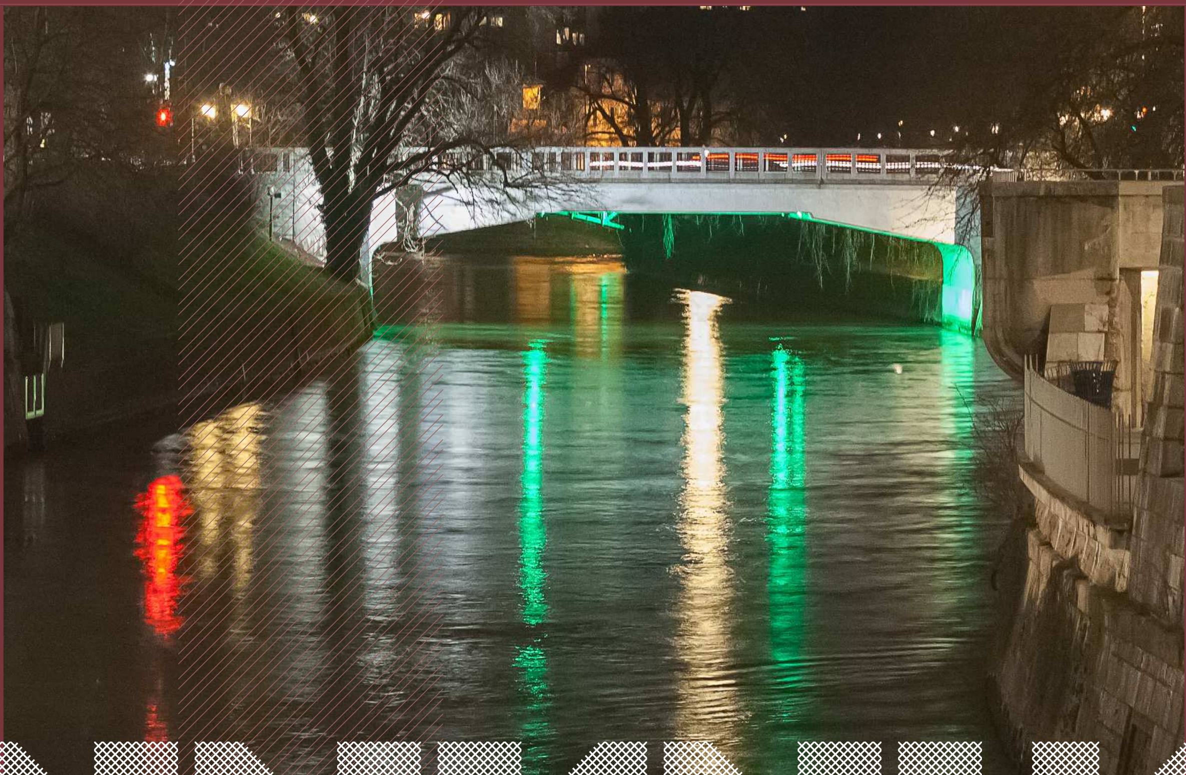
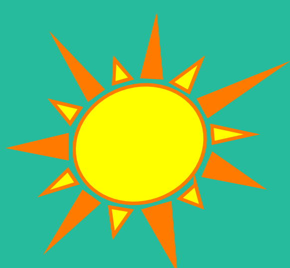
6

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

PRESEK LETNIK 45 (2017/2018) ŠTEVILKA 6



# PRESEK



- KONSTRUKCIJA S HRBTNE STRANI KOLEDARJA
- STROBOSKOPSKI EFEKT
- VIŠINSKI KOT NEBESNIH TELES
- GRAYEVE KODE

ISSN 0351-6652

9 770351 665562

# Čarobna telesa

→ Neobičajno telo na sliki ima nenavadno lastnost: ena od njegovih ravnotežnih točk je stabilna, druga pa nestabilna. Če telo stoji na spodnji stabilni točki in ga kakorkoli malenkost premaknemo, se bo vedno vrnilo v izhodiščni položaj. Na glavo postavljeno telo pa je prav tako v ravnotežni legi, a ga bo že malenkostno drezanje spravilo iz ravnotežja in čez čas obrnilo v stabilno lego s spodnjo stabilno točko na tleh. V to lego se bo telo vrnilo tudi vsakič, ko ga bomo postavili na katerokoli drugo točko.

