RIEMANNOVE NIČLE IN PRAŠTEVILA

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11M26

V članku dokažemo manj znano formulo E. Landaua, ki povezuje seštevanje členov x^ρ po netrivialnih ničlah ρ Riemannove funkcije zeta in von Mangoldtovo funkcijo $\Lambda(x)$. Formula enostavno ilustrira princip, da lahko iz poznavanja netrivialnih ničel dobimo praštevila.

RIEMANN'S ZEROS AND PRIMES

We prove not so well-known E. Landau's formula, which connects the summation of terms x^ρ over nontrivial zeros ρ of the Riemann zeta function with the von Mangoldt function $\Lambda(x)$. This formula simply illustrates the principle that nontrivial zeros determine prime numbers.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je ena najbolj študiranih funkcij v matematiki. **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) jo je leta 1859 uvedel kot funkcijo kompleksne spremenljivke s. Takšno pomembnost ima zaradi neposredne povezave s praštevili. Temeljnega pomena je enakost

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{1}$$

za $\Re\{s\} > 1$, kjer se produkt po praštevilih imenuje *Eulerjev produkt.* Logaritmiranje in odvajanje formule (1) po spremenljivki s da zvezo

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{2}$$

kjer je $\Lambda(n)$ *von Mangoldtova funkcija.* Ta aritmetična funkcija je različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa je enaka $\log p$. Nemški matematik **Hans C. F. von Mangoldt** (1854–1925) jo je leta 1895 vpeljal preko enakosti (2) z namenom bolje razumeti porazdelitev praštevil in podati dokaze Riemannovih trditev. Prav na podlagi njegovega članka sta leto pozneje francoski matematik **Jacques S. Hadamard** (1865–1963) in belgijski matematik **Charles J. de la Vallée Poussin** (1866–1962) uspela dokazati *praštevilski izrek* $\lim_{x\to\infty} \pi(x)x^{-1}\log x = 1$, kjer smo s $\pi(x)$ označili število praštevil, ki ne presegajo števila x. Že pred njim je tako funkcijo elementarno obravnaval **Pafnutij L. Čebišev** (1821–1894), ki je leta 1852 naredil prve pomembne korake k dokazu praštevilskega izreka. Več o njegovi zgodovini si lahko bralec prebere v članku [3].

Riemann je pokazal, da lahko funkcijo $\zeta(s)$ s polravnine $\Re\{s\} > 1$ analitično razširimo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pri tem je dokazal *funkcijsko enačbo*

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s), \tag{3}$$

veljavno za vse $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Funkcija $\Gamma(s)$ je Eulerjeva funkcija gama. Ta enačba odraža simetrijo funkcije zeta glede na *kritično premico* $\Re\{s\} = 1/2$. Opazimo, da zaradi enakosti (1) nimamo ničel z realnim delom večjim od 1. Zato so po (3) edine ničle na polravnini $\Re\{s\} < 0$ (imenovane *trivialne*) negativna soda števila. Vprašanje ostaja *kritični pas* $0 \le \Re\{s\} \le 1$. Nekateri avtorji izpuščajo enakosti v definiciji, saj je že dolgo časa znano, da na premici $\Re\{s\} = 1$ (in posledično tudi na $\Re\{s\} = 0$) ni ničel. Kritični pas vsebuje *netrivialne ničle*, ki jih označujemo z $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$. Po funkcijski enačbi so tudi $\bar{\rho}$, $1-\rho$ in $1-\bar{\rho}$ ničle, zato jih je potrebno poznati le na zgornji polravnini $\Im\{s\} > 0$. Realnih netrivialnih ničel ni. To najenostavneje sledi iz enakosti $\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-s}$, ki jo dobimo po ustrezni preureditvi členov v (1). Slika 3 prikazuje morebitno ničlo ρ levo od kritične premice in pripadajočo ničlo $1-\bar{\rho}$. Morebitna zato, ker vse *znane* netrivialne ničle ležijo na kritični premici. *Riemannova hipoteza* je domneva, da vse netrivialne ničle ležijo na kritični premici. Po dogovoru z $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujemo naraščajoče zaporedje imaginarnih delov netrivialnih ničel na zgornji polravnini. Opozoriti moramo, da pri tem upoštevamo tudi morebitno večkratnost ničel. Domneva je, da so vse ničle enostavne, vendar se za zdaj ne ve niti to, ali ta lastnost sledi iz Riemannove hipoteze. Že Riemann je v svojih beležkah izračunal $\gamma_1 \approx 14{,}14$ in nakazal, da je to res prva ničla na zgornji polravnini, glej [2, str. 159]. Pozneje bomo podali preprost argument, da na območju $|\Im\{s\}| \le 2$ ni netrivialnih ničel.

V popularni literaturi o Riemannovi hipotezi je mogoče zaslediti trditev, da lahko iz zaporedja $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dobimo praštevila. Knjiga [9] nam zelo nazorno pokaže, da moramo vzeti trigonometrijske vsote

$$\cos\left(\gamma_1 \log x\right) + \cos\left(\gamma_2 \log x\right) + \cdots + \cos\left(\gamma_n \log x\right).$$

Grafi nad končnimi intervali, ki jih dobimo z večanjem števila n, imajo na določenih mestih izrazite vrhove in najvišji nastanejo prav nad praštevili.

