

Sferna trigonometrija in čas v astronomiji

↓↓↓

Vid Kavčič

→

Uvod

Lahko bi rekli, da je sferna trigonometrija veja matematike, ki se ukvarja z razmerji med koti in stranici sferičnih trikotnikov na površini krogle, hkrati pa je tudi temeljno orodje v astronomiji in astrofiziki, saj omogoča opis položajev nebesnih teles na nebesni sferi. Zato predstavlja eno izmed pomembnejših znanj, s katerim morajo biti seznanjeni tudi srednješolke in srednješolci, ki se pripravljajo na Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (IOAA), ki bo letos avgusta potekala na Poljskem.

V članku bomo spoznali osnovne pojme sferne trigonometrije, izpeljali ključne enačbe, s katerimi lahko opišemo lego nebesnih teles in njihovo gibanje po nebesni sferi, nato pa se bomo seznanili še s tematikami, povezanimi z različnimi definicijami časa. V prihodnjih številkah bomo v članku obravnavane vsebine podkrepili z dodatnimi rešenimi vajami z izbirnih testov in mednarodnih astronomskih tekmovalij.

Preden pa zagrizemo v sferno trigonometrijo, bomo spoznali osnovne pojme orientacije na Zemlji in običajnimi koordinatnimi sistemi, ki jih pri tem uporabljamo.

Osnovne točke in krogi na nebesni sferi in koordinatni sistemi

Nebesna sfera

Da bi bolje opisali položaje objektov na nebu, uvedemo **nebesno sfero**, na katero projiciramo nebesna telesa in pri tem pozabimo, kako daleč so v resnici. Če nebesno sfero presekamo z ravnino, ki poteka skozi središče krogle, dobimo **glavni** ali **veliki krog**. Delu glavnega kroga pravimo **glavni lok**.

Glavne točke in krogi nebesne sfere

Nebesna sfera je namišljena sfera s poljubnim polmerom in središčem v Zemlji, na katero projiciramo nebesna telesa. **Veliki krog** je presečišče sfere z ravnino, ki poteka skozi njeno središče. Navpičnica, ki gre skozi opazovalčevo oko, prebode nebesno sfero v **zenitu** (nadglavišču) in **nadirju** (podnožišču).

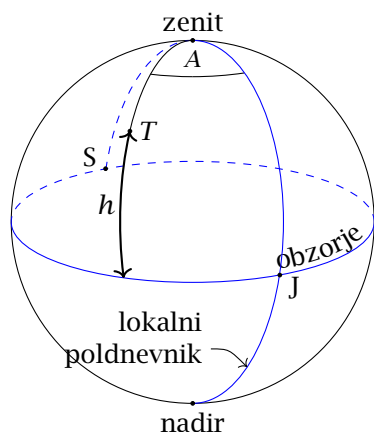
Obzorje je ločnica med zemeljskim površjem in nebom. **Matematično obzorje** je presečišče vodoravne ravnine opazovališča in nebesne krogle. Zastirajo ga drevesa, gore in zgradbe. Takšno presečišče imenujemo **vidno** ali **naravno** obzorje. **Nebesna os** je podaljšek Zemljine navidezne osi, okoli katere se vrti. Nebesna os seka nebesno sfero v **severnem** in **južnem polu**. V bližini severnega je zvezda Severnica. Višina nebesnega pola v danem kraju je enaka geografski širini kraja.

Nebesni ekvator je projekcija Zemljinega ekvatorja na nebesno sfero, torej najdaljši nebesni vzporednik. **Nebesni meridian** je veliki krog na nebesni krogli, ki povezuje severno točko na obzorju, nebesni pol, zenit, južno točko na obzorju in nadir, ter je pravokoten na matematično obzorje. Nebesni meridian seka horizont v **severišču** in **južišču**, nebesni ekvator pa v **vzhodišču** in **zahodišču**.

Horizontski koordinatni sistem

Pri **horizontskem koordinatnem sistemu** sta osnovna velika kroga **horizont** in **nebesni meridian**. Koordinatno izhodišče je točka **južišče**. Pri tem vpeljemo koordinati višino in azimut.

