2. Ali lahko samo s šestilom in neoznačenim ravnilom podamo konstrukcijo trikotnikov s slike 1, da bo $B_i = B_i'$ za $i \in \{1, 2, 3\}$? To pomeni, da iščemo rešitve enačbe $\mu_-(\lambda) = \lambda$. Dokaži, da ima ta enačba natanko eno smiselno rešitev $\lambda = \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)/3$.

## Literatura


[1] R. A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

[2] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* $2 \times 2$ *matrike*, Presek **32** (2004/2005), št. 4, 9–12.

[4] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* $2 \times 2$ *matrike (drugi del)*, Presek **32** (2004/2005), št. 5, 5–8.


× × ×

# Igra s čokoladkami – Chocolate Fix

Nada Razpet

**→ V bonbonierah so navadno dražji bonboni, največkrat polnjeni in obliti s čokolado. Letos sem prejela posebno bonboniero, igro, sestavljeno iz devetih plastičnih bonbonov, rekli jim bomo čokoladke. Plastičnih čokoladk seveda ne moremo pojesti, se pa z njimi lahko igramo.**

Najprej nekaj osnovnih podatkov o igri. V izvirniku se igra imenuje *Chocolate Fix* s podnaslovom *Sweet Logic Game* ([1], [2]). Njen ustvarjalec (skupaj


**SLIKA 1.**
Deli igre Chocolate Fix. Levo zgoraj je podstavek, poleg so čokoladke. Svetlo rumene čokoladke so na sliki videti bele. Spodaj so kartonski žetoni treh barv oziroma žetoni s trikotniki, kvadrati in krogi ter knjižica z navodili, nalogami in rešitvami.

z ekipo podjetja ThinkFun, ki se ukvarja z igrami) je Mark Engelberg. Mark je obiskoval srednjo šolo za nadarjene dijake in kasneje nadaljeval študij na univerzi. Ima dve diplomi, iz računalništva in kognitivnih znanosti. Nekaj časa je bil zaposlen pri NASI, kasneje pa se je posvetil računalniškim igricam, sodeluje pa tudi pri pripravah učnih načrtov, predvsem iz logike. Želel je ustvariti igro s čim manj pravil, ki bi bila primerna tako za igranje na računalniku kot brez njega, hkrati pa bi omogočala igranje na več nivojih. Igra je prejela več prestižnih nagrad, med njimi v ZDA zelo cenjene nagrade staršev *Parents Gold Award leta 2008, 2009 in 2010*. Obstaja več verzij te igre, mi bomo pogledali verzijo iz leta 2010.

## Deli igre

Igra ima črn podstavek z devetimi vdolbinami in devet čokoladk: tri roza, tri svetlo rumene (na fotografijah so videti bele, na skicah jih bomo obarvali živo rumeno) in tri rjave (glej sliko 1). Čokoladke iste barve se med seboj razlikujejo po obliki zgornje ploskve, ki je lahko kvadrat, trikotnik ali krog. V kompletu dobimo še po tri žetone roza, rumene in rjave barve ter devet sivih žetonov. Na treh sivih žetonih so narisani trikotniki, na treh kvadrati in na treh krožnice. Z žetoni si pomagamo pri reše- →

vanju težjih problemov. Priložena je tudi knjižica s 40 kartončki, povezanih s spiralo. Na sprednjih straneh kartončkov so narisane naloge, na hrbtnih straneh pa njihove rešitve. Prvih 10 nalog je namenjenih začetnikom, naslednjih 10 je srednje težkih, sledijo naloge za bolj izurjene, zadnjih 10 pa je namenjenih mojstrom.

