PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **2** (1974/1975)
Številka 4
Strani 136–142

Peter Legiša:

NEKAJ O RAZDALJI

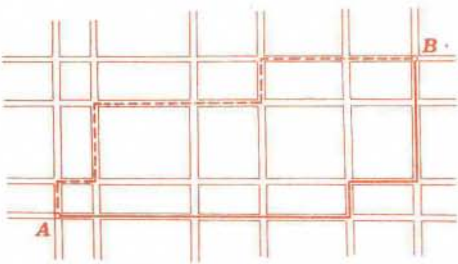
Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/2/2-4-Legisa.pdf

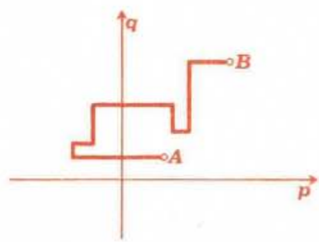
NEKAJ O RAZDALJI

Pojem razdalje ima za različne ljudi in ob različnih priložnostih različne pomene. Za pilota je razdalja med točkama zračna razdalja, se pravi dolžina njune zveznice. Če pa ustavimo avto ob cesti in vprašamo mimoidočega, kolikšna je razdalja med Ljubljano in Mariborom, nam bo vsak odgovoril, da je od Ljubljane do Maribora 135 kilometrov. Teh 135 kilometrov je precej več, kot je zračna razdalja med Ljubljano in Mariborom.

Takih primerov je mnogo. Denimo, da stanujemo v mestu, v katerem so vse ulice ravne in se sekajo le pravokotno. Za prebivalce tega mesta dolžina zveznice med točkama (razen v primeru, ko točki ležita na isti ulici) ni ustrezno merilo za razdaljo. Zanje je razdalja med točkama dolžina najkrajše povezave med njima. Vsi vemo, da je takih najkrajših povezav med danima točkama lahko več. Na sl.1 je narisan del ulične mreže takega mesta in najkrajši povezavi med križiščema A in B.



Sl. 1



Sl. 2

Tole mesto in njegove prebivalce sem navedel le zato, da bi laže razumeli naslednjo situacijo. Imamo ravnino in na njej premici p in q, ki se sekata pravokotno. Na ravnini imamo še točkast delec. Ta delec ima posebno lastnost: iz ravnine ne more, po ravnini pa se lahko premika le vzporedno premici p ali premici q. Sicer pa lahko počne karkoli. Podobnost z mestom in ljudmi v njem je očitna: prebivalec mesta, ki nima ravno helikopterja, mora pač hoditi po ulicah. (Prav tako dobra je primerjava s trdnjavo na šahovski deski.)

Narišimo si sliko! Na listu papirja potegnimo premici p in q. Začetno lego delca označimo z A. Poskusimo se vživeti v položaj našega delca. Če je B poljubna točka na ravnini, jo delec gotovo lahko obišče. To lahko stori celo na neskončno načinov. Denimo, da je kdo delcu, ki se je odpravil na pot od točke A do točke B, naskrivaj obesil na hrbet preluknjano vrečko s kašo - tako kot kraljični v Andersenovi pravljici. Ko delec pride v točko B, je za sabo pustil sled, ki ji pravimo *tir* delca med točko A in točko B.

Tir delca med točko A in točko B je v splošnem neka večkrat pravokotno prelomljena črta (glej sl.2).

Pojavi se vprašanje, kolikšna je dolžina najkrajšega tira delca med danima točkama. Potegnimo skozi točko A vzporednico premici p in skozi B vzporednico premici q. Presečišče dobljenih premic označimo s C.(sl.3) Trdimo, da za delec ni mogoče najti tira med A in B, ki bi bil krajši, kot je tir, sestavljen iz daljic AC in CB. (Seveda pa v splošnem tir, sestavljen iz daljic AC in CB, ni edini najkrajši tir med A in B.)

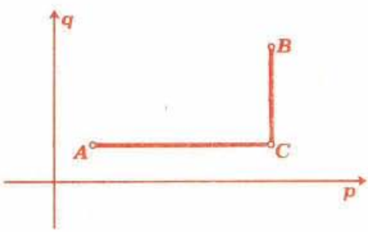
Vzemimo poljuben tir našega delca med točkama A in B. Vsota dolžin tistih daljic v tiru, ki so vzporedne premici p, je očitno večja ali kvečjemu enaka dolžini daljice AC. Prav tako ugotovimo, da je vsota dolžin daljic, ki so vzporedne premici q, večja ali kvečjemu enaka dolžini daljice CB. Splošno bomo dolžino daljice T_1T_2 (kjer sta T_1, T_2 poljubni točki na ravnini) označili s $\overline{T_1T_2}$. Tako lahko rečemo, da je dolžina najkrajšega tira za delec med točkama A in B enaka $\overline{AC}+\overline{CB}$. Delec z vso upravičenostjo trdi, da je zanj razdalja med dvema točkama dolžina najkrajšega tira med njima. Da ne bo prišlo do zmešnjave, se dogovorimo takole: "***razdalja***" (v narekovajih) naj pomeni razdaljo, kot jo razume delec; ***razdalja*** brez narekovajev pa navadno razdaljo med točkama (dolžino zveznice).

