PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 3
Strani 140–143

Gregor Pavlič:

PORAZDELITEV PRAŠTEVIL V MNOŽICI *N*

Ključne besede: matematika, teorija števil, praštevila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1298-Pavlic.pdf

PORAZDELITEV PRAŠTEVIL V MNOŽICI $\mathbb{N}$

Ena od poti ugotavljanja gostote praštevil je proučevanje zaporedja znanih praštevil. Ali se morda v njem skriva kakšen vzorec?

Tako vidimo, da je med prvimi 100 naravnimi števili 25 praštevil:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,$$
$$47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,$$

da so še kar enakomerno porazdeljena, da se med njimi pojavljajo opazne praznine, da pa je med njimi kar 8 parov oblike p, $p+2$, imenovanih tudi praštevilski dvojčki.

Med 101 in 200 je 21 praštevil

$$101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,$$
$$157,163,167,173,179,181,191,193,197,199$$

in med njimi 7 praštevilskih dvojčkov, praznine pa so že bolj opazne. Tako si lahko postavimo vprašanji: ali obstajajo med zaporednima prašteviloma tudi večji skoki in ali je praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo. Zanimivo je, da je odgovor na prvo vprašanje zelo enostaven, odgovora na drugo vprašanje pa še ni; obstaja le domneva, da je odgovor pritrdilen. Do leta 1994 največja znana praštevilska dvojčka sta 1 000 000 000 061 in 1 000 000 000 063.

Poglejmo torej odgovor na prvo vprašanje. Najdaljši niz zaporednih sestavljenih števil med prvimi 200 naravnimi števili je $182, 183, \ldots 190$. Ali je mogoče brez truda sestaviti še daljši tak niz, ne da bi izpopolnjevali tabelo praštevil? To je mogoče in lahko je niz celo poljubno dolg, le da je vsa ta števila težko izpisati, ker so zelo velika. Primer za niz 9 zaporednih sestavljenih števil je

$$10!+2,\ 10!+3,\ \ldots\ ,\ 10!+10$$

in na splošno za niz n zaporednih sestavljenih števil

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots\ ,\ (n+1)!+(n+1).$$

Ali je po ugotovitvi, da je med zaporednima praštevilomа lahko poljubno velika "razpoka", sploh še vredno ugotavljati porazdeljenost praštevil? Pokazali bomo, da vendarle veljajo določene zakonitosti. V ta namen definirajmo aritmetično funkcijo $\pi(x)$, katere vrednost naj bo število praštevil, ki so manjša ali enaka številu x. Očitno je $\pi(100) = 25$ in $\pi(200) = 46$. Zakonitosti pa se pokažejo šele takrat, ko zberemo zelo veliko podatkov. Zato si poglejmo tabelo vrednosti funkcije π za nekatere x do vrednosti 10^{10}, relativne frekvence praštevil in njihove obratne vrednosti.

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x)}{x}$	$r(x) = \frac{x}{\pi(x)}$
10	4	0,40000000	2,50000000
100	25	0,25000000	4,00000000
1 000	168	0,16800000	5,95238095
10 000	1 229	0,12290000	8,13669650
100 000	9 592	0,09592000	10,4253545
1 000 000	78 498	0,07849800	12,7391781
10 000 000	664 579	0,06645790	15,0471201
100 000 000	5 761 455	0,05761455	17,3567267
1 000 000 000	50 847 534	0,05084753	19,6666387
10 000 000 000	455 052 512	0,04550525	21,9754863

V tabeli je posebej pomemben tretji stolpec, ki nam kaže "gostoto" praštevil.

Vzemimo prvih milijon naravnih števil; med njimi je 78 498 oziroma 7,85 % praštevil, večina (okrog 92 %) pa je sestavljenih števil. Iz tabele lahko razberemo, da je ta odstotek pri prvih 10 milijonih naravnih števil še manjši; funkcija $\frac{\pi(x)}{x}$ je očitno padajoča. V tabeli pa je še četrti stolpec in izkazalo se bo, da je funkcija r zelo pomembna. Matematiki niso obupali pri iskanju zakonitosti v napisani tabeli, čeprav je na prvi pogled vsak napor že vnaprej obsojen na neuspeh. Pot do rešitve se je nepričakovano pokazala preko števila e in naravnega logaritma.

