

O reševanju funkcijskih enačb



JAKOB JURIJ SNOJ

→ V osnovni in srednji šoli pogosto rešujemo enačbe, v katerih neznanke predstavljajo iskana števila in jih moramo z znanimi postopki izraziti, da pridemo do možnih rešitev. Funkcijske enačbe so nekoliko drugačne in za reševanje nimajo enostavnih, ustaljenih postopkov, ampak zahtevajo tudi veliko mero iznajdljivosti. Zato so naloge s funkcijskimi enačbami pogost izziv na zahtevnejših matematičnih tekmovanjih.

V članku bomo najprej spoznali nekaj osnovnih principov reševanja takšnih enačb, nato pa bomo rešili še nekaj novejših nalog z mednarodnih tekmovanj. Za začetek si oglejmo enostaven primer funkcijske enačbe.

Naloga 1.

Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$\blacksquare f(x + y) = x + f(y)$$

za vsaka x in $y \in \mathbb{R}$.

Kaj naloga zahteva od nas? Ne iščemo vseh števil, ki bi rešila enačbo, temveč želimo najti vse takšne funkcije. Res je, da v enačbi nastopata tudi spremenljivki x in y , a ne iščemo njunih vrednosti, prav nasprotno: ugotavljamo, kakšne so tiste funkcije, za katere ustrezna enakost velja za vsako veljavno izbiro x in y .

Zgornjo funkcijsko enačbo lahko razumemo kot sistem neskončno mnogo enačb, ki jih dobimo, če

namesto x in y vstavljamo konkretne vrednosti. Na nek način bi se dalo tudi reči, da imamo neskončno mnogo neznank: vrednosti $f(x)$ za vsa števila x iz definicijskega območja.

Kako se lotimo reševanja takšnih enačb? Dosedanji razmislek namiguje, da se moramo pri vsaki enačbi znajti malo drugače. Vseeno obstaja nekaj pogostih pristopov. Najenostavnejši je vstavljanje konkretnih vrednosti spremenljivk, denimo 0 ali 1, ali enačenje spremenljivk v enačbi. Poskusimo z vstavljanjem $x = y = 0$ v našo začetno enačbo. Tako ugotovimo, da mora za iskano funkcijo f veljati enakost

$$\blacksquare f(0 + 0) = 0 + f(0) \quad \text{oziroma} \quad f(0) = f(0).$$

Ta enakost nam očitno ne prinese novih informacij, saj velja za poljubno funkcijo f . Poskusimo s substitucijo samo v eni spremenljivki, recimo $y = 0$, s katero dobimo enakost

$$\blacksquare f(x) = x + f(0).$$

Kaj nam to pove? Vrednost $f(0)$ je neko fiksno realno število, recimo mu c . Dokazali smo torej, da mora za iskano funkcijo f veljati

$$\blacksquare f(x) = x + c$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Zdaj lahko preverimo, ali takšna funkcija sploh ustreza začetni enačbi. Vstavimo predpis v enačbo in dobimo, da mora veljati

$$\blacksquare x + y + c = x + (y + c) \quad \text{za vse } x, y \in \mathbb{R},$$

kar velja ne glede na izbiro konstante c . Funkcije oblike $f(x) = x + c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, so torej vse rešitve začetne funkcijske enačbe.

Povzemimo: vstavili smo $y = 0$ in ugotovili, da mora za vsako rešitev začetne funkcijske enačbe veljati $f(x) = x + c$ za neko konstanto $c \in \mathbb{R}$. Vse možne rešitve so torej take oblike, s preverjanjem pa smo nato dokazali še, da so vse funkcije take oblike zares rešitve.

Naloga 2.

Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$f(x + f(x) + y) = y + f(2y)$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Če poskusimo z vstavljanjem konkretnih vrednosti, lahko dobimo enačbe, kot so $f(x + f(x)) = f(0)$, $f(f(0)) = f(0)$ ali podobne, ki tokrat niso direktno uporabne. Izkaže se, da bomo do rešitve zelo enostavno prišli na malo drugačen način. Poskusimo enačiti argumenta obeh pojavitev f , da se člena med seboj pokrajšata: vstavimo $y = x + f(x)$. Dobimo

$$f(2x + 2f(x)) = x + f(x) + f(2(x + f(x))),$$

kar je seveda ekvivalentno

$$x + f(x) = 0.$$

Ta enačba pove, da mora za vsak $x \in \mathbb{R}$ veljati $f(x) = -x$, torej imamo predpis edine funkcije, ki lahko reši enačbo. Preverimo, da jo res, torej vstavimo predpis v osnovno enačbo in dobimo

$$-x + x - y = y - 2y,$$

kar res velja za poljubni realni števili x in y . V tem primeru ima funkcijska enačba eno samo rešitev.

