

TRI SKULPTURE

FRANC SAVNIK

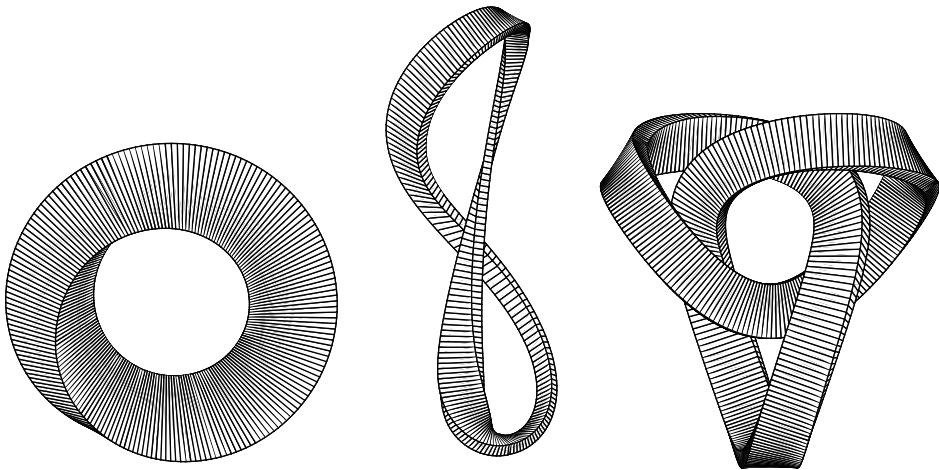
Math. Subj. Class. (2000): 00A06, 51N20, 53A04

Opišemo matematični pristop k oblikovanju treh skulptur, ki vključujejo koncept Möbiusovega traku, tretja tudi idejo vozla.

THREE SCULPTURES

A mathematical approach to designing of three sculptures is described. All of them include the idea of Möbius strip, the third one also the idea of a knot.

Matematični objekti so bili večkrat predmet umetniških upodobitev. Med takimi, ki vključujejo koncepta Möbiusovega traku in vozla, so verjetno najbolj znani lesorezi *M. C. Escherja* in skulpture *J. Robinsona*. Pritegnejo nas z nevsakdanjimi oblikami in s pritajenimi simetrijami; periodičnost, ki se spogleduje s slutnjo večnosti, jim daje nekakšno slovesno noto. Nekaterih Escherjevih mojstrov in se spominjamo z naslovnih gimnazijskih *Matematičnih beril* pokojnega prof. dr. Franceta Križaniča, fotografije vseh Escherjevih in Robinsonovih del pa lahko najdete na internetnih straneh [1] in [2].



Slika 1. Prva, druga in tretja skulptura

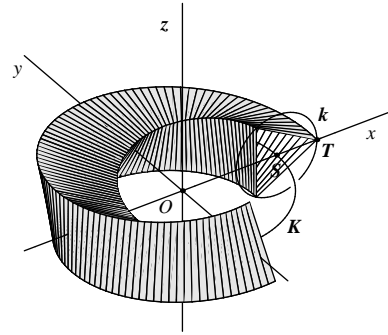
V umetnosti so znani primeri, ko so kak mikaven motiv upodabljali različni avtorji. To velja tudi za matematične skulpture. Tako dobimo na spletu

s poizvedbo 'sculpture & Moebius' več kot 88 000 zadetkov. Čeprav se je v tej zvezi uveljavil izraz *matematična umetnost* ('**math art**': 128 000 zadetkov), so prispevki, ki podrobneje pojasnjujejo matematično ozadje takih upodobitev, zelo redki. V sestavku opisujem matematični pristop k oblikovanju treh skulptur, ki vključujejo idejo Möbiusovega traku, tretja pa tudi idejo vozla.

1. Prva skulptura

je zasnovana na ideji angleškega kiparja Johna Robinsona. Pri izdelavi skulpture *Eternity* je uporabil 100 enakostraničnih trikotnih plošč, prevrtanih v težišču. Plošče je nanizal na okrogel obroč in vsako od njih zasuknil glede na prejšnjo okoli težišča za $1,2^\circ$. Podrobnosti najdete v [2].

Slika 2. Ploskev z enačbo (1.2). Po krožnici K z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, se giblje središče S enakostraničnega trikotnika, ki leži v normalni ravnini krožnice K . Trikotnik vrtimo v tej ravnini okoli S in ga pri enem obhodu krožnice K zavrtimo za 120° . Krožnica K , po kateri se giblje trikotnikovo težišče, je *stržen* dobljenega telesa.