## Oznake

Podstavek označujemo s sivim kvadratom (osnovni kvadrat), ki ga razdelimo na devet skladnih kvadratkov (celice). Čokoladke označujemo po obliki zgornje ploskve, torej s krogom, kvadratom in trikotnikom. Rumeno obarvan trikotnik predstavlja rumeno čokoladko s trikotno zgornjo ploskvijo, rjavo obarvan kvadrat pa predstavlja rjavo čokoladko s kvadratno zgornjo ploskvijo itd. Kvadrat, trikotnik in krožnica, ki imajo bele stranice (notranjost ni obarvana), pomenijo, da je tam čokoladka s kvadratno (trikotno ali okroglo) zgornjo ploskvijo, ne vemo pa, katere barve je, poznamo torej samo obliko čokoladke. Celice so lahko obarvane. Barva celice določa barvo čokoladke (ne vemo pa njene oblike). V nadaljevanju bomo čokoladko opisali z barvo in obliko zgornje ploskve, na primer: okrogla rjava, rumena trikotna itd. Pri tem se seveda zavedamo, da so čokoladke trirazsežna telesa.

## Pravila

Karton z nalogo je z navpičnimi in vodoravnimi črtami razdeljen na več delov. V zgornjem levem delu je navadno narisan osnovni kvadrat z devetimi celicami. V nekaterih celicah so že oznake. Za te celice vemo, katera čokoladka sodi tja (če je označena oblika in barva) oziroma katere oblike ali barve čokoladke moramo dati v določeno celico. V preostalih delih kartončka, ki so omejeni s črtami, pa so večkotniki sestavljeni iz sivih kvadratkov (celic). Tudi celice večkotnikov lahko vsebujejo prej omenjene oznake.

Posamezne večkotnike polagamo na osnovni kvadrat tako, da jih premikamo vodoravno ali navpično, ne smemo pa jih vrteti ali zrcaliti. Položaj večkotnikov na osnovnem kvadratu mora biti tak, da zahteve za obliko in barvo čokoladk v celicah večkotnika niso v nasprotju z zahtevami v celicah osnovnega kvadrata, ki jih ta večkotnik prekrije. Večkotniki se lahko pri polaganju na osnovni kvadrat med seboj prekrivajo, ne smejo pa segati čez osnovni kvadrat. Navadno z narisanimi večkotniki ne prekrijemo celotnega osnovnega kvadrata. Kaj leži v nepokritih celicah, moramo ugotoviti sami.

Cilj igre je torej razporediti devet čokoladk v podstavek tako, da bodo lege čokoladk ustrezale zahtevam celic osnovnega kvadrata in nanj položenih večkotnikov.

Vseh možnih razporeditev čokoladk je seveda veliko. Hitro jih izračunajmo. Za prvo vdolbino imamo devet možnosti (ker je devet čokoladk), za drugo osem (eno smo že uvrstili), za tretjo sedem itd., do zadnje odprtine, ko ostane le še ena možnost, torej velja:

- $M = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362\,880$

Produkt števil od 1 do 9 v matematiki zapišemo kot 9! in beremo *devet fakulteta* ali devet faktoriela.

Avtor je poskrbel, da ima vsaka naloga eno samo rešitev.

## Primer 1

Kartonček z nalogo je razdeljen na tri dele (slika 2). Zgoraj levo je osnovni kvadrat, zraven in spodaj pa sta dva večkotnika, v tem primeru dva pravokotnika.

Da bo opisovanje rešitev lažje, označimo celice osnovnega kvadrata s številkami od 1 do 9, celice prvega pravokotnika s črkama A in B, celice drugega pravokotnika pa s črkami C, D in E. (slika 3).