"Razdaljo" med točkama A in B bomo označili z $r(A,B)$, razdaljo med istima točkama pa, kot smo že rekli, z $\overline{AB}$. Situacijo na sl.3 lahko na kratko povzamemo takole:

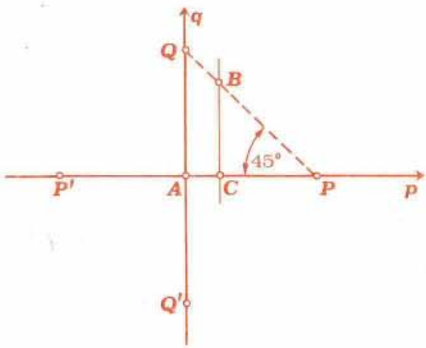
$$r(A,B) = \overline{AC} + \overline{CB}$$

Denimo, da je naš delec inteligentno bitje, ki ve nekaj o aritmetiki, nič pa o geometriji. Delec živi v ravnini. Zato mu poskusimo razložiti nekaj pojmov iz ravninske geometrije, in to kar na ravnini, po kateri se giblje. Ker delec vsakič, ko rečemo besedo razdalja, razume "razdalja", nastanejo prav zabavni nesporazumi.

Začnimo s krožnico. Gotovo bomo delcu rekli: *krožnica* s središčem v točki A in polmerom a je množica (geometrijsko mesto) točk na ravnini, katerih razdalja od A je enaka a. Delec namesto razdalja sliši "razdalja" in se loti risanja *"krožnice"*. Poskusimo ugotoviti, kakšna bo njegova slika. Nič hudega ne bo, če premici p in q vzporedno premaknemo, tako da se sekata v točki A (sl.4). Iščemo vse tiste točke B, za katere je $r(A,B)=a$. Za točko B, ki leži na premici p ali na premici q, je očitno $r(A,B)=\overline{AB}$. Če torej od točke A odmerimo na premicah p in q razdaljo a, dobimo štiri točke P, Q, P', Q', ki leže na naši "krožnici".



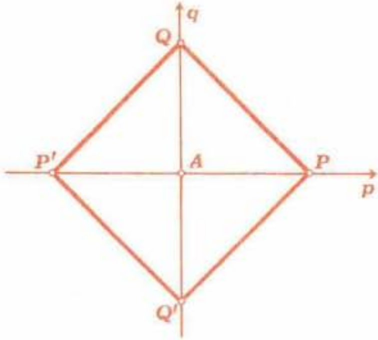
Sl. 3

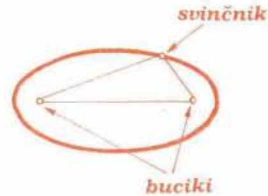


Sl. 4

Naj bo zdaj B poljubna točka, ki leži desno od q in nad p in za katero je $r(A,B)=a$. Potegnimo skozi B vzporednico premici q. Presečišče dobljene premice s premico p označimo s C. Kot smo videli, je $r(A,B)= \overline{AC}+\overline{CB} = a$. Ker je tudi $\overline{AC}+\overline{CP} = a$, je $\overline{CP}=\overline{CB}$. Vemo, da je $\overline{AP}=\overline{AQ}$. Zato sta trikotnika PAQ in PCB podobna. Od tod sklepamo, da leži točka B na zveznici točk P in Q. "Razdalja" vsake točke na daljici PQ od točke A je očitno enaka a. Torej je tisti del "krožnice", ki leži desno od q in nad p, natančno daljica PQ. Od tod takoj vidimo, da je delčeva "krožnica" ravno rob kvadrata $PQP'Q'$ (sl.5).

Tehniki bodo rekli, da je bil naš poskus razložiti delcu, kaj je krožnica, čista polomija. Za tehnika res ni vseeno, ali so kolesa pri avtomobilu okrogla ali kvadratična. Matematik pa se za





Sl. 5 Sl. 6

take malenkosti včasih ne zmeni. Ravno nasprotno, vsakega pravega matematika bo ta primer spodbodel, da bo poskušal ugotoviti, kako si delec predstavlja še kaj drugega.