Višinski krog je veliki krog, ki poteka skozi dano telo in zenit. **Višina** h je dolžina loka na višinskem krogu od horizonta do izbranega telesa. Višina telesa na obzorju je enaka 0° . Nad obzorjem zavzame pozitivne vrednosti vse do $+90^\circ$ v zenitu, pod obzorjem pa zavzame negativne vrednosti vse do -90° v nadirju. Zvezde z enako višino ležijo na istem krogu, ki mu pravimo **almukantarat**. **Zenitna razdalja** z je



SLIKA 1.

dolžina loka na višinskem krogu od zenita do telesa. Zenitno razdaljo štejemo od 0° v zenitu pa do 180° v nadirju. Zenitno razdaljo z višino telesa tako očitno povezuje zveza $z = 90^\circ - h$.

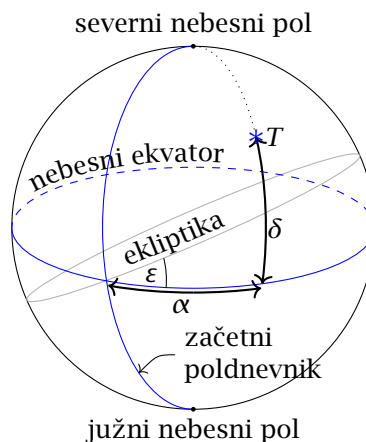
Azimet A je lok od južišča do presečišča višinskega kroga s horizontom. Merimo od 0° do 360° od južišča proti zahodu. **Časovni kot** H je kot med meridianom in deklinacijskim krogom.

Ker se horizontski koordinati teles neprestano spreminjata, je ta sistem vezan na kraj in čas.

Ekvatorialni koordinatni sistem

Pri **ekvatorialnem koordinatnem sistemu** sta osnovna kroga **nebesni ekvator** in glavni krog, ki poteka skozi pol P in **pomladišče** – točko γ . Pomladišče je točka nebesnega ekvatorja, v katero pride Sonce ob spomladanskem enakonočju, in je začetek tega koordinatnega sistema. Z drugimi besedami, je točka, v kateri ekliptika, to je navidezna pot Sonca po nebesni sferi, seka nebesni ekvator.

Deklinacijski krog telesa T je veliki krog skozi to telo in nebesni pol P . **Rektascenzija** α je lok na ekvatorju od pomladišča do presečišča deklinacijskega kroga z ekvatorjem. Merimo jo v obratnem smislu navideznega vrtenja nebesne krogle. Podajamo jo v urah in lahko zavzame vrednosti med 0^h in 24^h , pri čemer 1^h ustreza kotu 15° . **Deklinacija** δ je dolžina loka na deklinacijskem krogu od ekvatorja do telesa T . Štejemo od 0° na nebesnem ekvatorju do $+90^\circ$ na severnem polu in do -90° na južnem polu. Zvezde z enako deklinacijo ležijo na istem **vzporedniku**.



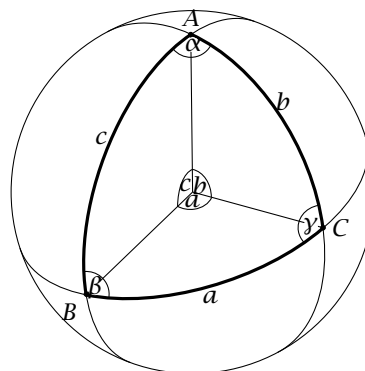
SLIKA 2.

Osnove sferne trigonometrije

Po spoznanih osnovah orientacije in koordinatnih sistemov se lahko končno nadobudni seznanimo z osnovnimi pojmi in obrazci sferne trigonometrije.

Osnovni obrazci sferne trigonometrije

Sferični trikotnik določajo trije glavni krogi, njegove stranice so glavni loki. Dolžine stranic sferičnega trikotnika a, b in c izražamo s koti z vrhom v središču sfere. Kot sferičnega trikotnika definiramo kakor kot med tangentama na dve strani v oglišču trikotnika. Vsota notranjih kotov sferičnega trikotnika α, β in γ je večja od 180° .



SLIKA 3.

Tako kot za ravninski trikotnik tudi za stranice in kote sferičnega trikotnika velja več trigonometrijskih zvez. Osnovni obrazci sferne trigonometrije so





sinusni, kosinusni in sinus-kosinusni izrek za sferični trikotnik:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

$$\cos \beta \sin a = -\cos \alpha \sin b \cos c + \cos b \sin c,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Če so središčni koti stranic majhni: $a, b, c \ll 1$, je sferični trikotnik v približku ravninski trikotnik. Če upoštevamo, da pri majhnih kotih x velja $\sin x \approx x$ in $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, ugotovimo, da sinusni in kosinusni izrek za sferični trikotnik preideta v klasični sinusni in kosinusni izrek za ravninski trikotnik.