Čeprav je že leta 1990 eden od matematikov postavil domnevo, da takšno homogeno telo (to je, neobteženo, narejeno iz enakega materiala) obstaja, je bil njegov obstoj zares potrjen šele pred desetimi leti. Madžarska matematika sta združila geometrijske premisleke, matematično programiranje in izjemno natančno izdelavo ter ustvarila telo, ki je danes znano pod imenom Gömböc. Ime v madžarščini pomeni, da telo izgleda približno tako kot krogla.

Dokazati je mogoče, da v ravnini lik s takšnimi lastnostmi ni možen. Raziskovalca sta dokaz najprej poskušala prevesti na trirazsežna telesa, a jima to ni uspelo. Namesto, da bi obupala, sta težave pri posplošitvi obrnila v prid konstrukcije iskanega telesa. Po več letih ugotavljanja lastnosti nenavadnega telesa in zbiranja podatkov (med te sodi tudi prebiranje na tisoče kamenčkov) sta končno ustvarila prvi gömböc. To pa ju ni ustavilo pri iskanju gömböca v naravnem okolju. Našla sta dve vrsti želv z oklepom, ki jima omogoča, da se po vsakem premetavanju na koncu obrneta s pravo stranjo navzgor, ne pa v lego, ki bi bila zanju smrtno nevarna.

Za več podrobnejših informacij priporočamo članek *Mono-monostatic Bodies: The Answer to Arnold's Question*, ki sta ga objavila P. L. Várkonyi in G. Domokos v reviji The Mathematical Intelligencer jeseni leta 2006.



## KOLOFON

→ **Presek**
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 6



**Dopisi in naročnine:** DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** www.presek.si
**Elektronska pošta:** presek@dmfa.si

**Naročnina** za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA–založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1300 izvodov



Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo



**Slika na naslovnici:** Na fotografiji z naslovnice vidimo odseve svetilk in osvetljenih teles, ki se na razburkani rečni gladini raztegnejo v svetle trakove. Trak nastane v navpični ravnini, ki vsebuje svetilo in opazovalca. Zaradi perspektive so trakovi videti skoraj vzporedno. Foto: Peter Legiša

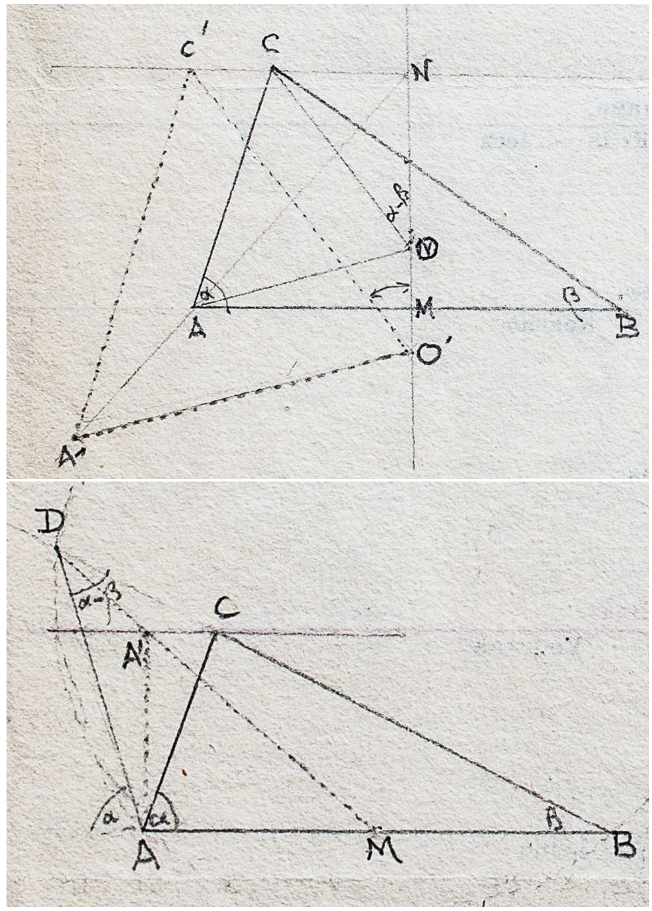
# Konstrukcije s hrbtne strani koledarja