V matematičnem modelu vzamemo namesto obroča krožnico K , ki ima središče O in polmer a . Postavimo jo v ravnino xyz kartezičnega koordinatnega sistema $Oxyz$ (slika 2). Naj bo S točka na tej krožnici. V ravnini, ki vsebuje os z in gre skozi S , je krožnica k s središčem S in polmerom b . Po krožnici k enakomerno kroži točka $T(\mathbf{r}(t))$. Če se ravnina krožnice k enakomerno zavrti okoli osi z za tri polne kote in se medtem T enakomerno zavrti okoli S za en polni kot, se T giblje po krivulji z enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = \left((a+b \cos t) \cos 3t, (a+b \cos t) \sin 3t, b \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.1)$$

Točke $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t + \frac{2\pi}{3})$ in $\mathbf{r}(t + \frac{4\pi}{3})$ so oglišča enakostraničnega trikotnika. Ko se t spreminja od 0 do 2π , stranice teh trikotnikov opišejo ploskev z enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) + u(\mathbf{f}(t + \frac{2\pi}{3}) - \mathbf{f}(t)), \quad t \in [0, 2\pi], u \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

Krožnico K imenujemo *stržen* telesa, ki ga omejuje ta ploskev.

Enačbi (1.1) in (1.2) lahko posplošimo tako, da veljata za vsak pravilni n -kotnik. Če se ta pri enem obhodu krožnice K zasuče okoli svojega središča za kot $\frac{2\pi}{n}$, se njegova oglišča gibljejo po krivulji z enačbo

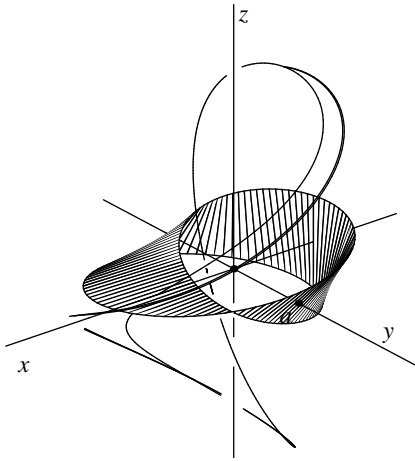
$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = \left((a+b \cos t) \cos nt, (a+b \cos t) \sin nt, b \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.3)$$

Stranice takega n -kotnika opišejo ploskev z enačbo

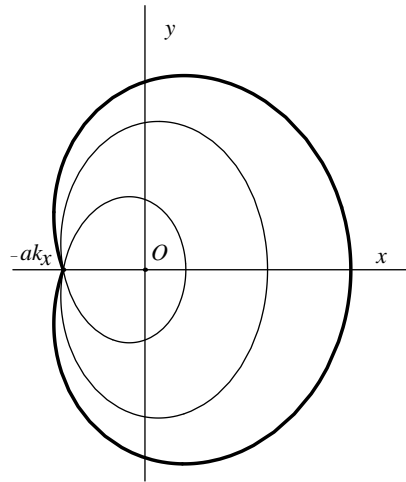
$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) + u(\mathbf{f}(t + \frac{2\pi}{n}) - \mathbf{f}(t)), \quad t \in [0, 2\pi], u \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

Pri $n = 2$ je (1.4) enačba Möbiusovega traku in (1.3) enačba njegovega roba. V tem primeru gre za sukanje izrojenega večkotnika in je v (1.4) pametno vzeti $t \in [0, \pi]$.

2. Druga skulptura



Slika 3a. Rob Möbiusovega traku raztegnemo v smeri koordinatnih osi. Del dobljene krivulje nato izbočimo. Števili k_z in $\Delta \mathbf{f}(t)$ iz (2.1) in (2.2) sta tukaj prilagojeni ilustraciji.



Slika 3b. Pravokotni projekciji krivulj (2.1) in (2.2) na ravnino $z = 0$. Projekcija krivulje $\mathbf{r} = \mathbf{g}(t)$ nad intervalom $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ je narisana krepko.

