PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 3
Strani 139–143

Peter Petek:

KAKO SE JE GODILO ŠTEVILU π?, I. Del

Ključne besede: matematika, geometrija, ploščina kroga, obseg kroga, število π.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-3-Petek.pdf

KAKO SE JE GODILO ŠTEVILU π

1. DEL

Človek je že davno v prazgodovini opazil, da je obseg kroga nekako trikrat večji kot njegov premer. Ta podatek je služil pletarju, ki je zvijal šibe v okrogle koše, pa kolarju, ki je izdeloval kolesa za bojne vozove.

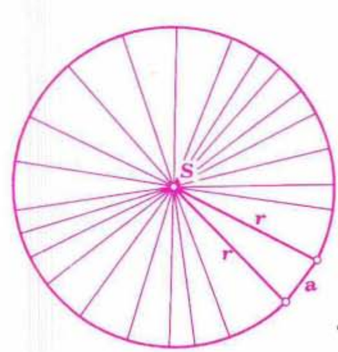
V starih kitajskih knjigah, papirusih Indije in Egipta ali na glinastih ploščicah Mezopotamije je moč srečati naloge, ki zahtevajo računanje obsega kroga, ali obratno, premer kroga pri znanem obsegu. Tole so na primer našli na ploščici s klinastimi znaki:

Če je krožnica 60, *je tretjina od* 60 *enaka* 20. *To je premer*.

Tu že opazimo napredek od čisto obrtniškega navodila, čeprav se je tedanja matematika zadovoljila z nekaj rešenimi primeri, od koder je učenec sam razbral splošno pravilo. Dandanes si moramo zapomniti le formulo $o = \pi d$ in vedeti, da pomeni o obseg in d premer kroga. Kaj pa pomeni grška črka π (pi)? No, to pa je, kot vsi dobro vemo, stalno razmerje med obsegom in premerom kroga, ki znaša približno 3,14.

V Egiptu so učenjaki prvič opazili, da število 3 ne predstavlja popolnoma natanko tega razmerja. Resda je bilo v Egiptu število π skrito v drugačno preobleko. Egipčani so se dosti ukvarjali z merjenjem ploščin; vemo pa, da pomeni π tudi razmerje med ploščino kroga in kvadrata, ki ima za polmer stranico. Ali s formulo $p = \pi r^2$.

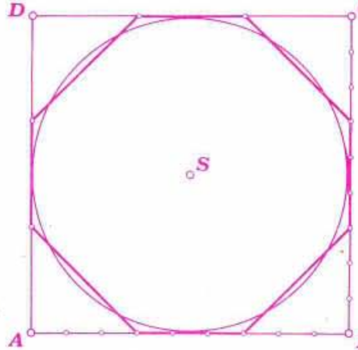
Ali je kaj presenetljivega v tem, da se število π pojavlja v obeh formulah, za obseg in za ploščino kroga? Ne, seveda ne. Kar oglejmo si sliko 1. Ploščino kroga si sestavimo iz velikega števila krožnih izsekov. Če je izsek dovolj majhen, ga mirno lahko nadomestimo s trikotničkom. Višina trikotnička je enaka polmeru r, osnovnico označimo z a. Ploščina mu je tedaj $ra/2$. Da dobimo ploščino kroga, moramo sešteti ploščine vseh izsekov-trikotničkov.



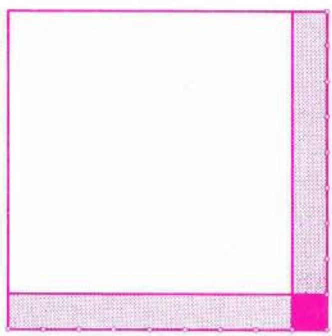
1

če v vsoti izpostavimo $r/2$, nam ostane ravno vsota vseh osnovnic, to je pa natanko obseg kroga $o = 2\pi r$. Po krajšanju z 2 imamo $p = \pi r^2$.

