Zaporedja in epidemije

Tadej Starčič

Vse od nastanka prvih civilizacij se ljudje srečujemo z naravnim pojavom širjenja nalezljivih bolezni. Moderni matematični jezik za modeliranje zakonitosti tega in podobnih pojavov so diferencialne enačbe. Vendar pa si lahko pri reševanju enostavnejših in bolj idealiziranih problemov pomagamo tudi z zaporedji.

Z zaporedjem opišemo, kako se število ljudi z neko lastnostjo spreminja glede na enaka časovna obdobja, po dnevih, tednih, petdnevjih itd. V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj preprostih modelov, pri katerih poleg števila okuženih upoštevamo tudi inkubacijsko dobo, čas ozdravitve, hitrost širjenja okužb in podobno.

Zaradi lažjega razumevanja bomo uporabljali naslednje oznake:

- n ... število časovnih enot (npr. dni, tednov, petdnevij)
  O_n ... število vseh okuženih po n časovnih enotah
  N_n ... število okuženih, ki še niso zboleli in ne prenašajo virusa
  K_n ... število zbolelih, ki so v karanteni in ne prenašajo virusa
  Z_n ... število zbolelih, ki prenašajo virus

Prvi člen O_1 v zaporedju $O_1, O_2, O_3, \ldots$ nam tako podaja število okuženih po prvem časovnem obdobju, člen O_3 pa število vseh okuženih ob koncu tretjega časovnega obdobja. Opazimo lahko, da za število vseh okuženih velja $O_n = N_n + Z_n + K_n$.

Za začetek si oglejmo zelo enostaven zgled.

Primer 1. *Denimo, da neki virus takoj ob okužbi povzroči lažjo, a neozdravljivo bolezen. Vsak zboleli nato vsak dan okuži po enega človeka. Če je prvi dan bolan en človek, potem je po n dneh število okuženih oziroma zbolelih enako*

- $O_n = Z_n = 2^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Iz opisanih pogojev sledi, da za število okuženih velja $O_1 = 1$ in $O_{n+1} = 2O_n$ (ter hkrati $N_n = K_n = 0$). Torej je O_n geometrijsko zaporedje s kvocientom dveh zaporednih členov enakim 2. Nekaj začetnih vrednosti je zbranih v tabeli 1.

n	1	2	3	4	5	...	n
O_n	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

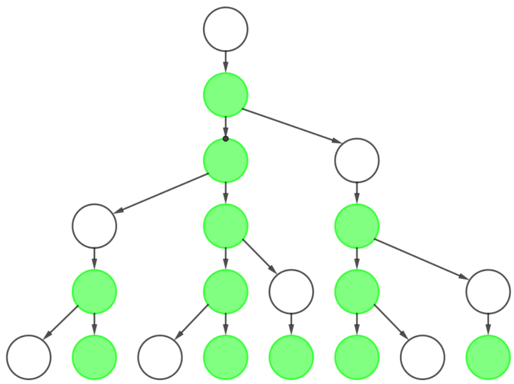
TABELA 1.
Zaporedje O_n je geometrijsko.

Naslednji primer je analog znanega modela, ki opisuje populacijo zajcev. Tega je v obliki naloge v svojem delu Liber Abaci opisal že znameniti italijanski matematik Fibonacci v 13. stoletju.

Primer 2. *Naj velja, da vsak okuženi zboli po enem tednu, in od takrat naprej vsak teden okuži po enega človeka. Spet predpostavimo, da je bolezen neozdravljiva, a ne ogroža življenja, prvi teden pa je okužena ena oseba. Potem za tedensko širjenje virusa velja*

- $O_{n+2} = O_{n+1} + O_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (Z_{n+2} = Z_{n+1} + Z_n).$

Pri izbranih začetnih členih $N_1 = 1$, $Z_1 = 0$ in $O_1 = 1$ lahko grafično predstavimo prvih nekaj členov zaporedij N_n (bele kroglice) in Z_n (zelene kroglice); glejte sliko 1.



SLIKA 1.
Primer 2 za $N_1 = O_1 = 1$ in $Z_1 = 0$

Skrbni bralec je verjetno opazil, da je v četrti (oz. peti) vrstici natanko toliko zelenih kroglic, kot je vseh kroglic v tretji (oz. četrti) vrstici. Podobno je število belih kroglic v četrti (oz. peti) vrstici enako številu zelenih kroglic v tretji (oz. četrti) vrstici. Na splošno velja, da je število zbolelih po $n+1$ tednih tolikšno kot število okuženih po n tednih, število nekužnih (vendar okuženih) po $n+1$ tednih pa enako številu zbolelih po n tednih. Torej je $Z_{n+1} = O_n$ ter $N_{n+1} = Z_n$ in sledi

- $$O_{n+2} = Z_{n+2} + N_{n+2} = Z_{n+2} + Z_{n+1} = O_{n+1} + O_n.$$

S pomočjo te rekurzivne formule lahko enostavno izračunamo, kako se tedensko spreminja število okuženih; glejte tabelo 2.