Nada Razpet

**→ Nekdaj so ljudje skrbno hranili vse popisane in nepopisane liste papirja. Tako lahko v različnih arhivih najdemo zanimive rokopise, ki pričajo o življenju in delu ljudi.**

Letos smo med brskanjem po zapuščini dr. Josipa Plemlja našli na hrbtni strani starega koledarja [1] nekaj konstrukcij trikotnika, za katerega poznamo osnovnico $c$, višino $v_c$ na osnovnico in razliko kotov $\varepsilon = \alpha - \beta$. Z nalogo se je Plemelj seznanil v gimnaziji. Konstrukcije trikotnikov so še danes del učnega programa za srednješolce (in nekatere tudi za osnovnošolce). Nekatere naloge hitro rešimo, druge pa zahtevajo obširnejše znanje povezav med različnimi elementi, ki nastopajo v trikotniku. Konstrukcija omenjenega trikotnika sodi med zahtevnejše naloge. Nekaj rešitev je Plemelj objavil [2].

Nekaj, še ne objavljenih rešitev te naloge pa smo našli na prej omenjeni hrbtni strani koledarja. Ker pa so na njej le skice (sem in tja je Plemelj sicer zapisal kakšno opombo), pot do njegovih rešitev ni takoj vidna in jo je treba pravzaprav znova poiskati. Lahko bi rekli, da smo z geometrijsko raziskavo iz narisane skice trikotnika našli pot do konstrukcije. Poleg tega pa so risbe tudi zbledele, zato so nekatere črte slabo vidne. Ogledali si bomo dve od Plemljevih še neobjavljenih rešitev s tega koledarja.



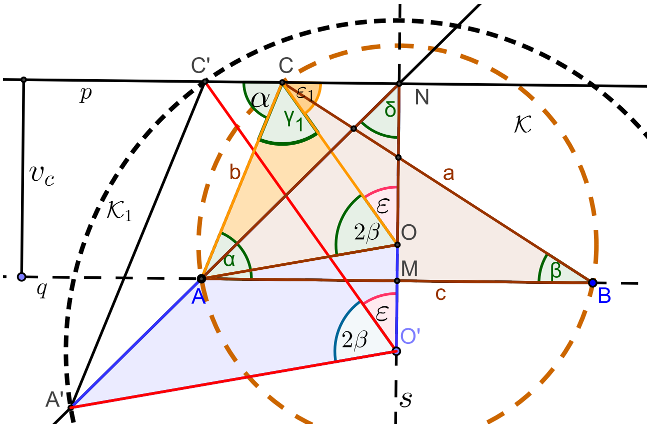

**SLIKA 1.**
Plemljevi skici rešitve naloge s hrbtne strani koledarja

## Prva rešitev

Konstruiraj trikotnik, če je dana osnovnica, višina nanjo in razlika kotov ob osnovnici ($AB = c$, $v_c$, $\varepsilon = \alpha - \beta$). Omejili se bomo le na primere, ko je $\alpha > \beta$ in posledično $0 < \varepsilon < \pi$.

Dopolnimo Plemljevo skico (slika 2).

Obravnava. Mislimo si, da trikotnik $ABC$ poznamo in mu očrtamo krožnico $\mathcal{K}$ (slika 2). Središče krožnice je v točki $O$. Narišemo simetralo $s$ stranice $c$. Simetrala $s$ seka osnovnico $c$ v točki $M$. Skozi točko $C$ narišemo vzporednico $p$ k premici $q$, ki je nosilka