V znamenitem Rhindovem papirusu je izračunana ploščina kroga, ki ima premer 9 hetov*. Oglejmo si sliko 2. Ploščina kroga je (seve približno) enaka ploščini osmerokotnika, ki ga dobimo, ko odrežemo kvadratu *ABCD* vogale - enakokrake pravokotne trikotnike s stranico treh hetov. Ploščina celega kvadrata je enaka 81 setov**, ploščina vseh štirih odrezkov je enaka dvojni ploščini kvadrata s stranico 3 hetov, to je 18 setov. Približno bi bila tedaj ploščina kroga enaka 63 hetom. Vendar pa je neznani računar vzel rajši rezultat 64 hetov. Poglejmo zakaj. No, morda se mu je kar takole na oko zdelo, da je ploščina kroga le nekoliko večja kot ploščina osmerokotnika. Prav gotovo mu je bilo pa važno, da je dobil lep rezultat: krog ima isto ploščino kot kvakvadrat s stranico 8 hetov. Tudi do tega rezultata je prišel s pomočjo risbe - slika 3. Ploščini obeh kvadratov je odvzel tako, da je od velikega kvadrata s stranico 9 hetov odrezal dva pravokotnika, ki sta vsak zase ploščinsko enaka kvadratu s stranico 3 hetov. Resda je pri tem štel potemnjeni kvadratek v preseku obeh pravokotnikov dvakrat, a to ga ni motilo glede na približnost računa in lepi rezultat. Saj je vendar ostal kot ploščinsko enak krogu spet kvadrat, tokrat s stranico 8 hetov.



2


3

Kakšen je približek za število π dobimo iz zgornjega egipčanskega računa. Polmer kroga je enak $r = 9/2$, njegova ploščina $p = \pi.81/4$. Po Rhindovem papirusu bi bilo to enako 64, torej

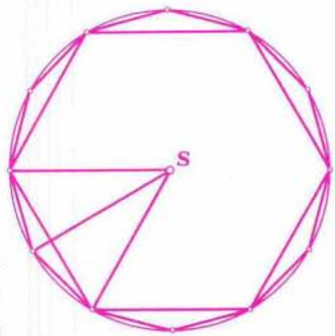
$$\pi . \frac{81}{4} = 64 \quad \text{ali} \quad \pi = 4 . \frac{64}{81} = 4 . \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

* het = egipčanska dolžinska mera
** set = kvadratni het

če izračunamo dve decimalki, dobimo približek za π enak 3,16, kar je resda za celi dve stotinki preveč, a napredek od približka $\pi = 3$ je velikanski.

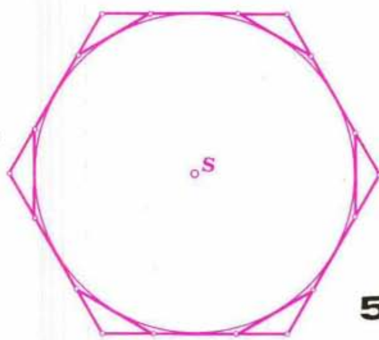
Plamenico znanosti so od Egipčanov prevzeli Grki. Matematika jim ni pomenila več samo zbirke receptov za računanje in zemljemerstvo, ampak so jo predelali v logičen sistem, kjer je bilo treba vsako trditev dokazati, izvesti iz nekaj osnovnih, očitnih resnic - aksiomov. Ploščine kroga se je lotil eden največjih umov antike - Arhimed iz Sirakuz (287-212 p.n.š.). Bilo je to tisočletje in pol po nastanku Rhindovega papirusa.

Poglejmo, kako je računal Arhimed! Na sliki 4. vidimo krog polmera a in vanj včrtan pravilni šestkotnik. Obseg šestkotnika je nekoliko manjši kot obseg kroga. Enak je $6a$. Če bi iz tega približka izračunali število π, bi dobili prastari rezultat $\pi = 3$. Če namesto pravilnega šestkotnika vzamemo pravilni dvanajstkotnik, dobimo boljši rezultat, ki pa da za število π še vedno premajhno vrednost. Krogu očrtani šestkotnik ima večji obseg od kroga, očrtani dvanajstkotnik ima spet manjši obseg od šestkotnika, še vedno pa seveda večjega od kroga (slika 5).



4

Arhimed je nadaljeval to igro z včrtanim in očrtanim 24-kotnikom, 48-kotnikom in 96-kotnikom. Dobil je na ta način zgornjo in spodnjo oceno za število π. Njegov rezultat se glasi: *Število π je večje od $3\frac{10}{71}$ in manjše od $3\frac{1}{7}$.* Posebno zadnji približek $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ je dobro znan in ga še danes često uporabljamo kot nadomestek števila π, saj je ličen ulomek, kjer ne števec ne imenovalec nista preveliki števili.