Bralcu, ki se je že srečal s Fourierovo analizo, zato ne bo tako nenavadno, da zaporedju $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravijo tudi *Riemannov spekter.* Razširimo von Mangoldtovo funkcijo na realna števila tako, da za $x \notin \mathbb{N}$ definiramo $\Lambda(x) = 0$. Obstajajo dokaj splošne *eksplicitne formule* (npr. Weilova [8, str. 337–343]), ki povezujejo $\Lambda(x)$ in ničle ρ, toda iz njih je težko izluščiti preproste argumente za prej opisani pojav. Morda ga še najlažje opiše naslednja trditev: *za izbran $x > 1$ velja*

$$\sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^{\rho} = -\frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + O\left(\log T\right). \tag{4}$$

Spomnimo se, da za realni funkciji f in g izraz $f(x) = O(g(x))$ pomeni, da obstaja konstanta $C > 0$, da za vse dovolj velike x velja $|f(x)| < Cg(x)$. Formulo (4) je zapisal **Edmund G. H. Landau** (1877–1938) v [7]. Dokaz zahteva poznavanje nekaterih pomembnih lastnosti funkcije zeta ter izrek o residuih. Obravnava je zato primerna tako za začetnika v tej teoriji kot tudi za nekoga, ki bi rad spoznal manj trivialno uporabo residuov[1]. Sledili bomo njegovemu dokazu in pokazali naslednje.

Izrek 1. *Za vsak $x > 1$ velja*

$$\Lambda(x) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho}, \tag{5}$$

kjer so ρ netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta.

Če je Riemannova domneva pravilna, se nam formula poenostavi v obliko zgornje trigonometrijske vsote. Za $x > 0$ enostavno izračunamo

$$x^{\rho} = x^{\beta}x^{\mathrm{i}\gamma} = x^{\beta}\left(\cos\left(\gamma\log x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\gamma\log x\right)\right),$$

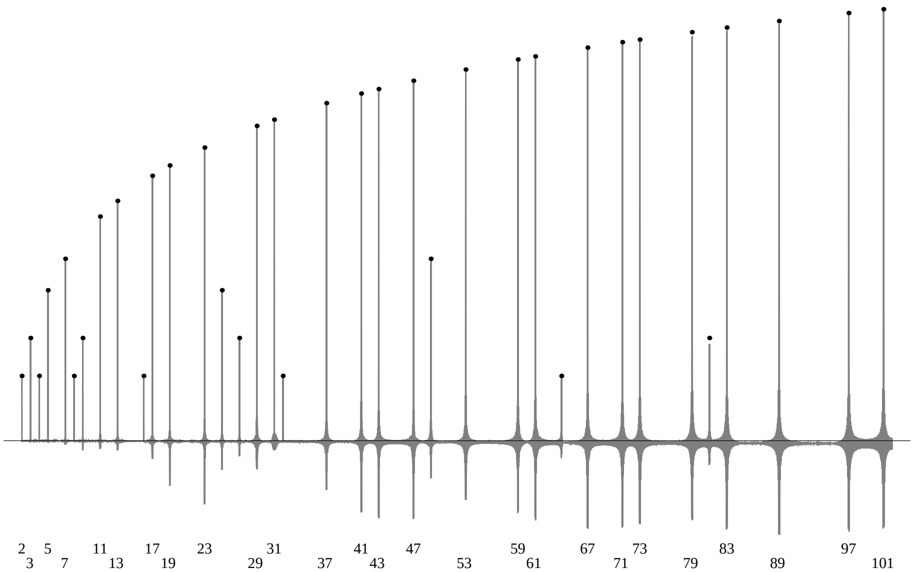
od koder sledi $x^{\rho} + x^{\bar\rho} = 2x^{\beta}\cos\left(\gamma\log x\right)$. Za $T > \gamma_1$ definirajmo

$$\Lambda_T(x) := -\frac{2\pi\sqrt{x}}{T}\sum_{\gamma_n<T}\cos\left(\gamma_n\log x\right).$$

Riemannova domneva ($\beta = 1/2$) nam takoj da posledico izreka.

Posledica 2. *Privzemimo veljavnost Riemannove domneve. Potem za vsak $x > 1$ velja $\Lambda(x) = \lim_{T\to\infty}\Lambda_T(x)$.*

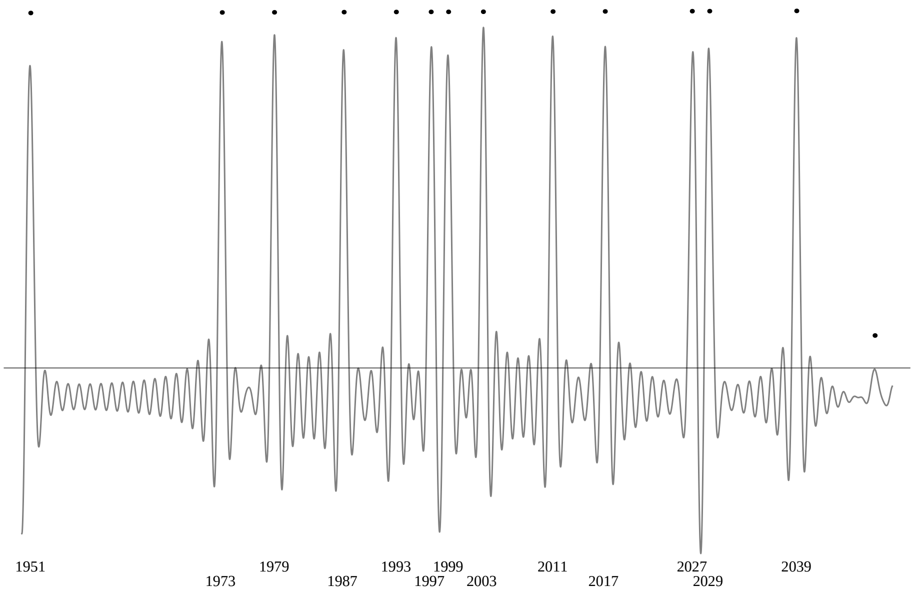
[1] Zanimivo je, da kljub enostavnosti formule (4) in vizualni nazornosti njene izpeljanke (5) njunih obravnav ni moč zaslediti v standardnih monografijah o Riemannovi funkciji zeta, npr. [10, 2, 6]. Je pa zapisana v prvi izdaji Titchmarshove knjige (1930).