**SLIKA 2.**
Dopolnjena Plemljeva skica

osnovnice $c$. Premica $p$ seka simetralo $s$ v točki $N$. Trikotnik $AOC$ je enakokraki trikotnik z osnovnico $AC$. Na simetrali $s$ si poljubno izberemo točko $O'$. V točki $O'$ narišemo vzporednico k daljici $CO$. Vzporednica seka premico $p$ v točki $C'$. Narišemo krožnico $\mathcal{K}_1$ s središčem v $O'$ in polmerom $O'C'$. Vzporednica skozi $C'$ k stranici $AC$ seka krožnico $\mathcal{K}_1$ v točki $A'$. Trikotnik $A'O'C'$ je tudi enakokraki. Enakokraka trikotnika $AOC$ in $A'O'C'$ imata vzporedni osnovnici in en par krakov, kar pomeni, da imata enaka kota ob osnovnici in posledično enake vse kote, sta si podobna. Narišemo premico $A'N$, na njej leži tudi oglišče $A$ (podobnostni razteg). Tudi trikotnika $A'O'N$ in $AON$ sta si podobna, kar lahko bralci sami hitro pokažejo.

Oglejmo si še kote. Trikotnik $CON$ je pravokotni trikotnik s pravim kotom v oglišču $N$, zato velja

- $\sphericalangle OCN = \varepsilon_1 = \dfrac{\pi}{2} - \sphericalangle NOC.$

Kot $\sphericalangle COA$ je središčni kot, kot $\sphericalangle CBA = \beta$, je obodni kot nad istim lokom $\overset{\frown}{AC}$, zato velja: $\sphericalangle COA = 2\beta$. Kot $\sphericalangle C'CA = \alpha$, saj sta to kota z vzporednima krakoma. Trikotnik $AOC$ je enakokraki z osnovnico $AC$ in zato velja:

- $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \gamma_1 = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

- $\alpha + \gamma_1 + \varepsilon_1 = \pi, \qquad \varepsilon_1 = \dfrac{\pi}{2} - \sphericalangle NOC \qquad \Rightarrow$
$\sphericalangle NOC = \alpha - \beta = \varepsilon$

Iskani trikotnik še narišimo. Potrebujemo svinčnik, papir, šestilo in ravnilo, če rišemo *po starem*, ali računalnik z ustreznim programom, recimo GeoGebro, če imamo raje tehnologijo. Sledimo navodilom za konstrukcijo.

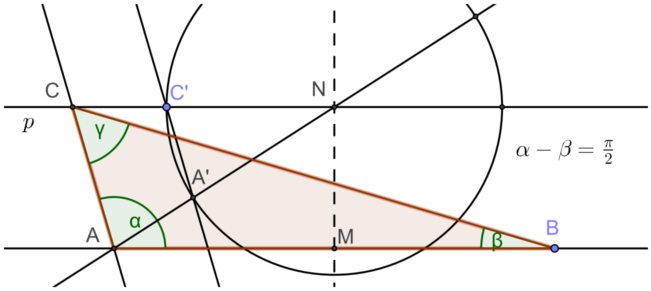
Konstrukcija. Načrtamo stranico $AB = c$, narišemo simetralo stranice $c$, dobimo točko $M$. Na simetrali $s$ iz točke $M$ odmerimo višino $v_c$ in dobimo točko $N$. Iz točke $N$ narišemo vzporednico $p$ k stranici $c$. Nekje na simetrali $s$ izberemo točko $O'$. Ob simetrali $s$ z vrhom v $O'$ narišemo kot $\varepsilon = \alpha - \beta$, kjer drugi krak tega kota seka premico $p$, je točka $C'$. Narišemo premico $(N, A)$ in krožnico $\mathcal{K}_1$ s središčem v $O'$ in polmerom $r_1 = O'C'$. Presečišče krožnice $\mathcal{K}_1$ s premico $(A, N)$ je točka $A'$. Načrtamo daljico $A'C'$ in vzporednico k tej daljici skozi točko $A$. Presečišče te vzporednice in premice $p$ je točka $C$, iskano oglišče trikotnika $ABC$. Narišemo trikotnik $ABC$.

Opomba. Plemelj je izbral lego točke $O'$ tako, kot smo to naredili na skici 2. Mi pa razmislimo, od česa je odvisen izbor lege točke $O'$. Drugi krak kota, ki ima vrh v izbrani točki $O'$ in en krak na simetrali $s$, mora sekati vzporednico $p$. To pa pomeni, da je izbor lege točke $O'$ odvisen od velikosti kota $\varepsilon$. Če je $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, potem si izberemo točko $O'$ na simetrali $s$ pod točko $N$, če pa je $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$, pa nad točko $N$.