Za izdelavo njenega stržena uporabimo rob Möbiusovega traku. Rob najprej primerno raztegnemo vzdolž koordinatnih osi, tako da dobimo krivuljo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = \left(k_x(a + b \cos t) \cos 2t, k_y(a + b \cos t) \sin 2t, k_z b \sin t \right), \quad (2.1)$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

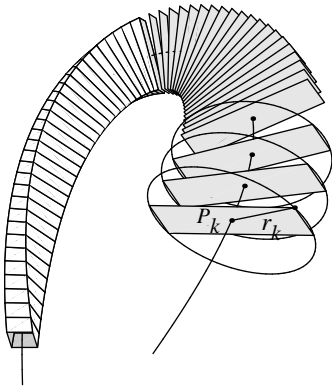
Razdelimo jo na dva loka. Vzemimo lok, ki ustreza vrednostim $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, in označimo z $\mathbf{e}(t)$ enotski vektor glavne normale loka v njegovi poljubni točki $T(\mathbf{f}(t))$. Točko T premaknimo za $\Delta\mathbf{f}(t) = \cos(t)|\mathbf{f}'(t)\Delta t|\mathbf{e}(t)$, pri čemer je Δt primerno izbran prirastek parametra. S faktorjem $\cos t$ dosežemo, da je premik največji na sredini in najmanjši na robovih intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ostanek krivulje (2.1) pustimo nespremenjen.

Krivulja

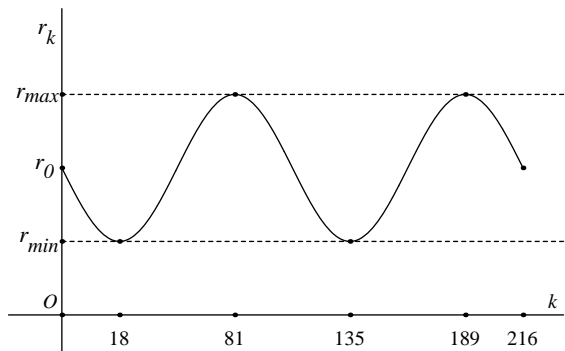
$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t) + \Delta\mathbf{f}(t) & \text{za } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \mathbf{f}(t) & \text{za } t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}, \quad (2.2)$$

je stržen skulpture.

V nadaljevanju si pomagamo z diskretizacijo. Najprej nadomestimo stržen z njegovim približkom, s sklenjeno lomljenko. Njena oglišča P_k ležijo na krivulji (2.2). Dobimo jih pa tako, da vzamemo v (2.2) zapored vrednosti $t = \frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; potem je res $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, točki P_0 in P_n pa sovpadata.



Slika 3c. Oblikovanje skulpture s strženom (2.2). Stržen nadomešča sklenjena lomljenka. Narejena je iz n daljic s krajišči na strženu.



Slika 3d. Spreminjanje polmera r_k pri drugi skulpturi na sliki 1. Lomljenka vsebuje 216 daljic. Pravokotnika na vznožju in na vrhu skulpture sta včrtana na krožnici s polmerom r_0 .

Sedaj v vsakem oglišču P_k postavimo ravnino, ki je pravokotna na tetivo P_kP_{k+1} . V vsako ravnino postavimo krožnico s središčem P_k in polmerom r_k . Včrtamo ji pravokotnik, ki ga v naslednji krožnici zasučemo okoli središča za kot $\frac{2\pi}{n}$. Velikost pravokotnikov lahko spreminjamo s pol-

merom r_k , na primer takole:

$$r_k = rA \sin\left(\frac{4k\pi}{n} + B\right) + C, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

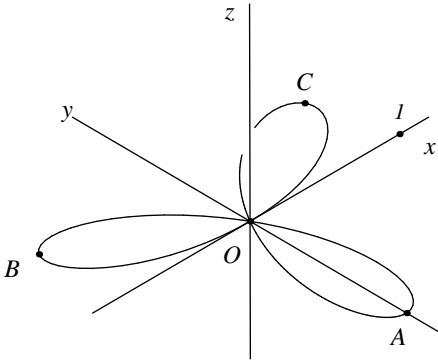
Tukaj so r , n , A , B in C primerno izbrane konstante, kot $\frac{4k\pi}{n}$ pa se pri enem obhodu stržena spremeni za dva polna kota. Na sliki 3d vidimo, kako polmer r_k pri tem obhodu dvakrat doseže svoji največji vrednosti.