Slika 1. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $\Lambda(x)$ na intervalu $[2, 102]$. Pod grafom so izpisana praštevila.

Limita v izreku in posledici ni enakomerna na vsem intervalu $(1, \infty)$, saj je $\Lambda(x)$ nezvezna funkcija, medtem ko je $\Lambda_T(x)$ zvezna. Grafa, narejena s programom *Mathematica*, na slikah 1 in 2 prikazujeta graf funkcije $\Lambda_T(x)$ za $T = 10^4$ (upoštevamo 10142 ničel) na intervalih $[2, 102]$ in $[1950, 2050]$. Za primerjavo so s črnimi pikami prikazane tudi neničelne vrednosti von Mangoldtove funkcije. Pri prvem grafu opazimo dobro ujemanje in ostre konice, medtem ko na drugem grafu vidimo odstopanja in »divje obnašanje« med zaporednimi praštevili, ki pa jih lahko še vedno brez težav prepoznamo. Pri številu $2^{11} = 2048$ je mogoče opaziti zelo majhno spremembo v strukturi grafa.

Organizacija članka je naslednja. Najprej podamo idejo dokaza, kjer z uporabo teorije residuov prevedemo problem na oceno določenih integralov. Potem pripravimo orodja iz teorije Riemannove funkcije zeta, s katerimi v četrtem razdelku primerno ocenimo integrale in s tem dokažemo izrek. Za zaključek članka omenimo še nekatere posplošitve.



Slika 2. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $\Lambda(x)$ na intervalu $[1950, 2050]$. Pod grafom so izpisana praštevila.

Ideja dokaza izreka 1

Dokaz temelji na funkcijski enačbi (3) in *Hadamardovem produktu po netrivialnih ničlah*

$$2\pi^{-s/2}(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s) = e^{-Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}, \tag{6}$$

kjer je $B := 1 + \mathbf{C}/2 - \log(2\sqrt{\pi})$ in $\mathbf{C}$ *Euler-Mascheronijeva konstanta.* Dokaza obeh enačb lahko najdemo v katerikoli od prej naštetih monografij o Riemannovi funkciji zeta, npr. [6, izrek 1.6 in razdelek 1.3]. V podrobnosti izraza (6) se ne bomo podali. Namignimo samo, da je leva stran formule (6) *cela* funkcija, katere ničle so samo netrivialne ničle funkcije zeta. Teorijo produktov, kakršen je zgoraj, pa lahko bralec poišče v [1, 5. poglavje].

Zaradi enostavnosti bomo za realna števila $a \leq b$ in $c \leq d$ definirali (zaprte) pravokotnike $[a, b] \times [c, d] := \{z \in \mathbb{C}\colon a \leq \Re\{z\} \leq b, c \leq \Im\{z\} \leq d\}$. Podobno definiramo tudi polodprte in odprte pravokotnike. Daljico s krajiščema z in w na kompleksni ravnini bomo označili z $[z, w]$.

Ničle holomorfne funkcije f na neki odprti množici $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ lahko povežemo z integriranjem po sklenjenih krivuljah. Osnovni rezultat je znan pod imenom *izrek o residuih*, glej npr. [1, str. 148–154]. Mi potrebujemo naslednjo verzijo. *Naj bosta f in g holomorfni funkciji na odprti množici $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Recimo, da notranjost pravokotnika $P \subset \Omega$ vsebuje ničle $a_1, \ldots, a_N$ (štete z večkratnostmi) funkcije f, na robu ∂P pravokotnika P pa ni ničel. Potem velja*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial P} \frac{f'}{f}(z) g(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} g\left(a_n\right), \tag{7}$$

kjer integriramo po pozitivno orientiranem robu ∂P.

