Od mosta v Dublinu do rotacij s kvaternioni

Irena Kosi-Ulbl

Na začetku prispevka se bomo na kratko posvetili številom, ki jih velikokrat srečamo v vsakdanjem življenju – realnim številom. Vemo, da lahko realna števila na enolični način predstavimo na številski premici.

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ je definiranih več računskih operacij, osnovni med njimi pa sta dve:

- seštevanje: $\forall a, b \in \mathbb{R};\ \ a + b \in \mathbb{R}$ (vsota),
- množenje: $\forall a, b \in \mathbb{R};\ \ a \cdot b \in \mathbb{R}$ (produkt).

Za seštevanje realnih števil veljajo naslednji zakoni:

I. Komutativnostni zakon
$\forall a, b \in \mathbb{R};\ \ a + b = b + a$

II. Asociativnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ \ (a + b) + c = a + (b + c)$

III. Obstoj nevtralnega elementa
$\exists 0 \in \mathbb{R};\ \ \forall a \in \mathbb{R},\ \ a + 0 = a$

IV. Obstoj nasprotnega elementa
$\forall a \in \mathbb{R};\ \ \exists\ -a \in \mathbb{R};\ \ a + (-a) = 0$

Za množenje realnih števil veljajo naslednji zakoni:

V. Komutativnostni zakon
$\forall a, b \in \mathbb{R};\ \ a \cdot b = b \cdot a$

VI. Asociativnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

VII. Obstoj nevtralnega elementa
$\exists\ 1 \in \mathbb{R};\ \ \forall a \in \mathbb{R},\ \ a \cdot 1 = a$

VIII. Obstoj inverznega elementa
$\forall a \neq 0 \in \mathbb{R};\ \ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R};\ \ a \cdot a^{-1} = 1$

Seštevanje in množenje povezuje:

IX. Distributivnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

X. Nevtralni element za seštevanje in nevtralni element za množenje ne sovpadata:
$0 \neq 1$.

Množica realnih števil skupaj z operacijama seštevanje in množenje, za kateri veljajo našteti zakoni, je poseben primer matematične strukture, ki jo imenujemo končnorazsežna algebra z deljenjem.

Sedaj se spomnimo kompleksnih števil. Vemo, da lahko kompleksna števila na enolični način predstavimo v ravnini. Tudi v množici kompleksnih števil definiramo operaciji seštevanje in množenje, za kateri veljajo enaki zakoni, kot za realna števila.

Ali lahko s posploševanjem nadaljujemo na podoben način?

Irski kraljevi astronom Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) se je po svojem delu s področij mehanike in optike posvetil algebri, natančneje kompleksnim številom (1835), pri čemer je kompleksno število definiral kot urejeni par realnih števil. S tem je bilo omogočeno – kot smo zapisali prej – da vsako kompleksno število na enolični način predstavimo v kompleksni ravnini. Kasneje je Hamilton poskušal to lastnost posplošiti na trirazsežni prostor. Po vzoru kompleksnih števil, kjer uporabimo običajno enoto iz množice realnih števil in eno imaginarno enoto, je domneval, da potrebuje eno dodatno imaginarno enoto (točke v trirazsežnem prostoru bi torej opisal z urejenimi trojicami oziroma s števili oblike $a + bi + cj$, $a, b, c \in \mathbb{R}$). Več let si je prizadeval, da bi ustvaril algebraični sistem z eno realno in dvema imaginarnima komponentama, vendar mu ni uspelo. Brez težav je definiral seštevanje (in odštevanje) ter množenje trojic števil, zataknilo pa se je pri deljenju. Hamilton je seveda želel, da bi »nova« števila pri množenju (oziroma deljenju) zadoščala podobnim pravilom kot realna in kompleksna števila. Šele nekaj let kasneje je ugotovil, da bo za razrešitev problema potreboval štiri in ne le treh dimenzij.

Zgodovinski zapisi pravijo, da je Hamilton dobil genialno idejo za rešitev tega problema 16. oktobra 1843 v Dublinu na sprehodu proti Irski kraljevi akademiji (Royal Irish Academy). Zamisel je temeljila na vpeljavi sistema treh imaginarnih enot i, j in k ter na posebnem pravilu za množenje, ki ga bomo predstavili kasneje v prispevku.