Če poznamo tri zaporedne podatke v sferičnem trikotniku (kot in priležni stranici, stranico in priležna kota), lahko četrtega (sosednjega) izračunamo s **formulo štirih delov**:

$$\cos a \cos \gamma = \sin a \cot b - \sin \gamma \cot \beta.$$

S pomočjo osnovnih obrazcev sferne trigonometrije izpeljemo formule za gibanje teles na nebesni sferi.

Primeri uporabe obrazcev sferne trigonometrije v astronomiji

Razdalja med točkama na sferi

Imejmo dve zvezdi na nebesni sferi s koordinatami (δ_1, α_1) in (δ_2, α_2) . Če z glavnimi loki povežemo lego prve zvezde, lego druge zvezde in severni nebesni pol, dobimo sferični trikotnik s stranicama z dolžinama $90^\circ - \delta_1$ in $90^\circ - \delta_2$, ki oklepata kot $\alpha_1 - \alpha_2$. Če za ta sferični trikotnik zapišemo kosinusni izrek, lahko izrazimo kotno razdaljo θ med zvezdama kot

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Če upoštevamo $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, dobimo **formulo za razdaljo objektov na nebesni sferi**:

$$\cos \theta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Višinska enačba

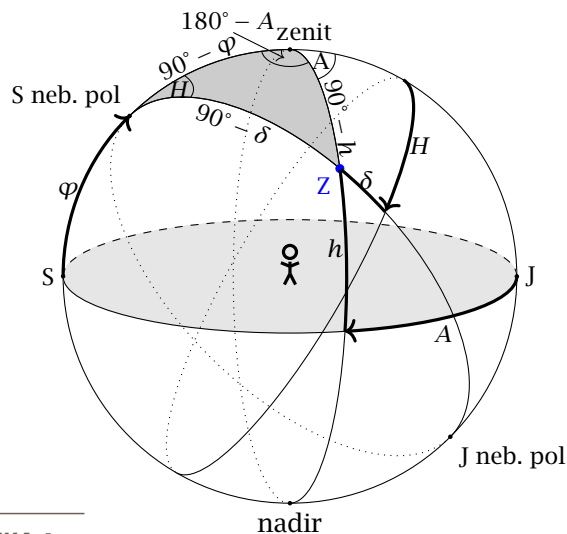
Zamislimo si zvezdo z deklinacijo δ , ki se za opazovalca na geografski širini φ nahaja na višini h , azimutu A in na časovnem kotu H . Oglejmo si sferični trikotnik zvezda–severni nebesni pol–zenit.

Ker poznamo dolžine njegovih stranic (slika 4) in kar dva notranja kota, lahko poskusimo na njem zlorabiti kakšno od trigonometrijskih formul za sferični trikotnik. Za začetek lahko poskusimo s kosinusnim izrekom za kot pri severnem nebesnem polu, ki ustreza H . Velja:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos H.$$

Če spet upoštevamo $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, dobimo **višinsko enačbo**:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$



SLIKA 4.

Kulminacija

Poglejmo, kaj nam enačba pove o legi zvezde, ko ta kulminira. Takrat leži na meridianu in velja $H = 0$. Višinska enačba se nam v tem primeru poenostavi v

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta. \quad (1)$$

Desna stran enačbe spominja na adicijski izrek za kosinus razlike; zapišimo jo kot

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos(\pm(\varphi - \delta)) = \sin(90^\circ \pm (\delta - \varphi)),$$

iz česar sledi, da je višina zvezde ob kulminaciji $h = 90^\circ \pm (\delta - \varphi)$. Kadar je objekt najvišje v južni

smeri, je njegova največja višina enaka $h_1 = 90^\circ + \delta - \varphi$, ko pa je objekt najvišje v severni smeri, je njegova višina enaka $h_2 = 90^\circ - \delta + \varphi$. Zvezi si najlažje zapomnimo z enačbo za zenitno razdaljo ($z = 90^\circ - h$) ob zgornji kulminaciji:

$$\blacksquare z = |\varphi - \delta|.$$

Ob spodnji kulminaciji velja $H = 180^\circ$, iz česar podobno kot zgoraj izpeljemo zvezo

$$\blacksquare \varphi + \delta + z = 180^\circ.$$

Glede na to kako poteče kulminacija, zvezde na nebesni sferi razdelimo na **nadobzornice** (cirkumpolarne zvezde), **vzhajalke** in **podobzornice**. Prve v danem kraju nikoli ne zaidejo, zato lahko vidimo tako zgornjo kot tudi spodnjo kulminacijo. Po drugi strani podobzornice v danem kraju nikoli ne vzidejo, zato se v tem primeru obe kulminaciji zgodita pod obzorjem. Vse preostale zvezde so vzhajalke – te vzhajajo in zahajajo, vidimo pa le njihovo zgornjo kulminacijo.