Kaj pa če je $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$? Potem je točka $O'$ kar točka $N$. Na premici $p$ si tedaj poljubno izberemo točko $C'$ (slika 3). Narišemo krožnico s središčem v $N$ in polmerom $NC'$, ki seka premico skozi točki $A$ in $N$ v točki $A'$. Skozi točko $A$ narišemo vzporednico s premico skozi točki $A'$ in $C'$, ki seka premico $p$ v točki $C$. Narišemo trikotnik $ABC$.

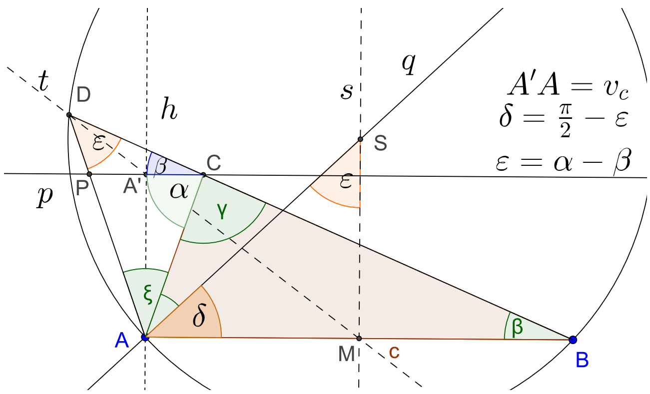
## Druga rešitev

Oglejmo si še eno rešitev iste naloge s hrbtne strani koledarja (slika 1 spodaj). Zopet dopolnimo Plemljevo skico (slika 4). Narišimo iskani trikotnik $ABC$. Podaljšajmo stranico $CB$ skozi oglišče $C$. V oglišču $A$ narišemo pravokotnico $h$. Skozi $C$ potegnemo vzporednico $p$ k osnovnici $c$. Presečišče premic $p$ in $h$ je točka $A'$. Prezrcalimo točko $C$ čez premico $h$ in →




**SLIKA 3.**
Konstrukcija trikotnika, če je razlika kotov $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

dobimo točko $P$. Trikotnik $PCA$ je enakokraki. Narišemo premico $(A, P)$. Presečišče te premice in premice $(B, C)$ je točka $D$. Trikotniku $ABD$ očrtamo krožnico. Središče $S$ krožnice leži na simetrali $s$ stranice $c$.




**SLIKA 4.**
Trikotnik $PCD$ je podoben trikotniku $ABD$.

Trikotnik $PCD$ je podoben trikotniku $ABD$. Oba trikotnika imata skupen kot $\varepsilon$, kot $\sphericalangle DCP$ je enak kotu $\beta$, en krak je skupen, druga dva kraka pa sta vzporedna. Para istoležnih stranic, ki oklepata skupni kot $\varepsilon$, $PD$ in $AD$ ter $CD$ in $BD$ ležita na istih premicah. Osnovnici obeh podobnih trikotnikov pa tudi ležita na vzporednicah. Zato tudi težiščnici $t_{PC}$ in $t_{AB}$ obeh trikotnikov ležita na isti premici, to pa pomeni, da točka $D$ leži na premici skozi točki $A'$ in $M$, to je na premici $t$.

Izračunajmo še kot $\varepsilon$. Kot $\sphericalangle PCA = \sphericalangle BAC = \alpha$. En krak je skupen, druga dva pa vzporedna. Trikotnik $PCA$ je enakokraki, zato je $\sphericalangle CAP = \xi = \pi - 2\alpha$. Torej je

$$\begin{aligned}\varepsilon = \sphericalangle ADC &= \pi - \beta - \alpha - \xi \\ &= \pi - \beta - \alpha - \pi + 2\alpha \\ &= \alpha - \beta.\end{aligned}$$

Kot $\sphericalangle ADC$ je obodni kot nad lokom $\widehat{AB}$, kot $\sphericalangle ASM$ je polovica središčnega kota nad istim lokom, torej je enak kotu $\varepsilon$. Trikotnik $AMS$ je pravokotni, zato je kot $\delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Zdaj pa na delo. Narišimo iskani trikotnik po navodilih.