3. Tretja skulptura

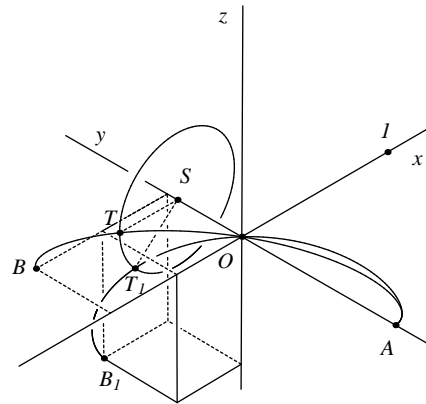
Medtem ko je stržen prve skulpture krožnica in je bil tudi pri drugi dokaj preprost, je z njim pri tretji nekoliko več dela. Za začetek vzemimo ravninsko krivuljo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t, 0), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (3.1)$$

ki jo kaže slika 4a. Če naj jo preoblikujemo v stržen skulpture, moramo njene loke zviti v prostor. Ker je krivulja simetrična glede na os y , bomo storili to najprej z lokoma AB in AC . Enačbo loka AB dobimo tako, da v (3.1) vzamemo $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$.



Slika 4a. Triperesna deteljica (*trifolium*) z enačbo (3.1) in umetniškim imenom trolistna roža (*rosa trifolia*).



Slika 4b. Lok AB zvijemo okrog osi y in s tem dobimo lok AB_1 . Točka $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ se preslika v $B_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Zavrtimo vsako točko $T(\mathbf{f}(t))$ loka AB okoli osi y za kot $t - \frac{\pi}{2}$ v točko T_1 . Označimo $\mathbf{s}(t) = (\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$ in $S(S(\mathbf{s}(t)))$ pravokotno projekcijo točke T na

os y (slika 4b). Točki T in T_1 ležita na krožnici s središčem S , polmerom $\rho(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{s}(t)$ in enačbo

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\rho(t) + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\rho(t) \times \mathbf{j}.$$

Ko t preteče vse dovoljene vrednosti, dobimo lok AB_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathbf{s}(t) + \sin(t)\rho(t) - \cos(t)\rho(t) \times \mathbf{j}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]. \quad (3.2)$$

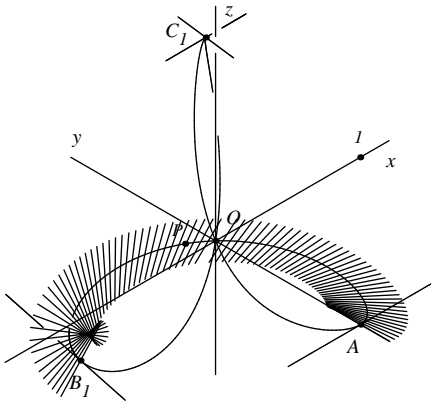
Podobno lahko zvijemo okoli osi y — v nasprotno smer kot AB — še lok AC . Isti učinek dosežemo, če prezrcalimo lok AB_1 čez os y v lok AC_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_2(t) = \left(-\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{k}\right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]. \quad (3.3)$$

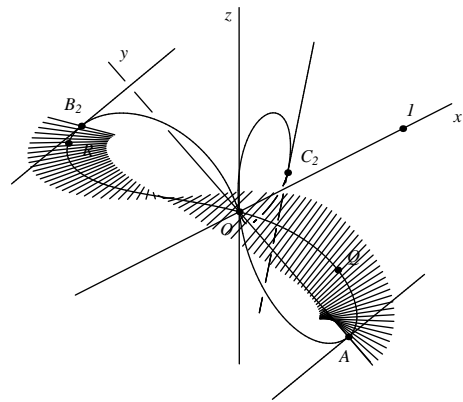
Lok AB_1 nato prezrcalimo še čez premico OB_1 v lok C_1B_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_3(t) = 2(\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{f}_1(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right], \quad (3.4)$$

pri čemer je \mathbf{e} enotski vektor osi $\overrightarrow{OB_1}$.



Slika 4c. Lok AB_1 prezrcalimo čez os y v lok AC_1 in čez premico OB_1 v B_1C_1 . Zlepek v točki C_1 ni gladek. Lok AB_1 je na odseku AP negativno, na odseku PB_1 pa pozitivno zvit.



Slika 4d. Če vzamemo $a = 1,24345655$ in zanemarimo usmerjenost lokov AB_2 , AC_2 in C_2B_2 , kot med lokoma v nobenem stičišču ne presega 10^{-6} kotne stopinje. Normale na lok AB_2 opisujejo njegovo zvijanje.