Vrnimo se k naši nalogi. Naj bo $T > 2$. Glede na enakost (7) ni težko uganiti, da je temeljna ideja dokaza integriranje funkcije $x^s \zeta'(s)/\zeta(s)$ po robu pravokotnika $[-T, 2] \times [2, T]$, kar lahko vidimo na sliki 3. Po (7) imamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{i}}{T} \left(\int_{-T+2\mathrm{i}}^{2+2\mathrm{i}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \int_{2+\mathrm{i}T}^{-T+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \int_{-T+\mathrm{i}T}^{-T+2\mathrm{i}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s \right) \\ = -\frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s - \frac{2\pi}{T} \sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^\rho. \end{aligned} \tag{8}$$

Seveda mora biti T tak, da ni nobenih ničel na daljici $[-T + T\mathrm{i}, 2 + T\mathrm{i}]$. Integracija zajame vse ničle ρ z $0 < \Im\{\rho\} < T$, saj pravokotnik $[0, 1] \times [-2, 2]$ ne vsebuje ničel. Pokazali bomo, da je absolutna vrednost izraza v oklepaju manjša od $D(x) \log T$, kjer je $D(x)$ neka funkcija. Torej bo po zgornji enakosti veljalo

$$\left| \frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \frac{2\pi}{T} \sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^\rho \right| < \frac{D(x) \log T}{T}. \tag{9}$$

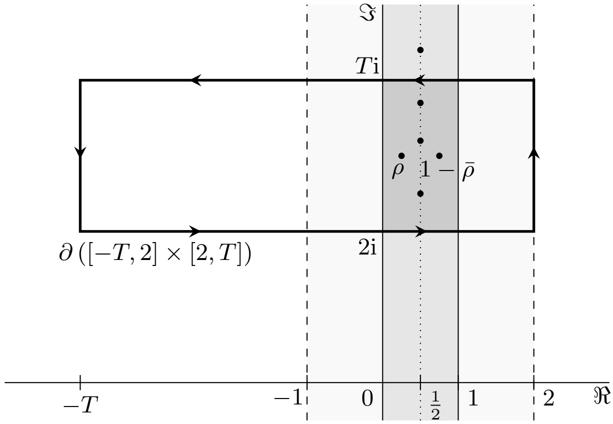
Integral v neenakosti (9) lahko preko zveze (2) povežemo z von Mangoldtovo funkcijo. Natančneje, pokazali bomo, da obstaja funkcija $C(x)$, za katero velja

$$\left| -\frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \Lambda(x) \right| \leq \frac{C(x)}{T}. \tag{10}$$

Enak postopek lahko naredimo tudi za pravokotnik, ki je zrcalno simetričen na realno os, tj. pravokotnik $[-T, 2] \times [-T, -2]$. Tedaj seštevamo po ničlah z imaginarnimi deli na intervalu $(-T, -2)$. Izkaže se, da oceni (9) in (10) veljata tudi za integriranje po stranici $[2 - \mathrm{i}T, 2 - 2\mathrm{i}]$. V kombinaciji s trikotniško neenakostjo bomo imeli

$$\left| 2\Lambda(x) + \frac{2\pi}{T} \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^\rho \right| < 2 \frac{C(x) + D(x) \log T}{T},$$

kar pa že dokazuje izrek 1.



Slika 3. Območje integracije v dokazu izreka 1. »Odebelitev« kritičnega pasu nam omogoča študiranje funkcije ζ'/ζ v kritičnem pasu.

Priprava

Zanimala nas bo rast izraza $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ na območju $|\Im\{s\}| \geq 2$, kjer seveda s ni ničla funkcije zeta. Tega se lotimo tako, da najprej razdelimo dano območje na tri dele: desno od premice $\Re\{s\} = 2$, pas $-1 \leq \Re\{s\} \leq 2$ in levo od premice $\Re\{s\} = -1$. Na prvem delu imamo zvezo (2), za tretji del bo poskrbela funkcijska enačba (3). Pravi izziv predstavlja drugo območje, kjer na zvit način uporabimo Hadamardov produkt (6).

Po zamenjavi spremenljivke s z $1-s$ v (3) ter logaritmiranju in odvajanju, dobimo

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi s}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s). \tag{11}$$

Naj bo s iz območja $(-\infty,-1]\times[2,\infty)$. S tem je $1-s$ iz območja $[2,\infty)\times(-\infty,-2]$. Vsak člen absolutno ocenimo. Prvi je konstanta in nam zato ne dela nobenih težav. Tudi drugi je omejen z neko konstanto, kar se enostavno preveri z uporabo formule

$$\cot z = \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}.$$

Zadnji člen je po (2) prav tako omejen z neko konstanto, zato preostane še člen s funkcijo gama. Potrebujemo verzijo *Stirlingove formule* na polravnini $\Re\{z\} \geq z_0 > 0$. Za $\Re\{z\} > 0$ imamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) - \log z = -\frac{1}{2z} - \int_0^\infty \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)\left(e^{2\pi x}-1\right)}, \tag{12}$$

glej [1, str. 202]. Razdelimo polravnino $\Re\{z\} \geq z_0$ na $|\Im\{z\}| \leq \left(\sqrt{2}-1\right) z_0$ in $|\Im\{z\}| > \left(\sqrt{2}-1\right) z_0$, ter x naj bo realno število. Za z iz prvega območja dobimo $\left|x^2+z^2\right| \geq \Re\left\{x^2+z^2\right\} \geq \Re\{z\}^2 - \Im\{z\}^2 \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$, za drugo območje pa $\left|x^2+z^2\right| \geq \Im\left\{x^2+z^2\right\} = 2\Re\{z\}\Im\{z\} > 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$. Torej je $\left|x^2+z^2\right| \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$, zato po (12) za $\Re\{z\} \geq z_0$ sledi