**Konstrukcija.** Načrtamo daljico $AB$ in njeno simetralo $s$. Razpolovišče stranice $c$ označimo z $M$. V točki $A$ narišemo pravokotnico na osnovnico in nanjo nanesemo $v_c$, dobimo točko $A'$. Iz $A'$ narišemo vzporednico $p$ k osnovnici. Ob osnovnici z vrhom v $A$ narišemo kot $\delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Kjer krak tega kota seka simetralo $s$, dobimo točko $S$. Narišemo krožnico s središčem v $S$ in polmerom $r = SA$. Narišemo premico $t$ skozi točki $M$ in $A'$. Presečišče premice $t$ in krožnice je točka $D$. Povežemo točki $D$ in $A$. Presečišče daljice $DA$ in premice $p$ je točka $P$. Točko $P$ prezrcalimo čez premico $h$ in dobimo iskano oglišče $C$. Narišemo trikotnik $ABC$.

Preučili smo dve različni Plemljevi konstrukciji istega trikotnika. Spoznali smo, da tudi veliki matematiki skušajo nalogo rešiti na več načinov, kar pomaga pri iskanju ne le novih spoznanj o medsebojnih povezavah med elementi trikotnika, ampak daje namig tudi za reševanje drugače zastavljenih nalog.

## Literatura

[1] AS 2012, Plemelj Josip, škatla 3, mapa 58, J. Plemelj, *Razni matematični zapiski in rokopisi*.

[2] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik za matematiko in fiziko, **39**, 1992, 6, 190–191.

× × ×

# Diofantove knjige

Marko Razpet

→ Diofant je bil antični matematik, ki je deloval v Aleksandriji v Egiptu. O njem ne vemo veliko, niti približne letnice rojstva in smrti ne. Na podlagi omemb v komentarjih njegovih matematičnih del posredno sklepajo, da je živel v 3. stoletju našega štetja. Prav tako ne vemo, kakšne narodnosti je bil. Matematika, ki jo je študiral, se je precej razlikovala od starogrške, ki je temeljila predvsem na geometriji. Diofanta pa so zanimale zlasti enačbe, kar daje slutiti, da je v Aleksandrijo, takratno veliko znanstveno središče, prišel iz Mezopotamije, kjer so se več ukvarjali z enačbami kot v grškem svetu.

O zasebnem Diofantovem življenju še največ izvemo iz epitafa, nagrobnega napisa v grških heksametrih, ki se v prevodu profesorja Franceta Križaniča (1928–2002) glasijo takole:

> Modrec ob grobu postoj, počasti pepel Diofanta, leta njegova preštej, odmerjena z voljo bogov. Šesti del sojenih let ozarja mu sreča otroštva, še pol šestine mini, ko lica poraste mu puh. Let še sedmino nato izbere si vdano družico. Pet let že druži ju vez, ko se rodi jima sin. Le pol očetovih dni je ljubljencu dano živeti, radost očetova vsa v prerani utrne se grob. Dvakrat dve leti bridko pretoži nad težko izgubo, potlej utrujen še sam za vselej zatisne oči.

Če označimo z $x$ Diofantovo starost ob njegovi smrti, potem na podlagi zgornjih heksametrov pridemo do enačbe:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Rešitev je $x = 84$. Diofant je torej živel 84 let.

Veliko grških pesmi in napisov, tudi nagrobnih z Diofantovim vred, je zbral v *Grški antologiji* matematik in slovničar Metrodor, ki je verjetno živel v 6. stoletju. V antologijo je vključil tudi matematične probleme. Gre večinoma za naloge, ki jih rešimo z enačbami z eno neznanko. *Grška antologija* je doživela več priredb, prepisov in ponatisov.

