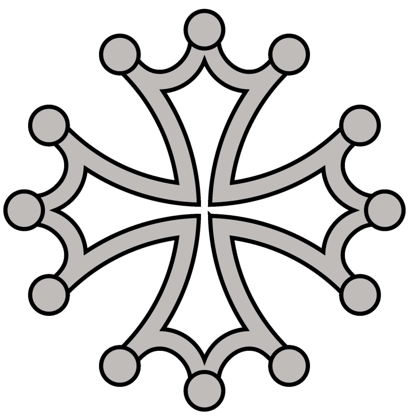
Marjan in oksitanski križ

Aleksander Simonič

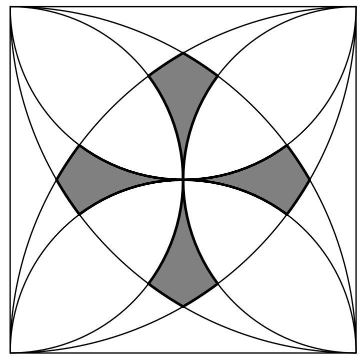
V spomin Marjanu Jermanu.

→ Marjan je med počitnicami obiskal Francijo. Med ogledom mesta Toulouse je v mestnem grbu opazil geometrijski lik v obliki križa (slika 1). To je bil štirikraki *oksitanski križ*, imenovan po pokrajini na jugozahodu Francije.

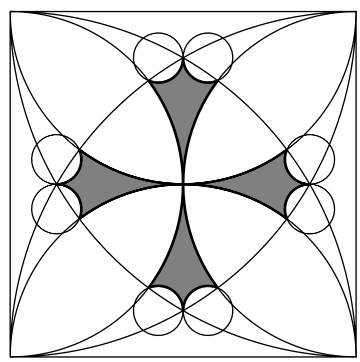


SLIKA 1.
Oksitanski križ

Kot strasten ljubitelj geometrije je Marjan takoj poiskal elegantno geometrijsko konstrukcijo oksitanskega križa. Najprej je v kvadrat s stranico 1 včrtal štiri polkrožnice in štiri četrtkrožnice. Iz delov teh krožnic je dobil križ (slika 2), pri katerem so krajši loki izbočeni in ne vbočeni kakor na pravem oksitanskem križu. Nato je svojo skico še izpopolnil, tako da je krajše loke zamenjal z deli manjših krožnic, ki se dotikajo simetrijske osi križa v enem od njegovih oglišč in potekajo skozi sosednje oglišče (slika 3). Tako je postal njegov križ res zelo podoben pravemu oksitanskemu križu.



SLIKA 2.
Marjanov poskus konstrukcije oksitanskega križa



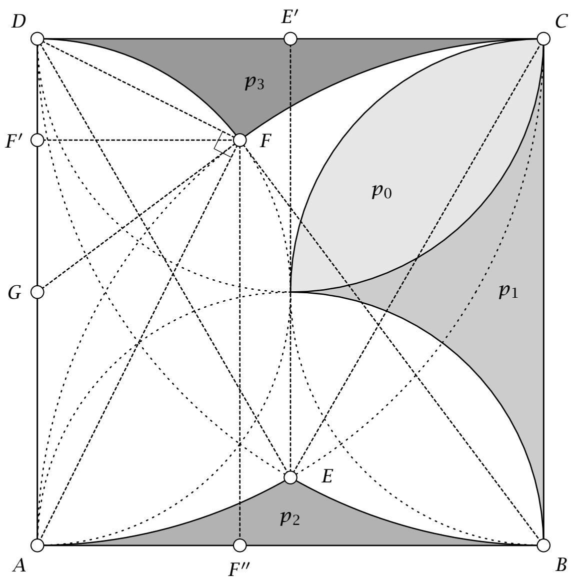
SLIKA 3.
Popravljena konstrukcija slike 2

→

Bralci Preseka bodo verjetno opazili, da je risanje oksitanskega križa po tej konstrukciji odlična in ne prezahtevna vaja za vse, ki se učijo uporabe programa *GeoGebra*. Tistim bralcem Preseka, ki poznajo osnove trigonometrije, pa lahko zastavimo še nekoliko zahtevnejši izziv.