Vzid in zaid

Kaj lahko povemo o zvezdi, vzhaja oziroma zahaja? Takrat zvezda leži na obzorju in velja $h = 0$, zato višinska enačba takrat preide v:

$$\blacksquare 0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Če enačbo delimo z $\cos \varphi \cos \delta$, dobimo enačbo za časovni kot $\cos H_{v,z}$ vzida oziroma zaida:

$$\blacksquare \cos H_{v,z} = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

V primeru vzida upoštevamo negativno vrednost časovnega kota, v primeru zaida pa pozitivno.

Azimutni enačbi

Zdaj smo uporabili kosinusni izrek za kot $180^\circ - A$, kjer je A azimut zvezde. Velja

$$\blacksquare \begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \varphi) \\ &+ \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A), \\ \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A, \end{aligned}$$

iz česar lahko izrazimo $\cos A$ in dobimo prvo azimutno enačbo:

$$\blacksquare \cos A = -\frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h}.$$

Ponovno lahko pogledamo posebni primer, ko zvezda vzide bodisi zaide in velja $h = 0$. Za azimut $A_{v,z}$ vzida oziroma zaida zgornja enačba preide v

$$\blacksquare \cos A_{v,z} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Za opazovani trikotnik lahko zapišemo tudi sinusni izrek, s katerim povežemo kota H in $180^\circ - A$ ter njuni nasproti ležeči stranici. Tako dobimo drugo azimutno enačbo, ki azimut zvezde poveže z njenim časovnim kotom H , deklinacijo δ in višino h :

$$\blacksquare \cos A = -\frac{\sin H \cos \delta}{\cos h}.$$

Položaj Sonca na nebu

Ker se Zemlja giblje okoli Sonca, se njegov položaj na nebu s časom spreminja. Naj bo L kotna razdalja Sonca od pomladišča, gledano v smeri, kot je označena na skici. Kot med ekliptiko in nebesnim ekvatorjem ustreza ravno kotu $\varepsilon = 23,5^\circ$, kar je posledica nagnjenosti Zemljine osi glede na pravokotnico na njen tir okoli Sonca. Če za sferični pravokotni trikotnik zapišemo sinusni izrek, dobimo

$$\blacksquare \frac{\sin \delta}{\sin L} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 90^\circ},$$

iz česar sledi zveza za deklinacijo Sonca:

$$\blacksquare \sin \delta_\odot = \sin \varepsilon \sin L.$$

Za isti trikotnik lahko zapišemo tudi dva kosinusna izreka:

$$\blacksquare \begin{aligned} \cos \delta &= \cos \alpha \cos L + \sin \alpha \sin L \cos \varepsilon, \\ \cos L &= \cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta \cos 90^\circ, \end{aligned}$$

iz česar lahko pridemo enačbo za Sončevo rektascenzijo:

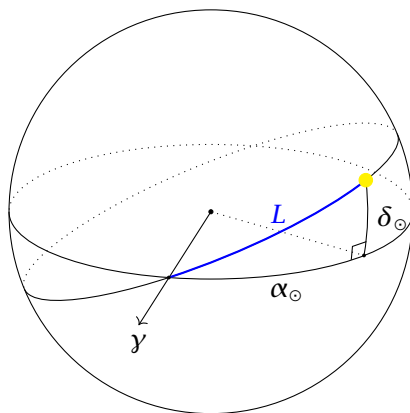
$$\blacksquare \operatorname{tg} \alpha_\odot = \cos \varepsilon \operatorname{tg} L.$$

Ker se Zemlja giblje okoli Sonca skoraj po krožnem tiru, tudi L v prvem približku narašča enakomerno. Njegovo velikost lahko izračunamo kot

$$\blacksquare L = \frac{\Delta t}{365,25} \cdot 360^\circ,$$

kjer je Δt število dni od spomladanskega enakonočja.





SLIKA 5.