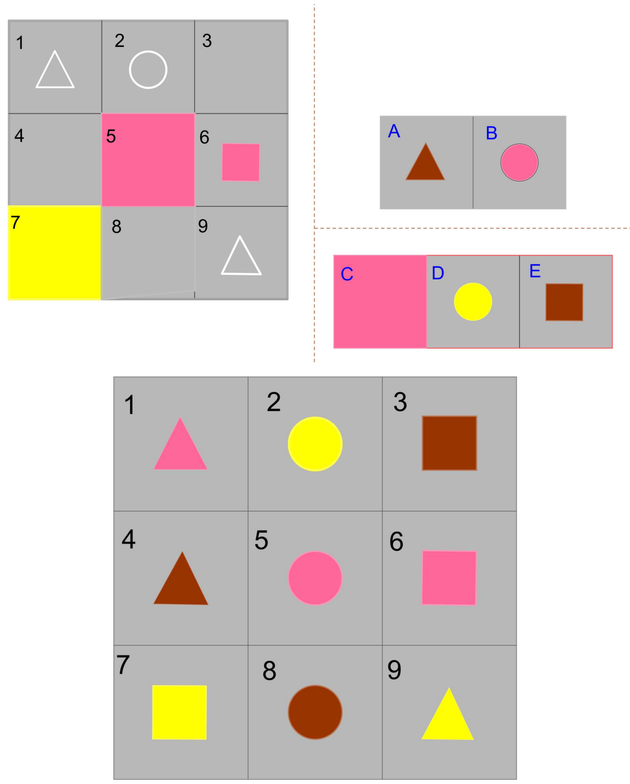
Najprej poglejmo, kaj povedo o čokoladkah oznake na osnovnem kvadratu in obeh pravokotnikih.

V prvi celici osnovnega kvadrata je narisan bel trikotnik, torej bo na tem mestu trikotna čokoladka, barve še ne vemo. V drugi celici bo okrogla čokoladka, barve še ne vemo, v peti celici bo roza čokoladka, oblike še ne vemo, v šesti celici je roza kvadratna čokoladka, v sedmi celici bo rumena čokoladka, oblike še ne vemo, in v deveti celici bo trikotna čokoladka, barve še ne vemo.

V prvem pravokotniku z dvema celicama sta čokoladki znani. V celici A je trikotna rjava, v celici B pa roza okrogla čokoladka.

V drugem pravokotniku bo v celici C roza čokoladka, oblike ne vemo, v celici D je rumena okrogla čokoladka in v celici E je rjava kvadratna čokoladka.


**SLIKA 2.**
Zgoraj: Fotografija kartončka z nalogo. Spodaj: Rešitev.




**SLIKA 3.**
Oznaka osnovnega kvadrata, dveh večkotnikov (pravokotnikov) in shema rešitve.

## Reševanje

Pravokotnik s celicama A in B lahko položimo na osnovni kvadrat na dva načina, tako da zasede 1. in 2. ali pa 4. in 5. celico. Pete in osme celice ne more zasesti, ker bi morali pravokotnik zasukati za 90°, kar pa ni dovoljeno.

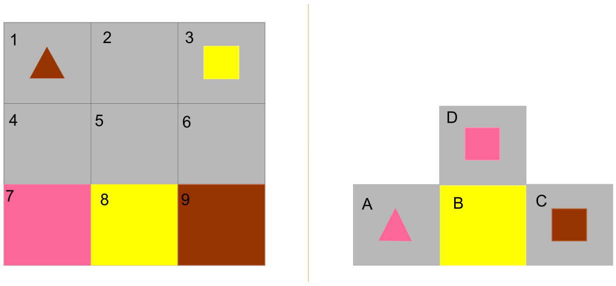
S pravokotnikom, s celicami C, D in E, prekrijemo eno celo vrstico. Katero? Prvo vrstico osnovnega kvadrata (slika 3). Zakaj? V drugi vrstici srednja celica, celica 5, zahteva roza čokoladko, srednja celica pravokotnika, to je celica D, ki bi to celico prekrila, pa zahteva rumeno okroglo čokoladko. Zahtevi si nasprotujeta. Kaj pa tretja vrstica? Sedma celica osnovnega kvadrata zahteva rumeno, prva celica pravokotnika, to je C celica, ki bi to celico prekrila, pa zahteva roza čokoladko, torej si tudi ti dve zahtevi nasprotujeta.

Pravokotnik s celicama A in B moramo torej položiti na 4. in 5. celico osnovnega kvadrata.