Naloga. Za vsakega od križev na sliki 2 in sliki 3 natančno izračunajte njegovo ploščino.

Rešitev. Najprej bomo podali izpeljavo ploščine za prvi križ. Naj bo $ABCD$ kvadrat s stranico $|AB| = 1$. Označimo s p_0, p_1, p_2 in p_3 ploščine pripadajočih likov na sliki 4.



SLIKA 4.
Izpeljava ploščine križa s slike 2

Naj bo P_1 ploščina križa. Ni težko videti, da potem velja

$$P_1 = 4\left(p_1 + p_2 - 2p_3\right). \quad (1)$$

V naslednjih treh odstavkih bomo izračunali p_1, p_2 in $2p_3$.

Zaradi simetričnosti konstrukcije velja $p_1 + 2p_0 = \pi/8$ in $p_0 + p_1 = 1/4$, od koder dobimo

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}. \quad (2)$$

V nadaljevanju bomo privzeli, da so vsi koti izraženi v radianih. Označimo z E tisto presečišče krožnic s polmeroma 1 in središčema v C in D, ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. Naj bo E' pravokotna projekcija točke E na stranico CD. S tem je $|DE| = 1$ in $|DE'| = 1/2$. Ploščino p_2 bomo dobili tako, da bomo od ploščine kvadrata odšteli ploščino $\triangle DEC$ in ploščini krožnih izsekov ADE in ECB, torej

$$p_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(|DC| \cdot |EE'| + |AD|^2 \cdot \angle ADE + |BC|^2 \cdot \angle ECB\right).$$

Izračunajmo manjkajoče količine. Po Pitagorovem izreku imamo

$$|EE'| = \sqrt{|DE|^2 - |DE'|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

Ker je še $\angle ADE = \pi/2 - \angle EDE' = \pi/2 - \angle E'CE = \angle ECB$ in $\angle EDE' = \pi/3$, saj je $\triangle DEC$ enakostranični trikotnik, sledi

$$p_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}. \quad (4)$$

Označimo z F tisto presečišče polkrožnice nad AD s krožnico polmera 1 in središčem v B, ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. S tem je $|AG| = |GD| = 1/2$ in $|BF| = 1$. Naj bosta F' in F'' pravokotni projekciji točke F na stranici AD in AB. Podobno kot prej bomo ploščino p_3 dobili tako, da bomo od ploščine kvadrata odšteli ploščini $\triangle AFG$ in $\triangle ABF$ ter ploščini krožnih izsekov FGD in CBF, torej

$$p_3 = 1 - \frac{1}{2}\Big(|AG| \cdot |FF'| + |AB| \cdot |FF''| + |GD|^2 \cdot \angle FGD + |BC|^2 \cdot \angle CBF\Big).$$

Evklidov izrek $|AF'| \cdot |F'D| = |FF'|^2$ za pravokotni trikotnik $\triangle DAF$ zagotavlja

$$|AF'| - |AF'|^2 = |FF'|^2.$$

Iz

$$1 = |BF|^2 = |FF''|^2 + |BF''|^2 = |AF'|^2 + (1 - |FF'|)^2$$

sledi še $|AF'| = 2\,|FF'|$ ter s tem

$$|FF'| = \frac{2}{5}, \quad |FF''| = \frac{4}{5}. \quad (5)$$

Ker je

- $\angle FGD = 2 \cdot \angle FAD = \pi - 2\arctan\frac{|FF''|}{|FF'|}$
$= \pi - 2\arctan 2,$ (6)
$\angle CBF = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|FF''|}{1-|FF'|} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{4}{3},$