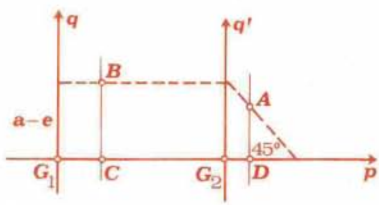
Za elipso so bralci verjetno že slišali. Tistim, ki je ne poznajo, bom povedal, kako jo narišemo. List papirja položimo na podlago in zabodemo skozenj dve buciki. Potem iz kosa niti napravimo zanko, jo napnemo na obe buciki in svinčnik ter rišemo (sl.6) in pazimo, da ostane nitka ves čas napeta. Dobimo ovalen lik, ki ga imenujemo *elipsa*.

Točki, v katerih sta zapičeni buciki, imenujemo *gorišči* elipse. Odštejemo od dolžine niti dolžino zveznice med goriščema. Polovica dobljenega števila se imenuje *velika polos* elipse. Rečemo lahko: elipsa z goriščema G_1, G_2 in veliko polosjo a je množica točk, za katere je vsota razdalj od točk G_1 in G_2 enaka $2a$. Uganimo, kaj bo na podlagi tega stavka narisal delec (ki besedo razdalja razume kot "razdalja"). Tistemu, kar bo narisal, recimo *"elipsa"*. Da bo stvar lažja, izberimo gorišči G_1 in G_2 tako, da ležita na premici p in da premica q poteka skozi G_1. Označimo $\overline{G_1G_2} = 2e$. Iščemo torej take točke A, da je $r(G_1,A) + r(G_2,A) = 2a$. Vzeli bomo tudi, da je $a>e$. (Če je $a<e$, lahko hitro pokažeš, da ni nobene točke A, za katero bi bila izpolnjena enakost $r(G_1,A) + r(G_2,A) = 2a$.)

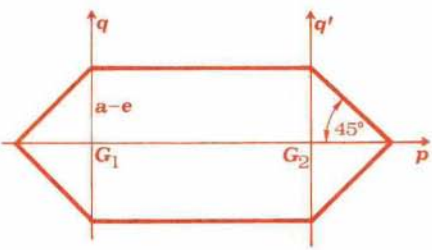
Skozi točko G_2 potegnimo vzporednico premici q in jo označimo s q' (sl.7).

Naj bo B poljubna točka, ki leži nad p ter med q in q' in zadošča enačbi $r(G_1,B) + r(G_2,B) = 2a$. Potegnimo skozi B vzporednico premici q in presečišče dobljene premice s premico p označimo s C. Takoj vidimo, da je $r(G_1,B) = \overline{G_1C} + \overline{CB}$ in $r(G_2,B) = \overline{CG_2} + \overline{CB}$. Ker je $\overline{G_1C} + \overline{CG_2} = \overline{G_1G_2} = 2e$, je $2a = r(G_1,B) + r(G_2,B) = 2e + 2\overline{CB}$. Tako je $\overline{CB} = a-e$. Del "elipse", ki leži med q in q' in nad p, je torej daljica, ki je vzporedna daljici G_1G_2 in je za $a-e$ nad njo.

Naj bo A točka naše "elipse", ki leži desno od q' in nad p (sl.7). Spustimo iz A pravokotnico na premico p in presečišče obeh premic označimo z D. Potem je $r(G_1,A) = \overline{G_1D} + \overline{DA} = \overline{G_1G_2} + \overline{G_2D} + \overline{DA} = \overline{G_1G_2} + r(G_2,A)$. Tako je $2a = r(G_1,A) + r(G_2,a) = \overline{G_1G_2} + 2r(G_2,A) = 2e + 2r(G_2,A)$. Od tod vidimo, da je $r(G_2,A) = a-e$. Točka A leži torej na "krožnici" s središčem v G_2 in polmerom $a-e$. Del "krožnice", ki leži desno od q' in nad p, pa znamo narisati. Odmerimo od točke G_2 po premici q' navzgor razdaljo $a-e$ ter od G_2 po p na desno enako razdaljo in dobljeni točki zvežemo. Zdaj igraje lahko narišemo celo "elipso".



Sl. 7



Sl. 8

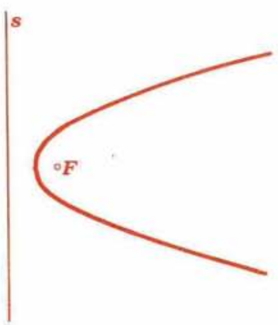
Dokončno podobo naše elipse lahko vidite na sliki 8.