S pomočjo skice, ki prikazuje pot Sonca po ekliptiki, lahko izpeljemo formuli za spreminjanje deklinacije in rektascenzije Sonca med letom.

Čas

Abstraktnost časa je eno izmed najbolj skrivnostnih in zapletenih filozofskih vprašanj, ki se zdi, da nikoli ne izgubi svoje aktualnosti. Čeprav je čas tako osnovni in morebiti samoumeven koncept, pa je pravzaprav zelo težko opredeljiv in razumljiv.

V astronomiji v grobem ločimo pojma zvezdni in Sončev čas. Oba načina opredelitve časa temeljita na opazovanju gibanja Zemlje glede na gibanje zvezd in Sonca. **Zvezdni čas** je povezan s časom, ki ga potrebuje Zemlja, da se enkrat zavrti okoli svoje osi glede na zvezde. Zvezdni dan je tako časovni razmik, ki ga potrebuje Zemlja, da se zavrti za 360 stopinj glede na primer na oddaljeno zvezdo, ki se nahaja na isti točki na nebu.

Sončev čas pa je povezan s časom, ki ga potrebuje Zemlja, da se vrti enkrat okoli svoje osi glede na Sonce. To pomeni, da je Sončev dan časovni interval, ki ga potrebuje Zemlja, da se zavrti za 360 stopinj glede na Sonce. Ker pa se Zemlja giblje okoli Sonca po eliptični orbiti, se dolžina Sončevega dne v različnih delih leta razlikuje. V zimskem času je Sončev dan krajši, v poletnem pa daljši. V povprečju pa je zaradi vrtenja Zemlje okoli Sonca zvezdni dan za približno 4 minute krajši od Sončevega.

Zvezdni čas se uporablja za določanje časa v zvezdnih navigacijskih sistemih, medtem ko se Sončev čas uporablja v vsakdanjih časovnih enotah, kot so ure, minute in sekunde. Vendar pa so v sodobni dobi

časovne enote, kot jih poznamo v vsakdanjem življenju, določene s pomočjo mednarodnega časa (UTC), ki temelji na osnovi atomske ure, ki pa ne sledijo zvezdnemu ali Sončevemu času.

V nadaljevanju bomo pojme, kot sta zvezdni čas in Sončev čas, natančneje definirali, hkrati pa ju bomo povezali s časom, ki ga kaže naša ura in s katerim se srečamo v še tako dolgočasnem vsakdanu.

Zvezdni čas

Zvezdni čas merimo s časovnim kotom točke pomladišča in je enak vsoti rektascenzije α zvezde in njenega časovnega kota H :

$$t_* = H_\gamma = \alpha + H. \quad (2)$$

Ko je pomladišče v kulminaciji, je zvezdni čas enak nič. Časovni kot H_A zvezde na geografski dolžini λ_A in časovni kot istega telesa na greenwiškem poldnevniku H_G sta povezana z enačbo

$$H_A = H_G + \lambda_A.$$

Sončev čas

Za vsakdanjo rabo zvezdni čas ni praktičen, saj točka pomladišča ni očitna na nebu in tudi ne določa ritma našega življenja, tako kot ga Sonce. Za bitja na Zemlji, ki so odvisna od Sončeve svetlobe, je torej čas bolj praktično meriti glede na Sonce. Kot mero za pravi Sončev čas $t_\lambda^\odot$ lahko izberemo časovni kot pravega Sonca, en pravi Sončev dan pa je presledek med zaporednima kulminacijama pravega Sonca.

Pravi Sončev čas $t_\lambda^\odot$ je časovni presledek med dvema zaporednima kulminacijama Sonca na meridianu. Sonce za zvezdami vsak dan napravi 4 minute zaostanka, kar v enem letu nanese za en dan.

Če bi med letom merili ta presledek oziroma dolžino pravega Sončevega dneva, bi ugotovili, da se spreminja, ker rektascenzija Sonca ne narašča linearno s časom zaradi dveh učinkov: zaradi eliptičnosti Zemljinega tira se Sonce neenakomerno giblje po ekliptiki in enkrat prehiteva, drugič zaostaja. Ta učinek ima periodo enega leta. Poleg tega je ravnina ekliptike nagnjena glede na nebesni ekvator, zaradi česar se v trigonometričnih funkcijah skriva dodatna funkcija časa, ki ima periodo pol leta.