Da bi videli razvoj reševanja problema, naredimo še eno tabelo.

x	$r(x) = \frac{x}{\pi(x)}$	$e^{r(x)}$
10	2,50000000	12,182494
100	4,00000000	54,598150
1 000	5,95238095	384,668150
10 000	8,13669650	3 417,609127
100 000	10,4253545	33 703,4168
1 000 000	12,7391781	340 843,2932
10 000 000	15,0471201	3 426 740,583
100 000 000	17,3567267	34 508 861,36
1 000 000 000	19,6666387	347 626 331,2
10 000 000 000	21,9754863	3 498 101 746,

Desni stolpec v tabeli sicer ne kaže neke popolne zakonitosti, vendar se takoj vidi, da je vsako število nižje v stolpcu približno desetkratnik predhodnega višje ležečega. Opaženo dejstvo bi lahko opisali z izrazom

$$e^{r(10x)} \approx 10\, e^{r(x)} \quad \text{za velike } \ x \tag{1}$$

ali z besedami: če spremenljivko povečamo od x na $10x$, je vrednost funkcije $e^{r(10x)}$ pri povečani neodvisni spremenljivki x približno desekratnik vrednosti funkcije $e^{r(x)}$ pri prvotni spremenljivki x. V tem spoznanju je pot do rešitve. Zakonitost sicer ne velja za vsako funkcijo $r(x)$, če pa najdemo tako, da zanjo enakost velja, smo že blizu rešitve.

Izkazalo se je, da je iskana funkcija ravno logaritemska funkcija z osnovo e. Potrebovali bomo identiteti

$$\ln(e^x) = x \quad \text{in} \quad e^{\ln x} = x.$$

V (1) nadomestimo funkcijo $r(x)$ z logaritemsko funkcijo $\ln x$

$$e^{\ln(10x)} = 10\, e^{\ln x}$$

in primerjajmo oba izraza

$$e^{r(10x)} \approx 10\, e^{r(x)}, \quad e^{\ln(10x)} = 10\, e^{\ln x}.$$

Takoj lahko ugotovimo, da sta enakosti približno enakovredni za dovolj velike vrednosti neodvisne spremeljivke x. Ta ugotovitev pa je ena od oblik znamenitega *praštevilskega izreka*:

Razmerje med številom praštevil, manjših ali enakih naravnemu številu n, in tem naravnim številom n, oziroma gostota praštevil v množici naravnih števil, je za velike n približno enaka obratni vrednosti naravnega logaritma števila n.

S tem seveda slavnega izreka nismo dokazali, smo pa na dokaj enostaven način našli kar natančno aproksimacijsko funkcijo, saj se število $\frac{1}{\ln 10\,000\,000\,000}$ od prave vrednosti funkcije $\frac{\pi(10\,000\,000\,000)}{10\,000\,000\,000}$ razlikuje le za 0,002.

Najbolj nenavadno za to "izpeljavo" pa je, da so našli med zapiski 15-letnega Carla Fridericha Gaussa iz leta 1792 naslednji zapis:

$$\text{praštevila pod} \;\; a\,(=\infty)\,\frac{a}{\mathrm{l}a}.$$

Če besedilo "praštevila pod a" nadomestimo z ekvivalentno vrednostjo $\pi(a)$, znak la z $\ln a$ in $(=\infty)$ z besedilom *za velike* a , dobimo ravno

$$\pi(a) \approx \frac{a}{\ln a} \quad \text{za velike} \;\; a,$$

z deljenjem z a pa obliko praštevilskega izreka, ki smo jo "izpeljali". Očitno je mladostnik Gauss že razumel to lastnost praštevil, zakaj pa je ni razvil in tudi ne dokazal, najverjetneje ne bomo nikoli izvedeli.

Drugi resni poskus, da bi ugotovil število praštevil, manjših od danega naravnega števila n, je s študijem aritmetične funkcije $\pi(n)$ naredil francoski matematik Legendre leta 1808. Pri delu si je pomagal z Eratostenovim sitom. Kasneje so se s tem problemom močno ukvarjali še Čebišev, Riemann, Mertens in Sylvester. Šele leta 1896 sta praštevilski izrek neodvisno dokazala Jacques Hadamard (1865-1963) in C. J. de la Vallée Poussin (1866-1962). Pri tem sta uporabila *Riemannovo zeta funkcijo* in dosežke mnogih svojih predhodnikov v analitični teoriji števil.

Dolgo časa so bili matematiki prepričani, da se pri dokazovanju tega izreka ne da izogniti analitičnim metodam, zato je bil elementarni dokaz, ki sta ga leta 1949 objavila P. Erdös in A. Selberg, prava senzacija. Alte Selberg je bil zato nagrajen s Fieldsovo medaljo – nagrado, ki je po pomembnosti enakovredna Nobelovi nagradi, Paul Erdös pa je dobil Coleovo nagrado.

Gregor Pavlič