Kot je Hamilton o odkritju pozneje zapisal v pismu svojemu sinu, je bil tako vznesen nad idejo, ki bo rešila več let nerazrešen problem, da je pravilo za množenje z nožem vrezal v kamen mosta Brougham Bridge, preko katerega je takrat hodil. Pri tem je najbolj nenavadno to, da most Brougham Bridge v Dublinu sploh ne obstaja. Izkazalo se je, da se je Hamilton v pismu svojemu sinu zmotil – pravilo za množenje je vrezal v steno mosta Broome Bridge, katerega ime se enako izgovori kot Brougham Bridge.

Hamilton je urejene četverice realnih števil (a, b, c, d) oziroma elemente oblike $a + bi + cj + dk$, ki jih množimo v skladu s prej omenjenim pravilom, imenoval *kvaternioni*. Proučevanju teh števil je nato posvetil preostanek svojega življenja. Množico kvaternionov označimo v spomin na Hamiltona s simbolom **H**.

Danes vemo, da je bil Hamiltonov problem zares nerešljiv v trirazsežnem prostoru. O tem namreč govori trditev, znana kot Frobeniusov izrek (F. G. Frobenius, 1849-1917, nemški matematik), ki pravi, da je realna končno dimenzionalna asociativna algebra z deljenjem izomorfna realnim številom, kompleksnim številom ali kvaternionom. (Pripomnimo, da v matematiki med izomorfnimi objekti – ko govorimo o njihovih lastnostih – ne ločimo).

SLIKA 1.
Zapis na mostu Broome Bridge v Dublinu v spomin Hamiltonu in njegovemu odkritju kvaternionov. Vir: `http://atlas.ingeniousireland.ie/a-eureka-moment-broome-bridge`

Kvaternione lahko vpeljemo na različne načine. V prispevku jih bomo predstavili kot števila $q \in \mathbf{H}$, ki jih na enolični način zapišemo kot vsote štirih členov ali kot urejene četverice:

- $q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = (a, b, c, d)$,

pri čemer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ imenujemo komponente kvaterniona q, elemente 1, i, j in k pa bazni vektorji ali bazni elementi. Tudi bazni vektorji so elementi množice **H**, saj jih lahko predstavimo kot urejene četverice na naslednji način:

- $1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0),$
  $j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1).$

Dva kvaterniona sta enaka natanko takrat, ko se ujemata v vseh štirih komponentah. Kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ in $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ sta torej enaka natanko takrat, ko je

- $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2.$

Seštevanje kvaternionov definiramo kot seštevanje »po komponentah«. Tako je za poljubna $q_1, q_2 \in \mathbf{H}$

- $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + {} + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k.$

Seštevanje kvaternionov je komutativno in asociativno (tudi za kvaternione veljata zakona I in II, ki smo ju zapisali za realna števila).

Nevtralni element za seštevanje je ničelni kvaternion $q = 0 = 0 \cdot 1 + 0i + 0j + 0k$ (zakon III).

Za vsak kvaternion $q = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ obstaja nasprotni kvaternion $-q = -a - bi - cj - dk \in \mathbf{H}$ (zakon IV).

Zgled 1. Za kvaterniona $q_1 = 5 - 2i + 2j + 4k$ in $q_2 = -3 - 7i + j - 8k$ izračunajmo $q_2 + (-q_1)$:

- $q_2 + (-q_1) =$
  $= (-3 - 7i + j - 8k) + (-5 + 2i - 2j - 4k)$
  $= -8 - 5i - j - 12k.$

Na množici **H** je definirano tudi množenje s skalarjem (z realnim številom). Števila $\alpha \in \mathbb{R}$ tvorijo podmnožico množice **H**, saj je

- $\alpha = \alpha \cdot 1 + 0i + 0j + 0k.$

Produkt kvaterniona $q = a+bi+cj+dk \in \mathbf{H}$ s skalarjem $\alpha \in \mathbb{R}$ izračunamo tako, da vsako komponento kvaterniona pomnožimo z α:

- $\alpha q = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk.$

Za tako definirano množenje kvaternionov s skalarji velja distributivnost glede na seštevanje kvaternionov:

- $\alpha (q_1 + q_2) = \alpha q_1 + \alpha q_2$
  za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in za vse $q_1, q_2 \in \mathbf{H}$

ter distributivnost glede na seštevanje skalarjev:

- $(\alpha + \beta) q = \alpha q + \beta q$
  za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in za vsak $q \in \mathbf{H}$.

Za poljubna skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubni kvaternion $q \in \mathbf{H}$ velja »neprava asociativnost«:

- $(\alpha\beta) q = \alpha (\beta q)$
  za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in za vsak $q \in \mathbf{H}$.