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \log|z| + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2z_0} + \frac{1}{24\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2}, \tag{13}$$

pri čemer naj si bralec pomaga z integralom na str. 214 v [1]. Enačba (12) dokazuje tudi simetrijsko lastnost $\overline{\Gamma'(z)/\Gamma(z)} = \Gamma'\left(\bar{z}\right)/\Gamma\left(\bar{z}\right)$. S tem imajo tako lastnost vsi členi na desni strani enakosti (11), od koder sledi

$$\overline{\frac{\zeta'}{\zeta}(s)} = \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\bar{s}\right)$$

za $s \in (-\infty, -1] \times [2, \infty)$. Ker je $\Re\{1-s\} \geq 2$, lahko uporabimo oceno (13) za $z_0 = 2$ in dobimo $|\Gamma'(1-s)/\Gamma(1-s)| < \log|1-s| + 2$. Ker je $2 < |1-s| < |s|^2$, sledi $|\Gamma'(1-s)/\Gamma(1-s)| < 2\log|s| + 2$. Če vse skupaj združimo, dobimo $|\zeta'(s)/\zeta(s)| < 2\log|s| + A$ za neki $A > 0$. Toda $A < (2A/\log 2)\log|s|$. Zato obstaja konstanta $C_1 > 0$, da velja

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < C_1 \log|s| \tag{14}$$

za vse $s \in (-\infty, -1] \times [2, \infty)$. Zaradi simetrije ta neenakost velja tudi za $\bar{s}$, torej na območju $(-\infty, -1] \times (-\infty, -2]$.

Težja je obravnava območja $[-1, 2] \times [2, \infty)$, saj imamo opravka z netrivialnimi ničlami. Pri tem nam bo v veliko pomoč Hadamardov produkt. Logaritmiranje in odvajanje izraza (6) nam da

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \log(2\pi) - 1 - \frac{\mathbf{C}}{2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}.$$

Ključen element v dokazu enakosti (6) je netrivialno dejstvo, da za vsak $\varepsilon > 0$ vrsta $\sum_\rho |\rho|^{-1-\varepsilon}$ konvergira, za $\varepsilon = 0$ pa divergira. Slednje lahko uporabimo tudi za dokaz, da je netrivialnih ničel neskončno mnogo. Torej je vrsta v zgornjem izrazu absolutno konvergentna. Za $s = 1$ jo lahko z nekaj truda celo izrazimo z znanimi konstantami. V nadaljevanju bomo to storili za vrsto po $\Im\{\rho\} > 0$, kar je zaradi simetrije med ničlami ravno polovica celotne vsote. Zgornji izraz za $s = 1$ ni dobro definiran, vendar velja $\lim_{s\to 1}\left(\zeta'(s)/\zeta(s) + (s-1)^{-1}\right) = \mathbf{C}$, glej [10, str. 20]. Privzemimo, da poznamo še vrednost $\Gamma'(3/2)/\Gamma(3/2) = 2 - \mathbf{C} - \log 4$, glej npr. [5, **8.365** 1 in **8.366** 2]. Dobimo

$$\begin{aligned}
\sum_{\Im\{\rho\}>0} \frac{1}{\rho\,(1-\rho)} &= \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \gamma>0}} \frac{\beta}{|\rho|^2} + \frac{1-\beta}{|1-\rho|^2} + \mathrm{i}\gamma\left(\frac{1}{|1-\rho|^2} - \frac{1}{|\rho|^2}\right) \\
&= \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \beta>1/2,\gamma>0}} 2\left(\frac{\beta}{|\rho|^2} + \frac{1-\beta}{|1-\rho|^2}\right) + \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \beta=1/2,\gamma>0}} \frac{4}{1+4\gamma^2} \\
&= B \approx 0{,}0231,
\end{aligned}$$

kjer je B konstanta iz Hadamardovega produkta. S to enakostjo lahko pokažemo, da na območju $[0,1]\times(0,2]$ ni ničel. V nasprotnem primeru bi za ničlo ρ s tega območja veljalo $|\rho| \le \sqrt{5}$, $|1-\rho| \le \sqrt{5}$ in $\gamma \le 2$. Če ničla ne leži na kritični premici, upoštevamo samo prvi člen v drugi vrstici zgornje enakosti in dobimo $B > 2/5$, kar je protislovje. Če pa ničla leži na kritični premici, nam drugi člen da $B > 4/17$, kar je ponovno protislovje. Če združimo še ugotovitve iz uvoda, lahko zaključimo, da območje $[0,1]\times[-2,2]$ ne vsebuje ničel.

S podobnim argumentom kakor pri dokazu neenakosti (14) ugotovimo, da obstaja konstanta $C' > 0$, tako da velja

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho\,(s-\rho)}\right| < C' \log|s| \tag{15}$$

za vse $s \in [-1,2]\times[2,\infty)$. Ta neenakost je že dovolj, da lahko nekaj povemo o zgornji meji za število netrivialnih ničel v kvadratih z enotskimi stranicami.

Lema 3. *Obstaja konstanta* $\widetilde{C} > 0$, *da je število ničel Riemannove funkcije zeta v kvadratu* $[0,1]\times[t,t+1]$ *manjše kot* $\widetilde{C}\log|t|$ *za vse* $|t| \ge 2$.