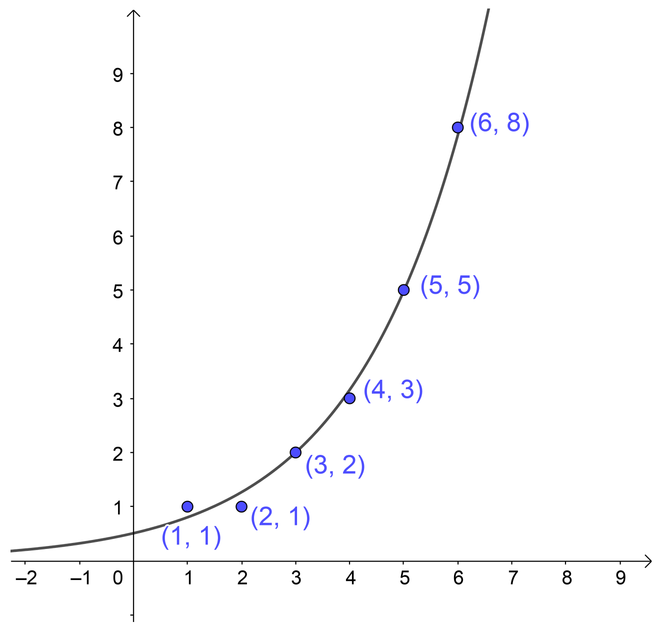
n	1	2	3	4	5	6
N_n	1	0	1	1	2	3
Z_n	0	1	1	2	3	5
O_n	1	1	2	3	5	8

TABELA 2.
Zaporedje O_n je Fibonaccijevo.

Že prvih nekaj členov v grafičnem prikazu zaporedja O_n nam da slutiti, da bo rast eksponentna (slika 2). In res. Bralci lahko pri danih začetnih dveh členih $O_1 = O_2 = 1$ poskusijo z indukcijo pokazati splošno formulo

- $$O_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Za dovolj velike n je izraz $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ poljubno majhen, zato je O_n približno enako $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, kar pomeni eksponentno rast.



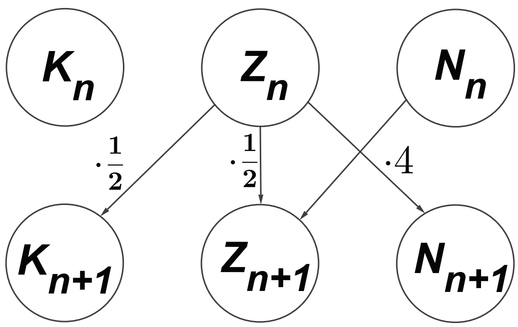
SLIKA 2.
Grafu zaporedja O_n se lepo prilega eksponentna funkcija, ki jo v programu GeoGebra narišemo z ukazom `EksponentnaTrendnaČrta(<seznam točk>)`.

Na podoben način obravnavamo tudi naslednji primer.

Primer 3. *Denimo, da ljudje po okužbi zbolijo po petih dneh. Polovica zbolelih takoj odide v karanteno in v petih dneh ozdravijo, druga polovica zbolelih pa širi virus naprej tako, da vsak izmed njih v naslednjem petdnevju okuži po 8 ljudi. Potem velja naslednje:*

- $$O_{n+2} = \frac{1}{2}O_{n+1} + 4O_n, \quad n \geq 2.$$

V tem primeru za začetek grafično predstavimo povezavo med ustreznimi zaporedji ter tabelirajmo nekaj njihovih členov. Ob tem privzemimo, da velja $N_1 = O_1 = 8$ in $K_1 = Z_1 = 0$ (slika 3).



n	1	2	3	4	5
N_n	8	0	32	16	136
Z_n	0	8	4	34	33
K_n	0	0	4	2	17
O_n	8	8	40	52	186

SLIKA 3.
Povezave med zaporedji in tabela vrednosti za začetne podatke $N_1 = O_1 = 8$ in $Z_0 = K_1 = 0$ v primeru 3.

Hitro opazimo, da velja $N_{n+1} = 8 \cdot \frac{1}{2} Z_n = 4Z_n$ (slika 3). Od tod izpeljemo $Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} + 4Z_n$. Zato velja tudi $4Z_{n+2} = 2Z_{n+1} + 16Z_n$ oziroma $N_{n+3} = \frac{1}{2} N_{n+2} + 4N_{n+1}$. Ker je $K_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$, tudi za člene K_n dobimo podobno zvezo. Končno sledi:

- $$\begin{aligned} O_{n+3} &= K_{n+3} + Z_{n+3} + N_{n+3} = \\ &= (\frac{1}{2} K_{n+2} + 4K_{n+1}) + (\frac{1}{2} Z_{n+2} + 4Z_{n+1}) + \\ &\quad + (\frac{1}{2} N_{n+2} + 4N_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2}(K_{n+2} + Z_{n+2} + N_{n+2}) + \\ &\quad + 4(K_{n+1} + Z_{n+1} + N_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} O_{n+2} + 4O_{n+1}. \end{aligned}$$

Z reševanjem ustrezne diferenčne enačbe bi lahko utemeljili, da je $O_n \approx c \cdot (\frac{1+\sqrt{65}}{4})^n$ za velike n, kjer je $c > 0$ neka konstanta. To pomeni, da je rast števila okuženih ponovno eksponentna z osnovo približno $2{,}3$. Če pa bi v primeru 3 v karanteno poslali vse zbolele, bi bil podoben primeru 1, kjer je število okuženih raslo eksponentno z osnovo 2. Karantena bi torej nekoliko upočasnila širjenje virusa.