Obstaja tudi skalar $1 \in \mathbb{R}$, tako da je $1 \cdot q = q$ za vsak kvaternion $q \in \mathbf{H}$.

Zgled 2. Za kvaterniona $q_1 = 5 - 2i + 2j + 4k$ in $q_2 = -3 - 7i + j - 8k$ ter skalarja $\alpha = 2$ in $\beta = -1$ izračunajmo $\alpha q_1 - \beta (\alpha q_2) + \beta q_1$.

Z upoštevanjem navedenih lastnosti je

- $$\begin{aligned}\alpha q_1 - \beta (\alpha q_2) + \beta q_1 &= (\alpha + \beta) q_1 - (\beta\alpha) q_2 = \\ &= (2-1) \cdot (5 - 2i + 2j + 4k) - \\ &\quad - (-1) \cdot 2 (-3 - 7i + j - 8k) = \\ &= -1 - 16i + 4j - 12k.\end{aligned}$$

V množico $\mathbf{H}$ lahko vpeljemo tudi množenje elementov. Kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ in $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ zmnožimo tako, da privzamemo veljavnost distributivnostnega zakona (zakon IX) in upoštevamo pravila za množenje baznih elementov i, j, k (to pravilo je Hamilton vrezal na dublinski most):

- $$\begin{aligned}&i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,\\ &ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.\end{aligned} \tag{1}$$

Tako je produkt kvaternionov q_1 in q_2 enak

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 &= \\ &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 + b_1 a_2 i + c_1 a_2 j + d_1 a_2 k + a_1 b_2 i + \\ &\quad + b_1 b_2 i^2 + c_1 b_2 ji + d_1 b_2 ki + a_1 c_2 j + b_1 c_2 ij + \\ &\quad + c_1 c_2 j^2 + d_1 c_2 kj + a_1 d_2 k + b_1 d_2 ik + \\ &\quad + c_1 d_2 jk + d_1 d_2 k^2.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem pravil (1) pa dobimo po nekaj korakih računanja

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 = a_1 a_2 &- b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + \\ &+ (a_2 b_1 + a_1 b_2 - c_2 d_1 + c_1 d_2) i + \\ &+ (a_2 c_1 + b_2 d_1 + a_1 c_2 - b_1 d_2) j + \\ &+ (a_2 d_1 - b_2 c_1 + b_1 c_2 + a_1 d_2) k.\end{aligned} \tag{2}$$

Ugotovimo, da je produkt dveh kvaternionov spet kvaternion.

Zgled 3. Izračunajmo produkt kvaternionov $q_1 = 2 - j + 3k$ in $q_2 = -3i + j - k$.

Z upoštevanjem pravila (2) je

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 &= 0 + 0 + 1 + 3 + (0 - 6 - 3 + 1) i + \\ &\quad + (0 - 9 + 2 - 0) j + (0 - 3 + 0 - 2) k = \\ &= 4 - 8i - 7j - 5k.\end{aligned}$$

Vrnimo se spet k pravilom za množenje baznih elementov i, j, k. Opazimo, da nas druga vrstica teh pravil spominja na vektorski produkt vektorjev standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$. Zares obstaja povezava med vektorji in kvaternioni. Vsak kvaternion $q \in \mathbf{H}$ lahko namreč predstavimo kot vsoto skalarnega dela $a \in \mathbb{R}$ in vektorskega dela $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$:

- $q = a + \vec{q},$

pri čemer je $\vec{q} = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pa v tem primeru predstavljajo vektorje standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$. S tako predstavljenimi kvaternioni lahko zapišemo produkt dveh kvaternionov na krajši način. Za kvaterniona $q_1 = a_1 + \vec{q}_1$ in $q_2 = a_2 + \vec{q}_2$ je njun produkt enak

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 &= \left(a_1 + \vec{q}_1\right)\left(a_2 + \vec{q}_2\right) = \\ &= \left(a_1 a_2 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right) + \left(a_1 \vec{q}_2 + a_2 \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem je $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2$ skalarni, $\vec{q}_1 \times \vec{q}_2$ pa vektorski produkt vektorjev $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$. Ustreznost tega pravila preverimo tako, da izračunamo skalarni in vektorski produkt vektorjev $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, ki smo ju zapisali po komponentah, in dobljeni izraz za produkt kvaternionov uredimo po baznih elementih $1, i, j, k$.