Kaj smo ugotovili? Čokoladke so razporejene takole: V prvi vrstici so: roza trikotna, rumena okrogla in rjava kvadratna čokoladka. V drugi vrstici so: rjava trikotna, roza okrogla in roza kvadratna čokoladka. Preostale tri čokoladke pa lahko razporedimo na en sam način, da ustrezajo zahtevani barvi v sedmi celici in obliki v deveti celici. Torej so v tretji vrstici: rumena kvadratna, rjava okrogla in rumena trikotna čokoladka. Rešitev je na sliki 3 spodaj oziroma na fotografiji na sliki 2.

### Lažja naloga za samostojno reševanje

Sami rešite še problem na sliki 4. Tokrat moramo na osnovni kvadrat položiti en sam večkotnik in potem ugotoviti, kako so razporejene čokoladke. Večkotnik lahko na osnovni kvadrat položimo le na dva načina. Ugotovite, kam ga je treba položiti, in rešite nalogo.

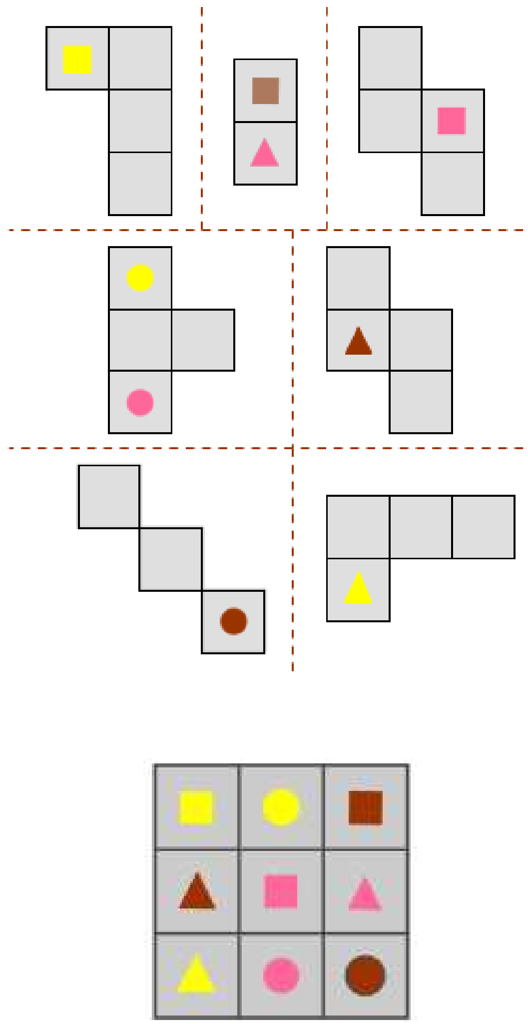



**SLIKA 4.**
Naloga za začetnike.

### Še en težji primer

Oglejmo si še en težji primer (slika 5). V tem primeru na kartončku z nalogo ni narisan osnovni kvadrat, kar pomeni, da osnovni kvadrat nima oznak v celicah. Narisati si ga moramo sami. Imamo sedem večkotnikov. Vsota vseh celic večkotnikov je 25, osnovni kvadrat ima le devet celic. To pomeni, da se večkotniki, ki jih polagamo na osnovni kvadrat, med seboj prekrivajo. Kako? Ugotovite sami! Pomagamo vam z rešitvijo.

Igro lahko igrate tudi na spletu [3]. V nekatere šole v ZDA so jo vpeljali kot pripomoček za razvijanje logičnega načina mišljenja in za uvajanje v matematični način dokazovanja. Želimo vam veliko veselja pri igranju.



**SLIKA 5.**
Zgoraj: večkotniki, s katerimi je potrebno prekriti osnovni kvadrat. Spodaj: shema rešitve.

× × ×

## Literatura

[1] Igra Chocolate Fix, Sweet Logic Game, Thinkfun, 2010.

[2] `www.eimacs.com/blog/2011/09/mark-engelberg-game-and-puzzle-inventor/`, ogled: 13. 11. 2018.

[3] `www.thinkfun.com/products/chocolate-fix/`, ogled: 13. 11. 2018.