Zlepek usmerjenih lokov AB_1 , AC_1 in C_1B_1 je sklenjena krivulja, ki jo kaže slika 4c. V točkah A in B_1 je gladka, v točki C_1 pa ne. Prva je skupni začetek dveh lokov in njuni tangenti sta v stičišču A nasprotno usmerjeni;

podobno se v B_1 stikata konca lokov. Točka C_1 pa je začetek enega in konec drugega loka.

Za stržen skulpture želimo pripraviti gladko krivuljo, zato v enačbi (3.2) v obeh kotnih funkcijah t nadomestimo z at . Poskus ni uspešen: v točki A ostane sicer krivulja gladka za vsak a , vendar za nobeno vrednost a ni gladka v obeh preostalih stikih zlepka.

Z nekaj sreče najdemo faktor $\sin^2 t$, s katerim razbijemo monotonost izraza at : v obeh kotnih funkcijah enačbe (3.2) nadomestimo t s funkcijo $\varphi(t) = at \sin^2 t$, kjer je a primerno izbrana konstanta. Dobimo lok AB_2 z enačbo

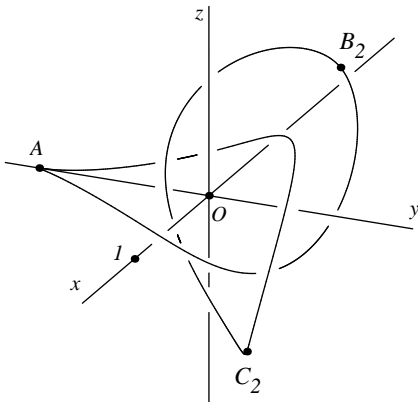
$$\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{s}(t) + \sin[\varphi(t)]\boldsymbol{\rho}(t) - \cos[\varphi(t)]\boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{j}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]. \quad (3.5)$$

Prezrcalimo ga čez os y v lok AC_2 z enačbo (3.6) in čez premico OB_2 v lok C_2B_2 z enačbo (3.7):

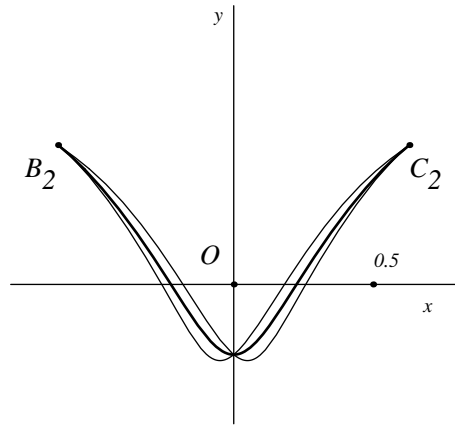
$$\mathbf{g}_2(t) = \left(-\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{k}\right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{g}_3(t) = 2(\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{g}_1(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right], \quad (3.7)$$

pri čemer je \mathbf{e} enotski vektor osi $\overrightarrow{OB_2}$.



Slika 4e. Lok AB_2 izbočimo v smeri $\overrightarrow{OC_2}$ in v smeri aktualne glavne normale. Podobno izbočimo lok AC_2 , lok B_2C_2 pa izbočimo samo vzdolž \overrightarrow{OA} .



Slika 4f. Pravokotne projekcije lokov $\mathbf{r} = \mathbf{h}_3(t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{h}_4\left(\frac{4\pi}{3} - t\right)$ in $\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi}(t)$ na ravnino $z = 0$. Projekcija loka $\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi}(t)$ je narisana krepko.

Znano je, da je predznak zvitosti krivulje $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ določen s predznakom produkta $\mathbf{f}'(t) \cdot (\mathbf{f}''(t) \times \mathbf{f}'''(t))$. Enačba $\mathbf{f}'_1(t) \cdot (\mathbf{f}''_1(t) \times \mathbf{f}'''_1(t)) = 0$ ima

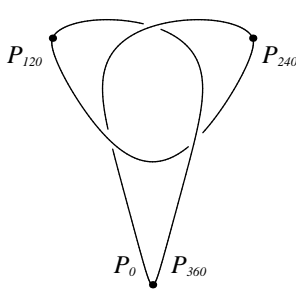
na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ le en koren, ki mu na sliki 4c ustreza točka P . V njej preide leva stran enačbe iz negativnih v pozitivne vrednosti. Enačba $\mathbf{g}'_1(t) \cdot (\mathbf{g}''_1(t) \times \mathbf{g}'''_1(t)) = 0$ pa ima na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ natanko dva korena, ki jima na sliki 4d ustrezata točki Q in R . Med njima je leva stran enačbe pozitivna, sicer pa ne.

