ko je $p = (2/7)a$ in $q = (4/7)a$.



Slika 4. Nesimetrični žužek.

Simetrične žužke dobimo, če izberemo P na eni od simetral asteroide. Slika 5 prikazuje primer žužka, ki je dobljen kot nožiščna krivulja asterode za primer $p = q = (2/7)a$.



Slika 5. Simetrični žužek.

S parametričnima enačbama nožiščnih krivulj asteroide lahko različne oblike žužkov preučujemo z računalniškim programom Derive. Kdor ima raje geometrijske konstrukcije, pa bo morda segel po Cabri-géomètre in poskusil odkriti kako zanimivost tudi manj znanih krivulj. Seveda lahko uporabite tudi druge programe, ki so vam na voljo.

Marko Razpet