5

Pomen Arhimedovega računa pa je dalekosežnejši od samega približka. Dve stvari sta, ki dvigata njegovo delo visoko nad račun iz Rhindovega papirusa. Arhimed je podprl svoj račun z dokazom in se ni zadovoljil le s približno skico; njegova metoda daje možnost - če je računar dovolj vztrajen in natančen - izračunati število π poljubno natančno.

Skoraj celih dva tisoč let se znanje o številu π ni premaknilo bistveno naprej od Arhimedovih spoznanj. Resda so v tem času izračunali precej boljših približkov od Arhimedovih 22/7, vendar je metoda računanja ostala njegova.

Od helenskih matematikov po Arhimedu velja omeniti še Ptolemeja iz Aleksandrije (približno leta 150 p.n.š.). V znameniti knjigi Syntaxis mathematica je navedel tablico tetiv za kote od 0° do 180° in sicer s korakom pol stopinje. Od tod je izvedel tudi vrednost za število π. Dal je približek 377/120, ki se ujema s pravo vrednostjo $\pi = 3{,}1415926..$ že na štiri decimalke.

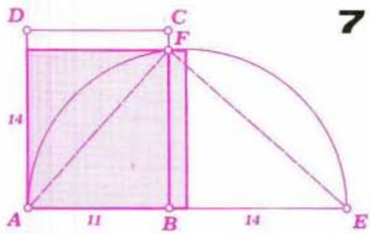
Arhimed

6

Grki so bili hudi matematični puristi. Rešitev kake geometrijske naloge so priznali le, če je bila konstrukcija izvedena z ravnilom in šestilom. Tako so se lotili tudi kroga in nastal je znameniti problem kvadrature kroga, ki zahteva: samo s šestilom in ravnilom pretvori dani krog v ploščinsko enak kvadrat. Recimo, da ima krog polmer r, iskani kvadrat stranico a; potem je $\pi r^2 = a^2$ in $a = r\sqrt{\pi}$. Ta račun nam pokaže, da je rešitev naloge o kvadraturi kroga močno odvisna od števila π. Ker pa je naloga tako enostavno formulirana - rešitev pa sploh ni enostavna - so se je lotevali nešteti matematiki in "matematiki". Kvadratura kroga je postala že prava bolezen in je povzročila poplavo člankov z "rešitvami", dokler ni končno Lindemann leta 1882 dokazal, da je naloga nerešljiva.

Rimljani, ki so za Grki prevzeli vodilno politično in gospodarsko vlogo v Sredozemlju, niso dali matematiki ničesar novega. A prava nesreča za znanost se je začela z nastopom srednjega veka. Zanimanje za vse vede, tudi za matematiko, je upadlo. Samostani so sicer še hranili primerke starih grških knjig, a bral in razumel jih ni več nihče.

Oglejmo si, kako so se lotili kvadrature kroga v srednjem veku. Iz oslovske kože ali iz pergamenta so izrezali krog s premerom 14 palcev in pravokotnik s stranicama 11 in 14 palcev. Izrezana lika so potem položili na skodelici tehtnice in ker je bila le-ta v ravnovesju, so sklepali, da imata oba lika enako ploščino. Seveda, če vzamemo približek $\pi = 22/7$, res dobimo za ploščino kroga $(22/7).7^2 = 22.7 = 11.14$, torej isto ploščino, kot jo ima pravokotnik. In tudi tehtanje likov kot raziskovalni pripomoček bi bilo čisto v redu, če ne bi poznali že veliko boljšega Arhimedovega postopka. Ker tedanji matematiki niso razumeli, da je 22/7 le približek, so menili, da nastopi težava šele zdaj, ko je treba pravokotnik pretvoriti v ploščinsko enak kvadrat. Vemo pa, da je ta naloga otročje lahka. Kar poglejmo na sliko 7. Pravokotnik *ABCD* ima stranici 11 in 14. Na podaljšek stranice *AB* nanesemo daljico *BC* = 14 in dobimo točko *E*. Nad daljico *AE* narišemo polkrog. Ta seka daljico *BC* v točki *F* in daljica *BF* je stranica iskanega kvadrata $BF = \sqrt{11.14}$ (višinski izrek v pravokotnem trikotniku *AEF*).



7

Žal pa so se dogajale v tem temnem času z matematiko še hujše reči. Ker je na nekem mestu v Bibliji omenjeno starodavno obrtniško navodilo, da je obseg kroga trikrat večji od premera, so se takoj našli učenjaki, ki so z Biblijo v roki dokazovali, da je $\pi = 3$!

Peter Petek

MATEMATIKA