Poskrbeti moramo še, da se loki stržena ne bodo sekali. Označimo z \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} zapored enotske vektorje smeri \overrightarrow{OA} , $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OC_2}$. Naj bo Δt izbrani prirastek parametra, $\mathbf{n}_1(t)$ in $\mathbf{n}_2(t)$ pa naj bosta zapored smerna vektorja glavne normale na krivulji (3.5) in (3.6). Sedaj vsako točko $T(\mathbf{g}_1(t))$ loka AB_2 premaknemo za

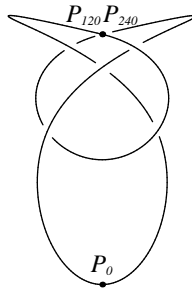
$$\Delta \mathbf{g}_1(t) = |\mathbf{g}'_1(t)| \Delta t (\alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{n}_1(t)) \cos^2 3t.$$

S konstantama α in β uravnavamo izbočenost loka. Ker je $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$, s faktorjem $\cos^2 3t$ preprečimo izbočenje v krajiščih loka in ga povečamo na njegovi sredini.

Podobno izbočimo lok AC_2 za $\Delta \mathbf{g}_2(t) = |\mathbf{g}'_2(t)| \Delta t (\alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{n}_2(t)) \cos^2 3t$, lok B_2C_2 pa samo vzdolž \overrightarrow{OA} za $\Delta \mathbf{g}_3(t) = |\mathbf{g}'_3(t)| \Delta t \gamma \mathbf{a} \cos^2 3t$, kjer je γ izbrana konstanta. Zlepek dobljenih lokov je prikazan na sliki 4e.



Slika 4g. Levo stržen, kot ga „vidi“ *Mathematica* iz točke $(0, 0, 10^5)$. Točke P_0 , P_{120} in P_{240} ustrezajo stičiščem lokov (3.8) in ležijo v ravnini $z = 0$. Desno pogled iz točke $(10^5, 0, 0)$. Točke P_0 , P_{120} in P_{240} ležijo v ravnini $x = 0$, zadnji dve se na sliki prekrivata.



Slika 4h. Na stržen nanizamo 360 skladnih pravokotnikov, vsakega na eno stranico lomljenke. Vsak pravokotnik je glede na prejšnjega zasukan okoli osi skozi svoje težišče za kot $\frac{3\pi}{360}$, zadnji glede na prvega za 3π .

Lok B_2C_2 krivulje na sliki 4e ima enačbo

$$\mathbf{h}_3(t) = \mathbf{g}_3(t) + \Delta \mathbf{g}_3(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

in ni simetričen glede na os y . To hibo odpravimo, če ga najprej prezrcalimo

Tri skulpture

čez os y v lok z enačbo

$$\mathbf{h}_4(t) = \left(-\mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{k} \right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

Krivulja

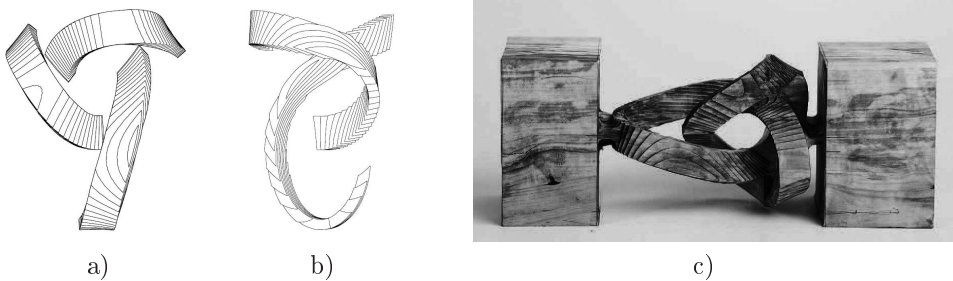
$$\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{h}_3(t) + \mathbf{h}_4\left(\frac{4\pi}{3} - t\right) \right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right],$$

je simetrična glede na os y . Zlepek lokov

$$\mathbf{h}_1(t) = \mathbf{g}_1(t) + \Delta \mathbf{g}_1(t), \quad \mathbf{h}_2(t) = \mathbf{g}_2(t) + \Delta \mathbf{g}_2(t) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\chi}(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right], \quad (3.8)$$

je že zelo podoben strženu skulpture. Glede na njegovo konstrukcijo je simetričen glede na os y , koti med tangentami v stičiščih pa ne presegajo 1,5 kotne sekunde. Točke A , B_2 in C_2 tvorijo enakostranični trikotnik s stranico $\sqrt{3}$.