Dokaz. Zaradi simetrije lahko predpostavimo $t \ge 2$. Izberimo $t \ge 2$ in definirajmo $s_0 := 2 + \mathrm{i}t$. Po trikotniški neenakosti iz (15) sledi

$$\left|\sum_{\rho} \frac{s_0}{\rho\,(s_0-\rho)}\right| < C' \log|s_0| - \frac{\zeta'}{\zeta}(2) < \frac{\widetilde{C}}{5} \log t$$

za neko konstanto $\widetilde{C} > 0$. Po drugi strani pa se lahko brez težav prepričamo, da velja

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\rho}\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right| &\geq \sum_{\rho}\Re\left\{\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right\} > \sum_{\rho}\Re\left\{\frac{1}{s_0-\rho}\right\} \\ &= \sum_{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \geq \sum_{\gamma}\frac{1}{4+(t-\gamma)^2} \geq \frac{N}{5},\end{aligned}$$

kjer smo z N označili število ničel iz leme. Ker je $s_0\rho^{-1}\left(s_0-\rho\right)^{-1}=\rho^{-1}+\left(s_0-\rho\right)^{-1}$, sledi druga neenakost. Zadnjo neenakost pa dobimo tako, da upoštevamo samo ničle iz kvadrata, torej $(t-\gamma)^2\leq 1$. Dokaz leme je s tem končan. ∎

Izrek 4. *Obstaja konstanta $C_3>0$, da velja*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{1}{s-\rho}\right| < C_3\log|t| \tag{16}$$

za $s=\sigma+\mathrm{i}t$, pri čemer je $\sigma\in[-1,2]$ in $|t|\geq 2$.

Dokaz. Zaradi simetrije lahko privzamemo $t\geq 2$. Izberimo $t\geq 2$ in definirajmo $s_0:=2+\mathrm{i}t$. Uporabimo neenakost (15) in dobimo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{\rho}\frac{s_0-s}{(s-\rho)\left(s_0-\rho\right)}\right| &= \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{\rho}\frac{s}{\rho\left(s-\rho\right)}+\sum_{\rho}\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right| \\ &< C'\log|s|+C'\log|s_0|-\frac{\zeta'}{\zeta}(2) \\ &\leq 2C'\log|s_0|-\frac{\zeta'}{\zeta}(2) < \overline{C}_3\log t\end{aligned}$$

za neko konstanto $\overline{C}_3>0$. Ker je vrsta po ničlah absolutno konvergentna, jo lahko razdelimo na dele

$$\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}+\sum_{t+1\leq\Im\{\rho\}}+\sum_{0<\Im\{\rho\}\leq t-1}\frac{s_0-s}{(s-\rho)\left(s_0-\rho\right)}+\frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})\left(s_0-\bar{\rho}\right)}.$$

Naj bodo S_1, S_2 in S_3 zaporedoma zgornje vsote. Obravnavajmo S_2. Naj bo n naravno število in ρ ničla z imaginarnim delom na intervalu $[t+n,t+n+1]$.

Potem je $|s-\rho| \geq |\Im\{s-\rho\}| \geq n$, $|s_0-\rho| \geq n$ in $|s_0-s| \leq 3$, prav tako za $\bar{\rho}$. S temi neenakostmi ocenimo

$$\left|\sum_{t+n\leq\Im\{\rho\}<t+n+1} \frac{s_0-s}{(s-\rho)(s_0-\rho)} + \frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})(s_0-\bar{\rho})}\right| \leq \frac{6}{n^2}N_1,$$

kjer je N_1 število ničel v kvadratu $[0,1]\times[t+n,t+n+1]$. Po lemi 3 je $N_1 < \widetilde{C}\log(t+n)$, zato

$$\begin{aligned} |S_2| &< 6\widetilde{C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(t+n)}{n^2} \\ &\leq 6\widetilde{C}\left(\log(t+1) + \int_1^{\infty}\frac{\log(t+x)}{x^2}\mathrm{d}x\right) = 6\widetilde{C}\frac{(1+2t)\log(1+t)}{t}. \end{aligned}$$

Torej obstaja konstanta $\overline{C}_1 > 0$, da je $|S_2| < \overline{C}_1\log t$. Na podoben način dobimo tudi $|S_3| < \overline{C}_2\log t$ za neko konstanto $\overline{C}_2 > 0$. Imamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1\right| &\leq \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1 - (S_2+S_3)\right| + |S_2+S_3| \\ &< \left(\overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3\right)\log t. \end{aligned} \tag{17}$$

Naj bo ρ ničla z imaginarnim delom na intervalu $[t-1,t+1]$. Potem je $|s_0-\rho| \geq \Re\{s_0-\rho\} \geq 1$, $|s_0-\bar{\rho}| \geq 1$ in $|s-\bar{\rho}| \geq \Im\{s-\bar{\rho}\} \geq 1$. Zato po neenakosti (17) sledi

$$\begin{aligned} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{1}{s-\rho}\right| &\leq \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1\right| + \left|S_1 - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{1}{s-\rho}\right| \\ &= \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1\right| + \left|\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{1}{s_0-\rho} - \frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})(s_0-\bar{\rho})}\right| \\ &< \left(\overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3\right)\log t + 4N_2, \end{aligned}$$

kjer je N_2 število ničel v kvadratu $[0,1]\times[t-1,t+1]$. Po lemi 3 je $N_2 < \widetilde{C}(\log(t-1)+\log t) < 2\widetilde{C}\log t$. Zato s $C_3 := \overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 + 8\widetilde{C}$ dobimo (16). ■

Izrek 4 je eden izmed pomembnejših izrekov teorije Riemannove funkcije zeta, katerega dokaz pa je relativno preprost. Uporablja se v dokazu *Riemann–von Mangoldtove formule*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + O(\log T), \tag{18}$$

kjer je $N(T)$ običajna oznaka za število ničel ρ s pogojem $0 < \Im\{\rho\} \leq T$. Ta formula je natančnejša oblika ocene $N(T) = O\left(T \log T\right)$, ki jo dobimo po lemi 3.