Zato za potrebe merjenja časa definiramo **srednje Sonce** in **srednji Sončev čas** t_λ^S . To je namišljeno

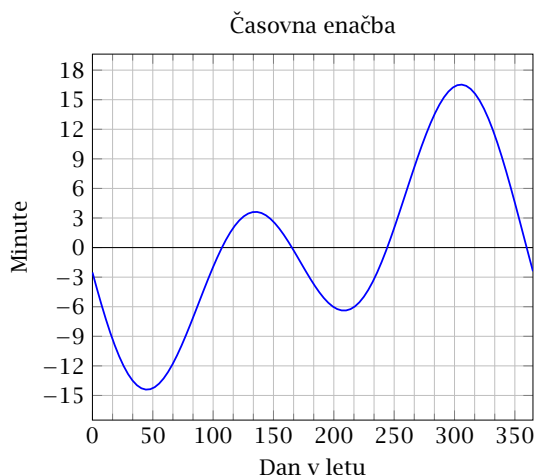
telo, ki se giblje enakomerno po nebesnem ekvatorju in, tako kot pravo Sonce, naredi en obhod v enem letu. Ob pomladnem enakonočju je, tako kot pravo Sonce, v točki pomladišča (γ) in ima rektascenzijo $\alpha_S = 0^h$, nato pa njegova rektascenzija narašča linearno s časom.

Definirajmo, da je srednji Sončev čas časovni kot srednjega Sonca:

$$t_{\lambda}^S = H_S,$$

en srednji Sončev dan pa je presledek med zaporednima kulminacijama srednjega Sonca. Ker narašča $\alpha_S^{\odot}$ linearno s časom, je dolžina srednjega Sončevega dneva vedno enaka. Razliko med pravi sončevim časom $t_{\lambda}^{\odot}$ in srednjim sončevim časom t_{λ}^S imenujemo **časovna enačba**:

$$ET = t_{\lambda}^{\odot} - t_{\lambda}^S.$$



SLIKA 6.

Časovna enačba za posamezni dan v letu.

Meščanski čas

Ker je dolžina srednjega Sončevega dneva vedno enaka (24 h), za merjenje časa uporabimo srednje Sonce. A ker je za praktično življenje nekoliko nerodno, da se srednji Sončev dan začne sredi belega dne (ob zgornji kulminaciji srednjega Sonca), so uvedli **meščanski čas** t_{λ}^m , ki ima začetek štetja oziroma dneva premaknjen za pol dneva, zato moramo srednjemu

Sončevemu času prišteti 12 h:

$$t_{\lambda}^m = t_{\lambda}^S + 12 \text{ h}.$$

Vsi do zdaj definirani časi: zvezdni, pravi Sončev, srednji Sončev in meščanski, so krajevni časi, kar pomeni, da so odvisni od zemljepisne dolžine kraja λ , zato smo jim tudi pripisali pripadajoči indeks, ki nas na to opozarja.

Univerzalni čas – UT

Po dogovoru je krajevni meščanski čas na Greenwichu določen kot UT (**Universal time**). S tem so meščanski časi v drugih krajih enaki

$$t_{\lambda}^m = UT + \lambda.$$

Conski čas

V praksi je uveljavljen **conski čas**, ki za vse meridianske pasove širine 15° določa enak čas:

$$t_{\lambda}^m = UT + n.$$

Krajevni zvezdni čas t_{λ}^* in čas, ki ga kaže naša ura t_n^z , povezuje zveza

$$t_{\lambda}^* = H + \alpha = S(0^h UT) + \lambda + \gamma(t_n^z - n),$$

kjer je $\gamma = \frac{366,25}{365,25}$ faktor pretvorbe med zvezdnimi in časovnimi sončevimi enotami, n časovni pas in $S(0^h UT)$ krajevni zvezdni čas na Greenwichu ob $UT = 0$ h, ki ga za vsak dan v letu najdemo v tabelah.

V poletnem času so številne države zaradi energetskih razlogov uveljavile **poletni čas**, ki za eno uro prehitveva običajni čas. V državah Evropske unije se poletni čas začne zadnjo nedeljo v marcu ob 1. uri zjutraj, ko se ura premakne za eno uro naprej, in konča zadnjo nedeljo v oktobru ob 1. uri, ko se ura premakne nazaj. Tako v Sloveniji v zimskem času pripadamo časovnemu pasu $UT + 1$, v poletnem času pa časovnemu pasu $UT + 2$.

Literatura

- [1] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental astronomy, fifth edition*, Helsinki, Springer, 2007.
- [2] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2006.

× × ×