Diofant se je predvsem ukvarjal z algebrskimi enačbami s celimi koeficienti, za katere je iskal rešitve v naravnih ali pa vsaj v pozitivnih racionalnih številih. Zato ga imajo mnogi upravičeno za očeta algebre. Znano je, da je napisal tri dela: *Porizme*, *O večkotniških številih* in najpomembnejše, *Aritmetiko* (iz grške besede *arithmós*, kar pomeni *število*, za Diofanta pa tudi *neznanka*). Delo *Porizmi* velja za izgubljeno, se pa nanj Diofant pogosto sklicuje v *Aritmetiki*. Drugo, ne popolnoma ohranjeno delo, ki ni imelo posebnega vpliva na razvoj matematike, navadno priključijo na konec *Aritmetike*, ki je Diofantovo najpomembnejše delo. Diofantovo *Aritmetiko* so v stoletjih veliko prepisovali, komentirali, prevajali in tiskali. Sam Diofant pove na začetku *Aritmetike*, da bo snov obravnaval v trinajstih knjigah (verjetno je mislil na zvitke). Od teh se nam jih je ohranilo šest v grščini (obravnavane v [1,2]), okoli leta 1980 pa so našli v neki iranski knjižnici še štiri druge v arabskem prevodu. Le-te po vsebini logično sodijo takoj za prvimi tremi v grščini, zadnje tri v grščini pa takoj za štirimi arabskimi (obravnavane so v [3]). Ni znano, kaj je s preostalimi tremi knjigami. Morda so za vedno izgubljene, lahko pa se je dogajalo, da so njihovo vsebino v toku stoletij prerazporejali po znanih desetih knjigah.

Diofantova *Aritmetika* je imela velik vpliv tako na arabsko kot na evropsko algebro. Francoski matematik François Viète (1540–1603) je zelo izboljšal Diofantov način zapisovanja algebrskih izrazov, Pierre de Fermat (1601–1665) pa je znan po tem, da je študiral Diofantovo *Aritmetiko*, ki jo je v latinščino prevedel Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638) in je izšla leta 1621. Fermat je na rob izvoda svoje *Aritmetike* zapisoval razne pripombe, formuliral več svojih trditev, od katerih nekatere držijo, nekatere pa ne. Med drugim je na rob *Aritmetike* zapisal tudi znameniti *poslednji Fermatov izrek*, ki trdi, da enačba $x^n + y^n = z^n$ za naravne eksponente $n$, ki so večji kot 2, nima rešitev v naravnih številih. Izreka →

Fermat ni dokazal, češ, da sicer pozna zanj čudoviti dokaz, ki ga pa zaradi pomanjkanja prostora na robovih *Aritmetike* ne more zapisati. Posledica tega je bila, da je veliko slovečih matematikov, pa tudi amaterjev, izrek skušalo dokazati, a je trajalo okoli 350 let preden je bil dokazan. Dokaz je dolg in težak, posrečil pa se je leta 1993 Angležu Andrewu Johnu Wilesu, rojenemu leta 1953.

Oglejmo si nekaj značilnosti Diofantove *Aritmetike*. Ne vemo zagotovo, kdo je bil Dionizij, ki ga omenja Diofant na začetku. Morda je bil kasnejši aleksandrijski škof. Danes bi vsekakor rekli, da je bilo že v Diofantovih časih v modi pisanje namena knjige. Ta tradicija se je ohranila do današnjih dni. Tako pravi Diofant na začetku svoje prve knjige:

*Ker vem, moj zelo spoštovani Dionizij, da si zelo prizadevaš, da bi se naučil reševati aritmetične naloge, sem Ti torej poskusil znanstveno predstaviti postopek. Pri tem začenjam z opazovanjem narave in lastnosti števil, kajti na njih temelji vsa stvar.*

*Morda se bo snov zdela nekoliko težka, ker Ti je še popolnoma tuja in ker imajo začetniki pač malo upanja na uspeh. Toda s Tvojo pridnostjo in mojo predstavitvijo bo stvar postala lahko razumljiva, kajti hitro se učimo, če se združita prizadevnost in poučevanje.*