Do pomembnih sklepov pri reševanju funkcijskih enačb nas lahko pripeljejo tudi posebne lastnosti funkcij. Spomnimo se, da je funkcija $f: A \rightarrow B$ **surjektivna**, če za vsak $b \in B$ obstaja nek $a \in A$, za katerega velja $f(a) = b$. Za dokaz surjektivnosti funkcije, ki je morda eksplicitno ne poznamo, zadošča zapisati enakost, v kateri je na eni strani funkcija f s sestavljenim, a dobro definiranim argumentom, na drugi strani pa nek izraz, za katerega vemo, da zavzame vse možne vrednosti. Oglejmo si dva zahtevnejša primera funkcijskih enačb, v katerih surjektivnost igra pomembno vlogo.

Naloga 3 (Slovenski izbirni test za MMO 2016).

Določi vse funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere velja

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{(f(x))^2}{yf(f(x))}$$

za vse $x, y > 0$.

Tokrat iščemo samo funkcije iz pozitivnih realnih števil v pozitivna realna števila. Lahko bi poskusili s kakšnim vstavljanjem, a se raje lotimo naloge malo drugače. Po premisleku vidimo, da pri fiksnem x izraz na desni strani zavzame vsa pozitivna realna števila, ko y preteče vsa pozitivna realna števila. To lahko utemeljimo tudi tako, da namesto y vstavimo $\frac{(f(x))^2}{yf(f(x))}$ in dobimo

$$f\left(\frac{x}{f\left(\frac{(f(x))^2}{yf(f(x))}\right)}\right) = y.$$

Argument funkcije f na levi strani je dobro definiran. Ker desna stran zavzame poljubno pozitivno realno število, smo torej ugotovili, da je f surjektivna.

Naslednji smiseln korak bi bil, da v začetni enačbi na levi strani nekako dobimo $f(x)$, da se lahko ta člen z enakim na desni strani pokrajša. Ker je f surjektivna, lahko vstavimo $y = c$, kjer je c poljubno pozitivno realno število z lastnostjo $f(c) = 1$. Po poenostavitvi dobimo

$$\frac{f(x)}{cf(f(x))} = 1 \quad \text{oziroma} \quad f(x) = cf(f(x)).$$

Z rešitvijo smo že skoraj pri koncu. Naj bo a poljubno pozitivno realno število. V zgornjo enačbo lahko namesto x zaradi surjektivnosti vstavimo takšno število, ki se slika v a . S tem dobimo enačbo

$$cf(a) = a,$$

ki velja za vsako pozitivno realno število a in neko pozitivno realno število c . Vse možne funkcije, ki rešijo enačbo, so torej oblike $f(x) = kx$, kjer je $k = \frac{1}{c} \in \mathbb{R}^+$ neka konstanta. Z vstavljanjem v začetno enačbo ugotovimo, da je takšna funkcija rešitev začetne enačbe za vsak $k \in \mathbb{R}^+$.

Naslednja enačba, ki si jo bomo ogledali, je s Srednjeevropske matematične olimpijade 2015, ki je potekala v Kopru v Sloveniji. Za razliko od prejšnjih primerov tokrat iščemo surjektivne funkcije na množici naravnih števil.





Naloga 4 (MEMO 2015).

Poišči vse surjektivne funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere za vsa naravna števila a in b velja natanko ena izmed naslednjih enačb:

- $f(a) = f(b)$,
- $f(a + b) = \min\{f(a), f(b)\}$.

Nenavadni pogoj pove, da za iskane funkcije iz $f(a) < f(b)$ sledi $f(a + b) = f(a)$. Zaradi surjektivnosti gotovo obstaja naravno število a_1 z lastnostjo $f(a_1) = 1$. Denimo, da je $f(1) > 1$. Potem sledi $f(a_1 + 1) = 1$, pa tudi $f(a_1 + 2) = f((a_1 + 1) + 1) = 1$. Induktivno lahko zaključimo, da $f(n) = 1$ za vsak $n \geq a_1$.

V čem je težava tega sklepa? Funkcija f v tem primeru doseže le končno mnogo vrednosti, torej ne more biti surjektivna. Prišli smo do protislovja, zato mora veljati $f(1) = 1$.

Če sedaj v začetno enačbo vstavimo $b = 1$, lahko vidimo, da za vsak a , za katerega $f(a) \neq 1$, velja $f(a + 1) = 1$. Hkrati lahko z vstavljanjem $a = b = 1$ ugotovimo, da $f(2) \neq 1$, saj velja prva enačba, zato druga ne sme veljati. Sledi $f(3) = 1$, sedaj pa lahko z indukcijo dokažemo, da je $f(a) = 1$ natanko tedaj, ko je a lih, kar prepuščamo bralcu.

Kaj lahko povemo o vrednosti $f(a)$ za soda števila a ? Na enak način kot $f(1) = 1$, bi lahko sedaj dokazali, da je $f(2) = 2$. Še več, po analognih sklepih kot prej bi lahko dokazali tudi, da je $f(a) = 2$ natanko tedaj, ko je a deljiv z 2 in ne s 4, podobno, da je $f(a) = 3$ natanko tedaj, ko je a deljiv s 4 in ne z 8. Ker lahko vsako naravno število a zapišemo v obliki $a = 2^r \cdot m$, kjer je m neko liho število in $r \in \mathbb{N}_0$, na podlagi dosedanjih ugotovitev postavimo domnevo, da mora za iskano funkcijo veljati $f(2^r \cdot m) = r + 1$. Za $r = 0$ in $r = 1$ smo to domnevo že dokazali, natančni bralci pa bodo morda sami dodali podrobnosti dokaza z indukcijo za poljuben r in preverili, da ta funkcija ustreza začetni enačbi.

