Po sledi neke neenakosti

Marija D. Milošević

Na pripravah za tekmovanje iz matematike so Zoran, Irena, Marjan in Zdenka reševali naslednjo nalogo:

Dokaži, da za $a > b > 0$ velja naslednja neenakost:

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b. \qquad (1)$$

Zoranova rešitev. Iz pogoja naloge $a > b$ sledi $a - b > 0$. Z množenjem te neenakosti z $\frac{a}{b}$ in z $\frac{b}{a}$ dobimo $\frac{a^2}{b} - a > 0$ in $b - \frac{b^2}{a} > 0$. Če seštejemo ti dve neenakosti, dobimo $\frac{a^2}{b} - a + b - \frac{b^2}{a} > 0$, od koder sledi iskana neenakost (1).

Irenina rešitev. Zaradi $a > b$ je $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ oz. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$. Če to neenakost pomnožimo z $a^2 + b^2$, dobimo $\frac{a^2+b^2}{b} - \frac{a^2+b^2}{a} > 0$ ali $\frac{a^2}{b} + b - a - \frac{b^2}{a} > 0$ oz. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b$, tj. (1).

Marjanova rešitev. Pogoj $a > b$ nam da $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Z množenjem te neenakosti po vrsti z a^2 in b^2 dobimo $\frac{a^2}{b} > a$ in $b > \frac{b^2}{a}$. Če seštejemo ti dve neenakosti, dobimo $\frac{a^2}{b} + b > a + \frac{b^2}{a}$, od tod pa je $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b$.

Zdenkina rešitev. Iz $a > b$ sledi $a - b > 0$. Potem je $(a - b)(a^2 + b^2) > 0$ in od tod $a^3 - b^3 - a^2 b + ab^2 > 0$, ali $a^3 - b^3 > ab(a - b)$. Z deljenjem zadnje neenakosti z ab dobimo $\frac{a^3-b^3}{ab} > a - b$, od tod pa končno sledi neenakost (1).

Poglejmo, če je neenakost (1) mogoče še izboljšati. Za $a \geq b > 0$ velja bolj natančna neenakost

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \geq a - b. \qquad (2)$$

Rešitev. Iz neenakosti $(a - b)^2 \geq 0$ sledi $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$. Če to neenakost pomnožimo z $a - b \geq 0$, dobimo $(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 3ab(a - b)$, tj. $a^3 - b^3 \geq 3ab(a - b)$. Po deljenju z $3ab$ sledi $\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \geq a - b$, (za $a \geq b > 0$), kar je bilo treba dokazati.

Naloge za samostojno delo

- Za pozitivni števili a in b dokaži naslednji neenakosti:
  - $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$;
  - $\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{b} - \frac{b^3}{a}\right) \geq a^2 - b^2$, za $a \geq b$.
- Dokaži, da za pozitivni števili a in b velja naslednja neenakost $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) \geq \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

× × ×

Rešitvi nalog iz prejšnje številke

Marko Razpet

1. Za peterico

$$(2n, 2n+1, 2n+2, 6n^2+6n+2, 6n^2+6n+3)\,, \qquad (1)$$

ki ima očitno za vsako naravno število n naravne koordinate, moramo preveriti enakost

$$(2n)^2 + (2n+1)^2 + (2n+2)^2 + (6n^2+6n+2)^2 = (6n^2+6n+3)^2\,. \qquad (2)$$

Spomniti se je treba, da je kvadrat tročlenika enak vsoti kvadratov posameznih njegovih členov in vseh dvakratnih produktov po dva člena. Račun poteka tako:

$$4n^2 + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 8n + 4) + (36n^4 + 36n^2 + 4 + 72n^3 + 24n^2 + 24n) = \\ = 36n^4 + 36n^2 + 9 + 72n^3 + 36n^2 + 36n = (6n^2 + 6n + 3)^2 .$$

S tem je enakost (2) preverjena.

Največja je peta koordinata $6n^2 + 6n + 3$, ki ne presega 100 samo za $n = 1, 2, 3$. Tedaj dobimo pitagorejske peterice:

$$(2, 3, 4, 14, 15), \ (4, 5, 6, 38, 39), \ (6, 7, 8, 74, 75) .$$

Opomba.

Z uporabo peterice (1) ne dobimo vseh pitagorejskih peteric. Pitagorejske peterice $(2, 4, 6, 13, 15)$, npr. ni med njimi.

2. Uporabimo enakost $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ in dobimo:

$$6^2 - 5^2 = (6 - 5)(6 + 5) = 1 \cdot 11 = 11,$$
$$56^2 - 45^2 = (56 - 45)(56 + 45) = 11 \cdot 101 = 1111,$$
$$556^2 - 445^2 = (556 - 445)(556 + 445) = 111 \cdot 1001 = 111111,$$
$$5556^2 - 4445^2 = (5556 - 4445)(5556 + 4445) = 1111 \cdot 10001 = 11111111.$$

Predvidevamo, da velja enakost

$$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2} . \qquad (3)$$

Če hočemo (3) zares izpeljati, ne le uganiti, se moramo spomniti, kaj desetiški mestni zapis števil sploh pomeni. Primer: 1949 je le krajši zapis števila $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9$. Brez težav pa lahko krajše izrazimo vsoto $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, kjer je q poljubno število, ki ni enako 1, n pa poljubno naravno število. Ker je $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$, dobimo S_n iz enačbe $qS_n = S_n + (q^{n+1} - 1)$:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} .$$

V posebnem primeru $q = 10$ je

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1) . \qquad (4)$$

Enakost (3) lahko sedaj z uporabo mestnega zapisa in (4) preverimo tako:

$$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 =$$
$$= (\underbrace{55\ldots5}_{n}6 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5)(\underbrace{55\ldots5}_{n}6 + \underbrace{44\ldots4}_{n}5) =$$
$$= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n}1 =$$
$$= (10^n + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 1) =$$
$$= \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1) =$$
$$= \frac{1}{9}((10^{n+1})^2 - 1) = \frac{1}{9}(10^{2n+2} - 1) =$$
$$= 1 + 10 + \ldots + 10^{2n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2} .$$

× × ×

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.
Bitcoin je primer kriptovalute, to je, sistema digitalnega plačila, ki obstaja le v elektronski obliki. Več lahko izveste v matematičnem trenutku na strani 2.

× × ×