Zgled 4. Izračunajmo produkt kvaternionov $q_1 = 2 - j + 3k$ in $q_2 = -3i + j - k$ z uporabo pravila (3).

Zapišimo vektorski del obeh kvaternionov po komponentah, nato pa najprej izračunajmo skalarni in vektorski produkt dobljenih vektorjev:

$$\vec{q}_1 = (0, -1, 3)\,, \vec{q}_2 = (-3, 1, -1)\,,$$
$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0 - 1 - 3 = -4,$$
$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 9j - 3k.$$

Po pravilu (3) je tako

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (0 - (-4)) + 2\,(-3i + j - k) + \\ &\quad + 0 \cdot (2 - j + 3k) + (-2i - 9j - 3k) = \\ &= 4 - 8i - 7j - 5k. \end{aligned}$$

Dobili smo enak rezultat kot v zgledu 3.

Zapišimo še, da je množenje kvaternionov asociativno, ni pa komutativno (spomnimo se zakonov VI in V). Slednje sledi takoj iz pravila (1) za množenje baznih elementov i, j, k.

Zgled 5. Z izračunom produktov q_1q_2 in q_2q_1 za kvaterniona iz zgleda 4 pokažimo, da množenje zares ni komutativno.

Ker smo produkt q_1q_2 že izračunali, sledi še izračun produkta q_2q_1. Skalarni produkt vektorjev je komutativen in tako je

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1 = -4.$$

Vektorski produkt vektorjev je antikomutativen, torej je

$$\vec{q}_2 \times \vec{q}_1 = -\left(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2\right) = 2i + 9j + 3k.$$

Produkt q_2q_1 spet izračunamo z uporabo pravila (3):

$$\begin{aligned} q_2q_1 &= (0 - (-4)) + (0 \cdot (2 - j + 3k) + \\ &\quad +2\,(-3i + j - k) + 2i + 9j + 3k) = \\ &= 4 - 4i + 11j + k. \end{aligned}$$

S primerjanjem rezultata iz zgleda 4 ugotovimo, da je $q_1q_2 \neq q_2q_1$.

Pri kompleksnih številih definiramo konjugirano kompleksno število, ki se od danega kompleksnega števila razlikuje le po predznaku imaginarne enote. Tudi pri kvaternionih definiramo konjugirani kvaternion na podoben način (spremenimo predznake imaginarnih komponent). Za kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ je konjugirani kvaternion q^* enak

$$q^* = a - bi - cj - dk.$$

Naj bodo $q, q_1, q_2 \in \mathbf{H}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Naštejmo nekaj lastnosti konjugiranja:

$$(q_1 + q_2)^* = q_1^* + q_2^*,$$
$$(\alpha q)^* = \alpha q^*,$$
$$(q_1q_2)^* = q_2^* q_1^*.$$

Prvi dve lastnosti sta očitni, tretjo pa dokažemo tako, da po pravilu (3) izračunamo produkta q_1q_2 in $q_2^*q_1^*$ ter upoštevamo, da je skalarni produkt komutativen, vektorski produkt pa antikomutativen.

Zanimiva je tudi lastnost, da poljubni kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ komutira s svojim konjugiranim kvaternionom. Velja namreč

$$qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = q^*q.$$

Ugotovimo tudi, da je produkt qq^* nenegativno realno število. To dejstvo omogoča, da (podobno kot pri vektorjih v prostoru $\mathbb{R}^3$) definiramo velikost oziroma dolžino kvaterniona q (označili jo bomo z $||q||$) na naslednji način:

$$||q|| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Kvaternion, katerega velikost je enaka 1, imenujemo enotski kvaternion. Ni težko preveriti, da je produkt enotskih kvaternionov spet enotski kvaternion. Uporabimo lastnost velikosti, ki pravi, da je velikost produkta kvaternionov enaka produktu velikosti posameznih kvaternionov:

$$\begin{aligned} ||q_1q_2||^2 &= (q_1q_2)\,(q_1q_2)^* = q_1q_2q_2^*q_1^* = \\ &= q_1\,||q_2||^2\,q_1^* = q_1q_1^*\,||q_2||^2 = ||q_1||^2\,||q_2||^2\,. \end{aligned}$$

Za neničelni kvaternion q obstaja inverzni kvaternion q^{-1} (zakon VIII). Inverzni kvaternion predstavimo v obliki

$$q^{-1} = \frac{1}{||q||^2} q^*,$$

saj je

$$q\left(\frac{1}{||q||^2}q^*\right) = \frac{1}{||q||^2}(qq^*) = \frac{1}{||q||^2}\cdot ||q||^2 = 1.$$

Zgled 6. Poiščimo inverzni kvaternion kvaterniona $q = 2 - j + 3k$.