Pri izdelovanju skulpture je ugodno, če ležijo vrhovi trolistnega vozla v ravnini xy . Zlepek (3.8) zato zasučemo okoli osi y tako, da vsa tri stičišča lokov ležijo v ravnini $z = 0$.



Slika 5. a) Preseki skulpture z ravninami $z = kd$, $k = 1, \dots, 19$; d je izbrana konstanta; b) preseki z ravninami $x = kd$, $k = 1, \dots, 22$; c) grobo obdelana skulptura.

Ker površje objekta ni podano z enačbo, naredimo nivojnice tako, da iz njegovega računalniškega modela najprej izrišemo slike zelo tankih plasti, ki so med seboj oddaljene približno za d . Sliko vsake plasti spremenimo s kakim risarskim programom v krivuljo in ji nato odstranimo dele, ki iz točke $(0, 0, 10^5)$ oziroma iz $(10^5, 0, 0)$ niso vidni. Izdelamo šablone, ki imajo obliko vidnih delov nivojnic. Po šablonah v grobem obdelamo les z nadmiznim rezkarjem. Višinska razdalja d med nivojnicama je na obdelovancu višina stopnice med dvema nivojema. Simetričnost skulpture glede na os y nam prihrani izdelovanje polovice šablon. Precej lesa ostane pod previsi, zlasti zato, ker strojna obdelava v smeri osi y ni možna. Odstraniti ga je treba ročno.

V nadaljevanju nadomestimo zlepek lokov z lomljenko. Njena krajišča dobimo tako, da v enačbi vsakega loka vzamemo za t vrednosti $t = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3n}$,

$k = 0, 1, 2, \dots, n$; potem je res $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$. Nato jo primerno raztegnemo v smeri koordinatnih osi. Tako dobimo za $n = 120$ sklenjeno lomljenko $P_0P_1P_2 \dots P_{360}$, pri čemer točki P_0 in P_{360} sovpadata. Nadaljnje oblikovanje poteka podobno kot pri drugi skulpturi, le da so sedaj pravokotniki, ki jih nanizamo na stržen, med seboj skladni.

J. Robinson je zapisal, da je model skulpture *Immortality* izdelal iz stotih vžigaličnih škatlic in iz bakrene cevi, ki jo je „malo zvil na pravih mestih“. Drugi spet uporabljajo za oblikovanje takih teles specializirano programsko opremo in z njo povezane 3D-tiskalnike, o čemer poroča npr. članek [5]. Zgodbo o izdelavi lesenega trolistnega vozla, podprto s programom v okolju *Mathematica*, najdemo v [6]. V njej je stržen konstruiran „po točkah“ z metodo poskusov in zmot, telo pa je zlepljeno iz 80 plasti. Pristop, ki ga opisujem v prispevku, se mi je zdel bolj športen in skulptura se da izdelati iz enega samega kosa. A to sodi v drugo vrsto obrti.

LITERATURA

- [1] *The Official M. C. Escher Website*, <http://www.mcescher.com/>.
- [2] *Symbolic Sculpture, The Collected Works of John Robinson*, <http://www.johnrobinson.com/>.
- [3] *Mathematica*, verzija 5.0, Wolfram Research, Champaign, 2003.
- [4] Eric W. Weisstein, *Rose*, <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>.
- [5] Carlo H. Séquin, *Splitting Tori, Knots, and Moebius Bands*, http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/PAPERS/Banff05_SplitTori.pdf.
- [6] Daniel Goffinet, *A Wooden Möbius Trefoil Knot*, *The Mathematica Journal* **5** (1995) 4, str. 70–73, <http://www.mathematica-journal.com/issue/v5i4/article/goffinet/70-73goffinet.mj.pdf>.

OPRAVIČILO

V prejšnji številki Obzornika za matematiko in fiziko je prišlo v članku Marka Slaparja *Integrali elementarnih funkcij* do tiskarske napake. V formuli na strani 41 manjkajo ulomkove črte.

Avtorju in bralcem se za neljubo napako iskreno opravičujemo.

Uredništvo