Tretja stvar, s katero se bomo spoprijeli, je parabola. Imejmo na naši ravnini premico s in točko F, ki ne leži na premici s. *Parabola* z *goriščem* F in *vodnico* s je množica točk (na ravnini), ki so enako oddaljene od premice s in točke F. Tipično parabolo imamo na sliki 9.

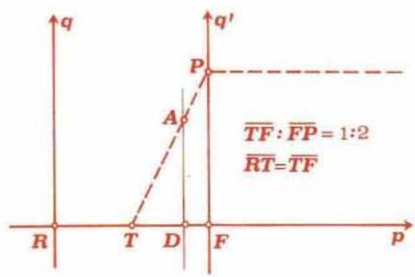
Za naš delec je "razdalja" med točko A in premico s dolžina najkrajšega tira, ki se začne v A in konča na s. Označimo "razdaljo" med premico s in točko A z $r(s,A)$. Delec bo definicijo parabole razumel takole: "parabola" z vodnico s in goriščem F je množica takih točk A, da je $r(s,A) = r(F,A)$. Pojdimo gledat, kaj pravzaprav je ta "parabola". Vzemimo, da je premica s kar premica q in da premica p poteka skozi točko F.

Presečišče premic p in q označimo z R. Skozi F potegnimo vzporednico premici q in jo označimo s q'. Naj bo T razpolovišče daljice RF. Točka T gotovo leži na "paraboli", saj je $r(s,T) = r(F,T)$. Označimo $\overline{TF} = c$. Naj bo A točka na "paraboli" in naj A leži med q in q' ter nad p. Spustimo skozi A vzporednico premici q. Presek dobljene premice s p označimo z D (sl.10).

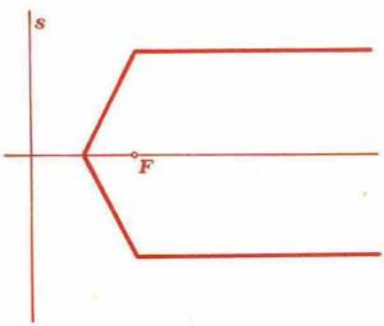
Ker je $r(s,A) = \overline{RD}$ in $r(F,A) = \overline{DF}+\overline{DA}$, mora biti $\overline{RD} = \overline{DF}+\overline{DA}$. Upoštevajmo, da je $\overline{RD}+\overline{DF} = 2c$ in da je $\overline{RD} = c + \overline{TD}$, pa vidimo, da je $\overline{TD} = \frac{1}{2}\overline{DA}$. Naj bo P tista točka na premici q', ki leži nad F



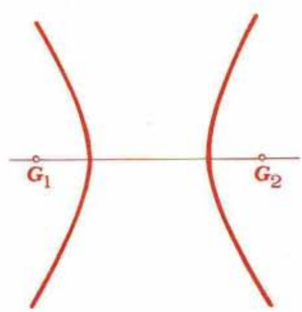
Sl. 9



Sl. 10



Sl. 11



Sl. 12

in za katero je $\overline{PF} = 2c$. Ker je razmerje $\overline{TF}:\overline{FP} = 1:2 = \overline{TD}:\overline{DA}$, sta trikotnika TDA in TFP podobna. Od tod sklepamo, da A leži na daljici TP. Vsaka točka daljice TP je seveda na "paraboli". Tisti del "parabole", ki leži desno od q' in nad p, pa je kar poltrak, ki je vzporeden p in se začne v P. (To bodo bralci zlahka ugotovili)

Parabola je narisana na sliki 11.

Za konec še dve nalogi.

1) Naj bosta A in B različni točki na naši ravnini in a neko pozitivno število. Poiščimo vse tiste točke C na ravnini, za katere je $\overline{AC} = \overline{BC} = a$! Najdemo lahko dve točki, eno točko ali pa nobene take točke (o tem se lahko takoj prepričaš). Kakšne oblike pa je vse lahko množica takih točk C na ravnini, da je $r(A,C) = r(B,C) = a$?

2) (Ta naloga je primerna predvsem za srednješolce.) *Hiperbola z goriščema* G_1 in G_2 in *veliko polosjo* a je množica točk, za katere je razlika razdalj od točk G_1 in G_2 (zmeraj odštevamo manjšo razdaljo od večje) enaka $2a$. Tipična hiperbola je narisana na sliki 12. Poskusi ugotoviti, kaj bo namesto hiperbole narisal naš delec (ki je namesto razdalja razumel "razdalja"). Razdaljo med goriščema označi z $2e$. Da bo stvar lažja, privzemi, da gorišči G_1 in G_2 ležita na premici p in da je $a<e$.

Peter Legiša