Dokaz

Sedaj smo pripravljeni na dokaz relacije (5) v izreku 1. V dokazu neenakosti (10) ne potrebujemo ocen iz razdelka Priprava, zato ga bomo najprej naredili. Preostanek razdelka je namenjen še tehnično zahtevnejšemu dokazu neenakosti (9).

Po relaciji (2) med odvodom logaritma funkcije ζ in von Mangoldtovo funkcijo Λ imamo

$$-\frac{\mathrm{i}}{T}\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{i}}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\mathrm{d}s.$$

Sumacijo in integracijo lahko zamenjamo, saj je vrsta absolutno konvergentna. Integral na desni strani izračunamo tako, da ločimo primera $x = n$ in $x \neq n$. Dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{i}}{T}\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s + \Lambda(x) = \frac{2\Lambda(x)}{T} & \\ + \frac{\mathrm{i}x^2}{T}\sum_{n\neq x}\frac{\Lambda(n)}{n^2\log\left(x/n\right)}&\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{\mathrm{i}T} - \left(\frac{x}{n}\right)^{2\mathrm{i}}\right). \end{aligned}$$

Podobno naredimo še za integral po stranici $[2-\mathrm{i}T, 2-2\mathrm{i}]$. Pri tem se v zgornji formuli spremenita le člena v oklepaju, in sicer T se spremeni v -2 in 2 v $-T$. Kakorkoli, absolutna vrednost desne strani je v obeh primerih neka funkcija oblike $C(x)T^{-1}$. S tem smo dokazali neenakost (10).

Obravnava integrala po daljici $[-T+\mathrm{i}T, -T+2\mathrm{i}]$ je zelo enostavna. Parametrizirajmo daljico s $s = -T + \mathrm{i}t$, kjer gre t od T do 2. Ker je $|s| < T + t$, nam ocena (14) zagotavlja

$$\begin{aligned} \left|\int_{-T+\mathrm{i}T}^{-T+2\mathrm{i}}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{C_1}{x^T}\int_2^T\log\left(T+t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{C_1}{x^T}\left(2 - T + 2T\log\left(2T\right) - (T+2)\log\left(T+2\right)\right) \\ &< \frac{4C_1T}{x^T}\log T \leq \frac{4C_1}{x^{1/\log x}\log x}\log T, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $x > 1$, $T > 2$ in $\log(2T) < 2\log T$. Zadnjo neenakost dobimo tako, da izračunamo maksimum funkcije Tx^{-T} v spremenljivki T. Podoben postopek z enako oceno naredimo še za stranico $[-T-2\mathrm{i}, -T-\mathrm{i}T]$.

Izberimo t, $2 \leq |t| \leq T$. Integral po daljici $[-T+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$ razdelimo na dela po $[-T+\mathrm{i}t, -1+\mathrm{i}t]$ in $[-1+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$. Podobno kakor prej nam ocena (14) da

$$\left|\int_{-T+\mathrm{i}t}^{-1+\mathrm{i}t} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s \mathrm{d}s\right| \leq C_1 \int_1^T \log(|t|+\sigma)x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma \leq C_1 \log(|t|+T)\int_1^T x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma$$
$$= C_1 \log(|t|+T)\left(\frac{1}{x\log x} - \frac{1}{x^T \log x}\right) < \frac{2C_1 \log T}{x \log x}.$$

Pomnožimo izraz (16) v izreku 4 z $|x^s| = x^\sigma$, kjer je $x > 1$ in $\sigma \in [-1, 2]$. Dobimo

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \frac{x^s}{s-\rho}\right| < C_3 x^\sigma \log|t| \leq C_3 x^2 \log|t|.$$

Od tod sledi

$$\left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s \mathrm{d}s - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho}\right| \leq 3C_3 x^2 \log T.$$

Naj bo ρ ničla iz pravokotnika $[0,1] \times [t, t+1]$. Po izreku o residuih za pravokotnik $[-1,2] \times [t, t+2]$, glej (7) za $f(s) = s-\rho$ in $g(s) = x^s$, velja

$$\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho} = x^\rho - \int_{2+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}(t+2)} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho} - \int_{2+\mathrm{i}(t+2)}^{-1+\mathrm{i}(t+2)} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho} - \int_{-1+\mathrm{i}(t+2)}^{-1+\mathrm{i}t} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho}.$$

Ker je $|s-\rho| \geq 1$ za s po daljicah integracije na desni strani izraza, je absolutna vrednost levega integrala omejena z neko funkcijo $C_2(x)$. Upoštevamo še lemo 3 in dobimo

$$\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \frac{x^s \mathrm{d}s}{s-\rho}\right| < 2\widetilde{C} C_2(x) \log|t| \leq 2\widetilde{C} C_2(x) \log T.$$