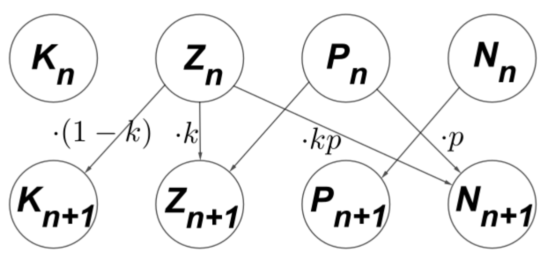
Za konec si oglejmo še situacijo, ki dokaj dobro (seveda ne povsem) spominja na trenutni koronavirus.

Primer 4. *Denimo, da neki virus povzroča bolezen, ki jo je mogoče ozdraviti, a žal lahko tudi vzame kakšno življenje. Vsak okuženi s to boleznijo po petih dneh začne širiti virus in v naslednjih petih dneh okuži po p ljudi, zboli pa po desetih dneh. Predpostavimo, da delež k zbolelih zboli lažje in se ne testira oziroma izolira, zato virus širijo naprej (v petdnevju okužijo p ljudi), drugi pa v karanteni bodisi ozdravijo bodisi umrejo. Potem velja*

- $$O_{n+2} = kO_{n+1} + pO_n, \quad n \geq 2$$
  $$(Z_{n+2} = kZ_{n+1} + pZ_n).$$

Z oznako P_n tokrat dodatno označimo še število okuženih ljudi v n-tem petdnevju, ki še niso zboleli, vendar so že prenašalci virusa. Sledi (slika 4):

- $Z_{n+1} = kZ_n + P_n, \quad N_{n+1} = kpZ_n + pP_n,$
  $P_{n+1} = N_n, \quad K_{n+1} = (1-k)Z_n \qquad n \in \mathbb{N}.$



SLIKA 4.
Povezave med zaporedji v primeru 4.

Potem je

- $Z_{n+3} = kZ_{n+2} + P_{n+2} = kZ_{n+2} + N_{n+1}$
$= kZ_{n+2} + kpZ_n + pP_n$
$= kZ_{n+2} + kpZ_n + p(Z_{n+1} - kZ_n)$
$= kZ_{n+2} + pZ_{n+1}$

in nato

- $P_{n+3} = Z_{n+4} - kZ_{n+3}$
$= kZ_{n+3} + pZ_{n+2} - k(kZ_{n+2} + pZ_{n+1})$
$= k(Z_{n+3} - kZ_{n+2}) + p(Z_{n+2} - kZ_{n+1})$
$= kP_{n+2} + pP_{n+1}.$

Podobno kot v primeru 3 tudi sedaj izpeljemo enako rekurzivno zvezo še za druga zaporedja.

Tudi v tem primeru bo dobljena rast števila okuženih eksponentna, seveda pa je odvisna od izbire konstant $p \in \mathbb{N}$ in $k \in [0,1]$. V primeru, ko je $p = 4$ in $k = 0,5$, situacija sovpada s Primerom 3, v primeru, ko je $p = 1$ in $k = 1$, pa s Primerom 2.

S pomočjo računalniških programov lahko zdaj preprosto tabeliramo ustrezna zaporedja. V GeoGebri lahko denimo izdelamo drsnika za konstanti p in k, člene zaporedja pa tabeliramo tako, da v celice prvih treh vrstic stolpca A vnesemo začetne člene, v celico A4 pa vpišemo =k*A3+p*A2. Zadnji vnos nato prepišemo v preostale celice stolpca A.

Seveda se bralci in bralke gotovo zavedajo, da v članku opisani modeli zelo poenostavljajo resnično situacijo. Za modele, ki bi dejansko pomagali epidemiologom obvladovati razvoj epidemije, je potrebno še precej več matematičnega kot tudi epidemiološkega znanja.

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

				1	6		3
			7		3		
2		4	3			5	
7							6
			6	8	4		
5					1	7	
8		2					

REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	8	7	5	1	6	2	3
6	1	3	2	4	7	8	5
1	5	8	7	6	3	4	2
2	6	4	3	7	8	5	1
7	4	1	8	5	2	3	6
3	2	5	6	8	4	1	7
5	3	6	4	2	1	7	8
8	7	2	1	3	5	6	4