Najprej izračunamo velikost kvaterniona q:

$$||q|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

nato pa zapišemo njegov konjugirani kvaternion:

$$q^* = 2 + j - 3k.$$

Inverzni kvaternion kvaterniona q je potem enak

$$q^{-1} = \frac{1}{14}(2 + j - 3k).$$

V nadaljevanju prispevka bomo našteli nekaj področij uporabe kvaternionov. Kvaternione srečamo na različnih področjih fizike (hidrodinamika, elektrodinamika, posebna teorija relativnosti). V teh primerih kvaternion predstavimo kot kombinacijo skalarja in trirazsežnega vektorja, pri čemer je skalar običajno čas, vektorski del pa neko vektorsko polje, npr. hitrostno polje tekočine, električno polje. Proti koncu dvajsetega stoletja je velik pomen dobila predstavitev rotacij v prostoru s kvaternioni; v primerjavi z uporabo rotacijskih matrik se je namreč izkazala za učinkovitejšo. Tako srečamo kvaternione tudi na področju računalniške grafike, robotike, navigacije, molekularne dinamike, v letalstvu in orbitalni mehaniki (proučevanje trajektorij raket, umetnih satelitov, raziskovalnih naprav, lansiranih v vesolje).

Ob koncu bomo na kratko predstavili bistvo geometrijskega pomena kvaternionov – povezavo kvaternionov in rotacij v prostoru, ki pomeni osnovo prej omenjene praktične uporabe kvaternionov. Preden zapišemo temeljni izrek tega področja, definirajmo še dva pojma.

Rotacija $\mathfrak{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je preslikava, ki zavrti prostor $\mathbb{R}^3$ za kot φ okoli osi, določene z nekim vektorjem. Rotacija ohranja dolžine in kote, premice preslika v premice in ravnine v ravnine.

Kvaternion q imenujemo čisti kvaternion, če je njegova realna komponenta (skalarni del) enaka 0.

Do sedaj smo kvaternione zapisali s štirimi komponentami ali pa kot vsoto realnega in vektorskega dela. Oglejmo si še en zapis enotskega kvaterniona. Naj bo $q = a + bi + cj + dk$ enotski kvaternion. Iz definicij velikosti kvaterniona in dolžine vektorja iz $\mathbb{R}^3$ sledi

$$1 = ||q||^2 = \left|\left|a + \vec{q}\right|\right|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \\ = a^2 + \left|\vec{q}\right|^2.$$

Z upoštevanjem znane zveze med kotnima funkcijama

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

pa ugotovimo, da obstaja tak kot $\varphi \in [0, \pi]$, za katerega je

$$\cos^2\varphi = a^2 \quad \text{in} \quad \sin^2\varphi = \left|\vec{q}\right|^2.$$

Vpeljimo še enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{q}$

$$\vec{e} = \frac{1}{\sin\varphi}\vec{q}.$$

Tako lahko zapišemo enotski kvaternion q v obliki

$$q = a + \vec{q} = \cos\varphi + \sin\varphi\cdot\vec{e}.$$

Sedaj bomo predstavili prej omenjeni izrek.

Izrek 1. Naj bo q enotski kvaternion, zapisan v obliki

$$q = a + \vec{q} = \cos\varphi + \sin\varphi\cdot\vec{e},$$

pri čemer je $\vec{e}$ čisti enotski kvaternion. Transformacija $\mathfrak{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana s predpisom

$$\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right) = q\vec{x}q^*,$$

kjer je $\vec{x}$ poljubni vektor iz $\mathbb{R}^3$, predstavlja rotacijo prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi, določene z vektorjem $\vec{e}$, za kot 2φ.

Dokaz tega izreka najdemo v [2] ali [6], v prispevku pa bomo na kratko predstavili idejo dokaza.