Za konec si oglejmo še funkcijsko enačbo s tekmoovanja Romanian Master of Mathematics 2019, ki se je izkazala za izjemno težko.

www.dmfa.si

Naloga 5 (RMM 2019, Jakob Jurij Snoj).

Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja

- $f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y)$

za vsa $x, y \in \mathbb{R}$.

Tokrat rešujemo funkcijsko enačbo, pri kateri spremenljivke nastopajo le v argumentih funkcije, kar je pogosto znak, da je naloga zahtevnejša. Z vstavljanjem $x = 2019$ se znebimo drugega člena na obeh straneh enačbe. Dobimo

- $f(2019 + yf(2019)) = f(2019)$.

Kaj nam ta enačba pove? Če velja $f(2019) \neq 0$, v argumentu funkcije f na levi strani nastopajo vsa realna števila. V tem primeru je funkcija f konstantna in neničelna. Ni težko preveriti, da vse konstantne funkcije, vključno z ničelno, rešijo enačbo.

Raziščimo še primer $f(2019) = 0$ za nekonstantno funkcijo f . V osnovno enačbo lahko vstavimo $y = 1$ in dobimo

- $f(x + f(x)) = f(2019) = 0$.

Če ima funkcija f le eno ničlo, velja $x + f(x) = 2019$, torej dobimo v tem primeru rešitev $f(x) = 2019 - x$, za katero lahko preverimo, da res reši enačbo. Sicer pa ima f vsaj še eno ničlo $s \neq 2019$. Če vstavimo $x = s$ v osnovno enačbo, dobimo

- $f(sy) = f(2019y)$.

Poskusimo to lastnost čim lepše izkoristiti. Namesto x v začetno enačbo vstavimo $\frac{s}{2019}x$, da dobimo enačbo

- $f\left(\frac{s}{2019}x + yf\left(\frac{s}{2019}x\right)\right) + f\left(\frac{s}{2019}xy\right) = f\left(\frac{s}{2019}x\right) + f(2019y)$.

Če prej omenjeno lastnost uporabimo na dobljeni enačbi in jo primerjamo z osnovno enačbo, dobimo

- $f\left(\frac{s}{2019}x + yf(x)\right) = f(x + yf(x))$.

Privzeli smo, da funkcija f ni konstantna, torej obstaja neko število c z lastnostjo $f(c) \neq 0$. V zgornji enačbi zamenjamo x s c ter y z $\frac{y - \frac{sc}{2019}}{f(c)}$, pa dobimo

- $f(y) = f\left(y + c\left(1 - \frac{s}{2019}\right)\right)$.

Za $c \neq 0$ je torej funkcija f periodična z neko periodo $p > 0$. Vstavimo $x = x + p$ v osnovno enačbo in dobljeno enačbo primerjamo z osnovno. Po poenostavitvi dobimo

$$f((x + p)y) = f(xy).$$

V to enačbo lahko sedaj vstavimo $x = 0$, da dobimo $f(py) = f(0)$ za vse y . To pomeni, da je funkcija f konstantna, protislovje.

V primeru, da ima iskana funkcija vsaj dve ničli, mora torej veljati $f(c) = 0$ za vse vrednosti $c \neq 0$. Pri preverjanju pa naletimo še na zadnje presenečenje: izkaže se, da je lahko vrednost $f(0)$ poljubna. Tudi vse funkcije oblike

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če } x \neq 0; \\ c, & \text{če } x = 0. \end{cases}$$

rešijo enačbo.

Funkcijska enačba ima torej tri tipe rešitev: vse konstantne funkcije $f(x) = c$, linearno funkcijo $f(x) = 2019 - x$ in vse skoraj ničelne funkcije, ki imajo edino neničelno vrednost v točki 0.



SLIKA 1.

Tekmovanja Romanian Master of Mathematics 2019 v Bukarešti so se udeležili Marko Čmrlec, Lovro Drofenik, Luka Horjak in Jaka Vrhovnik v spremstvu Jakoba Jurija Snoja.

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

		5			8		6
3			2		4		
			8			3	
4						1	
				2		8	
							3
		8			7		4
	4		5				

→
→
→
REŠITEV BARVNI SUDOKU

2	6	3	8	5	7	4	1
4	5	7	1	6	8	3	2
3	4	6	7	1	2	5	8
5	8	1	2	3	4	7	6
8	1	5	6	7	3	2	4
7	3	2	4	8	1	6	5
1	7	4	5	2	6	8	3
6	2	8	3	4	5	1	7

× × ×

× × ×