imamo

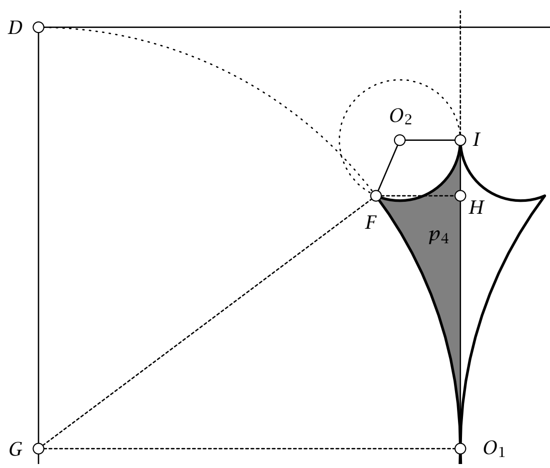
- $2p_3 = 1 - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan 2 + \arctan\frac{4}{3}.$ (7)

Po upoštevanju izrazov (2), (4) in (7) v (1) dobimo

- $P_1 = 2 - \sqrt{3} + \frac{11\pi}{6} - 2\arctan 2 - 4\arctan\frac{4}{3}.$

Ploščina prvega križa je tako približno 0.10406.

Sedaj bomo podali še izpeljavo ploščine za drugi križ. Označimo s p_4 ploščino osenčenega lika na sliki 5, pri čemer sledimo tudi oznakam s slike 4. Potem bo ploščina križa P_2 na sliki 3 enaka $8p_4$.



SLIKA 5.
Izpeljava ploščine križa s slike 3

Označimo z O_1 presečišče polkrožnic nad stranicama AD in BC. S tem je

- $|GF| = |GO_1| = \frac{1}{2}, \quad |FH| = \frac{1}{2} - |FF'| = \frac{1}{10},$
$|O_1H| = |FF''| - \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$
$|HI| = |EE'| - |FF''| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5},$

pri čemer smo uporabili (3) and (5). Označimo z I tisto presečišče krožnic s polmeroma 1 in središčema v A in B, ki leži v notranjosti kvadrata $ABCD$. Naj bo O_2 središče krožnice, katere krožni lok podaja stranico križa, torej $|O_2I| = |O_2F|$ ter premica skozi O_2 in I je pravokotna na premico skozi O_1 in I. Točka H naj bo pravokotna projekcija točke F na stranico O_1I.

Ploščino p_4 bomo dobili tako, da bomo od ploščine štirikotnika O_1IO_2F z »ukrivljeno« stranico O_1F odšteli ploščino krožnega izseka FO_2I, torej

- $2p_4 = (|FH| + |O_2I|) \cdot |HI| + (|GO_1| + |FH|) \cdot |O_1H|$
$- |GF|^2 \cdot \angle O_1GF - |O_2I|^2 \cdot \angle FO_2I.$

Izračunajmo manjkajoče količine. Po (6) imamo

- $\angle O_1GF = \frac{\pi}{2} - \angle FGD = -\frac{\pi}{2} + 2\arctan 2.$

Ker je

- $(|FH| - |O_2I|)^2 + |HI|^2 = |O_2F|^2 = |O_2I|^2,$

sledi

- $|O_2I| = \frac{|FH|^2 + |HI|^2}{2 \cdot |FH|} = 7 - 4\sqrt{3}.$

Po kosinusnem izreku za $\triangle FIO_2$ imamo še

- $\angle FO_2I = \arccos\left(1 - \frac{|FH|^2 + |HI|^2}{2 \cdot |O_2I|^2}\right)$
$= \arccos\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}.$

Dobimo

- $P_2 = 8p_4 = 27\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} - 46 - 2\arctan 2 -$
$4\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^2 \arccos\frac{3-4\sqrt{3}}{10}.$

Ploščina drugega križa je tako približno 0,08116.

× × ×