To nam končno da

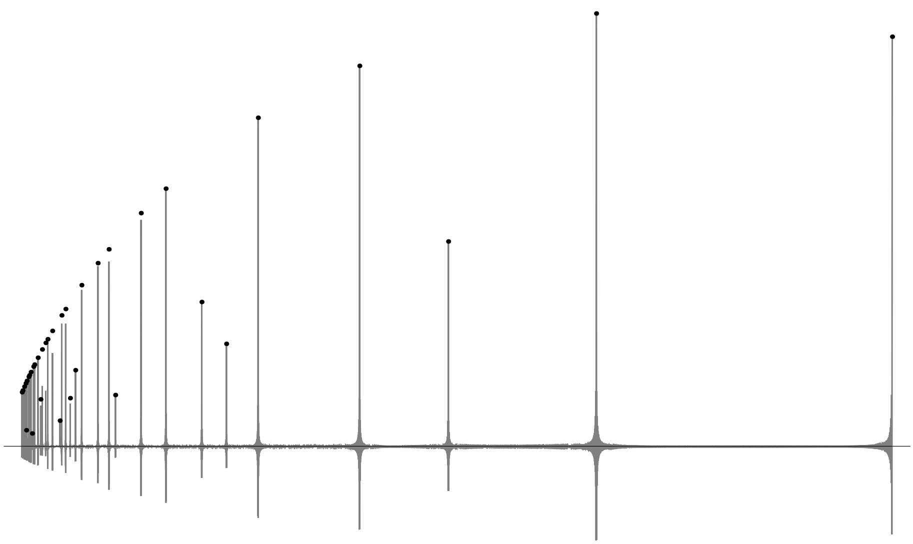
$$\left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s \mathrm{d}s\right| \leq \left(2\widetilde{C} C_2(x) + 3C_3 x^2\right) \log T.$$

Absolutna vrednost integrala po daljici $[-T+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$ za $t \in [2,T]\cup[-T,-2]$ je tako manjša kot $\left(2C_1/(x\log x) + 2\widetilde{C}C_2(x) + 3C_3x^2\right)\log T$. Seveda je s tako oceno omejena tudi absolutna vrednost integrala po daljici $[2+\mathrm{i}t, -T+\mathrm{i}t]$. S tem smo pokazali, da neenakost (9) velja za

$$D(x) := \frac{4C_1}{x^{1/\log x}\log x} + \frac{4C_1}{x\log x} + 4\widetilde{C}C_2(x) + 6C_3x^2.$$

Posplošitve

Naravno vprašanje je, ali lahko trditev posledice 2 podamo tudi za $x \in (0,1)$. Primer $x = 1$ lahko izločimo, saj gre po Riemann–von Mangoldtovi formuli (18) vrednost $\Lambda_T(1)$ pri $T \to \infty$ proti neskončnosti.



Slika 4. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $x\Lambda(1/x)$ na intervalu $[1/102, 1/2]$.

Slika 4 nas prepričuje, da se tudi na tem intervalu dogaja nekaj zanimivega. Opazimo lahko, da nam sedaj funkcija $\Lambda_T(x)$ prepoznava recipročne vrednosti potenc praštevil. Zakaj? Zaradi simetrije med netrivialnimi ničlami velja

$$\sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho} = \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{1-\rho} = x \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{-\rho}.$$

Ker je $x^{-1} > 1$, lahko uporabimo izrek 1 za x^{-1}. Dobimo

$$x\Lambda\left(x^{-1}\right) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho}.$$

Če je Riemannova domneva pravilna, potem za vsak $x \in (0,1)$ velja $x\Lambda\left(x^{-1}\right) = \lim_{T\to\infty} \Lambda_T(x)$. Torej je $\lim_{T\to\infty} \Lambda_T\left(p^{-n}\right) = p^{-n}\log p$ za vsako praštevilo p in vsako naravno število n. Zato najvišji vrhovi nastanejo prav nad obratnimi vrednostmi praštevil, vse skupaj pa gre z večanjem praštevil proti nič. Oblika grafa na sliki 4 je tako pojasnjena.

Na podoben način, le s skrbnejšim ocenjevanjem izrazov iz razdelka Dokaz, je Steve Gonek v [4] dokazal

$$\sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^{\rho} = -\frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + O\left(x\log\left(2xT\right)\log\log 3x\right)$$
$$+ O\left(\log x \min\left\{T, \frac{x}{\langle x\rangle}\right\}\right) + O\left(\log\left(2T\right)\min\left\{T, \frac{1}{\log x}\right\}\right),$$

kjer $\langle x\rangle$ pomeni razdaljo od x do najbližje potence praštevila, različne od x. S tem mu je uspelo poenostaviti dokaze nekaterih pomembnih izrekov, ki obravnavajo razdalje med zaporednimi ordinatami ničel. Podrobnosti prepuščamo radovednim bralcem, ki naj posežejo po spodaj navedeni literaturi.

LITERATURA

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Dover Publications, New York, 2001.

[3] L. J. Goldstein, *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), no. 6, 599–615.

[4] S. M. Gonek, *An explicit formula of Landau and its applications to the theory of the zeta-function*, A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis, Contemp. Math. **143**, AMS, 1993, str. 395–413.

[5] I. S. Gradshteyn in I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

[6] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[7] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71** (1912), no. 4, 548–564.

[8] S. Lang, *Algebraic number theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics **110**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] B. Mazur, W. Stein, *Prime numbers and the Riemann hypothesis*, Cambridge University Press, 2016.

[10] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1986.