Najprej pokažemo, da v izreku definirana transformacija $\mathfrak{R}$ ohranja vektor $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ in tako vektor $\vec{q}$ določa os rotacije. V prostoru $\mathbb{R}^3$ označimo s π ravnino, katere normalni vektor je enotski vektor $\vec{e}$, ki leži na osi rotacije. V ravnini π izberemo poljubni enotski vektor $\vec{v}$, označimo $\vec{w} = \vec{e} \times \vec{v}$ ($\vec{w}$ je torej enotski vektor, pravokoten na vektorja $\vec{e}$ in $\vec{v}$) in pokažemo, da velja $\vec{v}q^* = q\vec{v}$. Z upoštevanjem te zveze pa ugotovimo, da je

- $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = q\vec{v}q^* = qq\vec{v} = q^2\vec{v}.$

Sedaj uporabimo zapis $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \vec{e}$ in dejstvo, da je $\vec{e} \perp \vec{v}$. Po nekaj korakih računanja dobimo

- $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = \cos 2\varphi \cdot \vec{v} + \sin 2\varphi \cdot \vec{w},$

kar pomeni, da smo s transformacijo $\mathfrak{R}$ vektor $\vec{v}$ v ravnini π zavrteli za kot 2φ ($\cos 2\varphi$ in $\sin 2\varphi$ sta komponenti vektorja $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right)$ v smereh osi skozi enotska vektorja $\vec{v}$ in $\vec{w}$, ki sta pravokotna). Tako smo pokazali, da je preslikava $\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right) = q\vec{x}q^*$ rotacija prostora $\mathbb{R}^3$.

Zapisani izrek bomo uporabili v naslednjem zgledu.

Zgled 7. Naj bo $\mathfrak{R}$ rotacija prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi x za kot $\frac{2\pi}{3}$. Ugotóvimo, kam ta rotacija preslika vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

V našem primeru je čisti enotski kvaternion $\vec{e}$ kar vektor $\vec{i} = (1, 0, 0)$, ki leži na osi x, polovični kot rotacije φ pa je enak $\frac{\pi}{3}$. Enotski kvaternion q zapišemo v obliki

- $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \vec{i} = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \vec{i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}.$

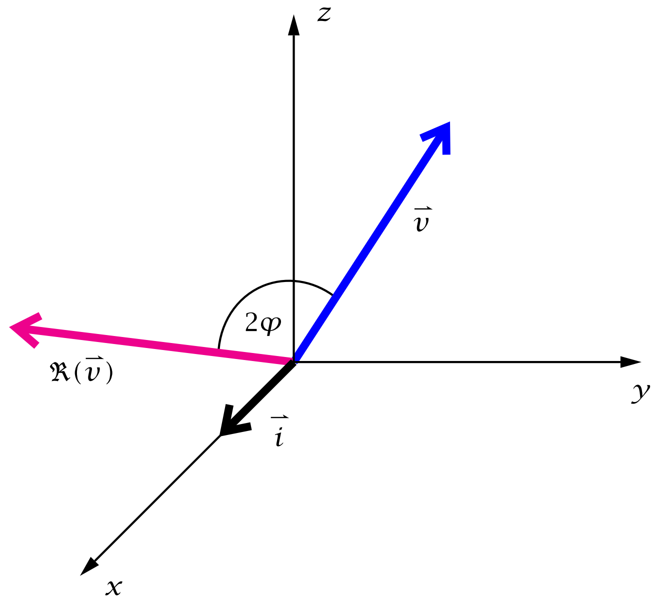
Rotacija $\mathfrak{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom

- $\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right) = q\vec{x}q^*.$

V ta predpis namesto $\vec{x}$ vstavimo vektor $\vec{v}$ in dobimo

- $$\begin{aligned}\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) &= q\vec{v}q^* = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\right)\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\right) \\ &= \vec{i} - \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j} + \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\vec{k}.\end{aligned}$$

Ugotovimo, da se pri rotaciji prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi x za kot $\frac{2\pi}{3}$ vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ preslika v vektor $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = \vec{i} - \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j} + \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\vec{k}$ (slika 2).



SLIKA 2.
Prikaz prostorske rotacije $\mathfrak{R}$ vektorja $\vec{v}$ okoli osi x za kot 2φ

Literatura

[1] A. J. Hanson, *Visualizing Quaternions (The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology)*, Morgan-Kaufmann/Elsevier, 2006.

[2] Y.-B. Jia, *Quaternions and Rotations*, Com S 477/577 Notes, 2013.

[3] J. B. Kuipers, *Quaternions and rotation Sequences: a Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*, Princeton University Press, 1999.

[4] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, DMFA SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[5] I. Vidav, *Algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1987.

[6] J. L. Weiner, G. R. Wilkens, *Quaternions and Rotations in* $\mathbb{R}^4$, The American Mathematical Monthly, Vol. 112, No. 1 (2005), 69–76.

× × ×