Diofant v svoji *Aritmetiki*, ki bi danes bolj sodila v algebro in teorijo števil, vpelje posebno oznako za neznanko, pa tudi izraze in oznake za potence ter odštevanje, uporablja ulomke in enačbe ter pravila za delo z njimi. Če je neznank več, jih poimenuje prva, druga itd. V vseh desetih knjigah *Aritmetike*, ki jih poznamo, je zbranih okoli 300 nalog, ki vodijo do algebrskih enačb s celimi koeficienti. Diofant razlaga, kako jih rešujemo, išče pa samo rešitve v naravnih ali vsaj v pozitivnih racionalnih številih. Negativnih rešitev ne priznava za smiselne. Naloge so logično in sistematično razvrščene. Pogosto se sklicuje na postopke v predhodnih nalogah. Diofantu v čast imamo dandanes *diofantske enačbe*, to so algebrske enačbe s celimi koeficienti, za katere iščemo samo celoštevilske rešitve. V *Aritmetiki* se Diofant zadovolji z eno rešitvijo, čeprav jih je lahko tudi več. Nekatere njegove ideje so uporabljali tudi veliki evropski matematiki, npr. Leonhard Euler (1707–1783).

Da bi se vživeli v Diofantove naloge iz *Aritmetike*, si za primer eno oglejmo podrobneje. Spada po [3] v četrto knjigo na sam začetek. Seveda jo bomo reševali in komentirali v sodobnem jeziku in s sodobnimi oznakami. Beseda *število* v njej pomeni naravno ali vsaj pozitivno racionalno število.

Naloga. Poiskati želimo kubični števili, katerih vsota je kvadratno število.

Tako se dobesedno (v prevodu) glasi naloga v [3]. Kvadratno (kubično) število je kvadrat (kub) nekega števila. Diofant je zadovoljen z eno rešitvijo.

Če je število kvadrat, ga Diofantovi komentatorji označujejo z $\square$. Prvo iskano število označimo z $a$, drugo pa z $b$. Naloga nas pripelje do enačbe $a^3+b^3=\square$. Diofant izbere $a = x$, kjer je $x$ neznanka. Nato vzame $b = 2x$ in zapiše $x^3 + (2x)^3 = 9x^3 = \square$, nakar izbere $\square = (6x)^2 = 36x^2$ in dobi enačbo $9x^3 = 36x^2$. Račun se lepo izide: $x = 4$. Dobi rezultat $a = 4, b = 8$. Preizkus: $4^3 + 8^3 = 576 = 24^2$. Diofant s tem nalogo konča.

Naloga ima še druge rešitve v naravnih številih. Eno, $a = 1, b = 2$, zlahka uganemo. Preizkus: $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$. Toda naloga ima nešteto rešitev, kar hitro vidimo, če vzamemo $a = k^2, b = 2k^2$, kjer je $k$ poljubno naravno število. Preizkus: $a^3+b^3 = k^6+8k^6 = 9k^6 = (3k^3)^2$. Vendar tako ne dobimo vseh rešitev. Med njimi npr. ni rešitve $a = 7, b = 21$. Problem, kako poiskati vse rešitve, pa že presega namen tega članka.

Diofant rešuje veliko nalog na način, kakršnega smo pravkar spoznali. Najbrž je tako učil tudi svoje učence. Diofantovo genialnost v reševanju enačb lahko iz današnje časovne oddaljenosti samo občudujemo.

## Literatura


[1] T. Heath, *A History of Greek Mathematics, Volume II*, Dover Publications, New York 1981.

[2] P. Tannery, *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentarii, Vol. I*, Teubner, Leipzig 1893.

[3] J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusṭā ibn Lūqā*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1982.


×××

# Stroboskopski efekt

Peter Legiša

## Filmanje vrtečega se kolesa

Pri snemanju filmov in videov delamo zaporedne fotografije stanja v kratkih časovnih presledkih, vsaj 24-krat na sekundo. Ko to zaporedje fotografij predvajamo v enakem tempu, naši možgani niso zmožni individualno zaznati posameznih slik. Povežejo jih in tako dobimo bolj ali manj dobro reprodukcijo dogajanja. Ampak včasih pride do nenavadnih efektov. V kavbojskih filmih imamo vozove in kočije z veliko prečkami (špicami). Kar pogosto se zgodi, da se v najbolj napetih scenah, ko roparji ali Indijanci zasledujejo dirjajoči voz, v filmu kolesa vrtijo nazaj. Kako je to mogoče?

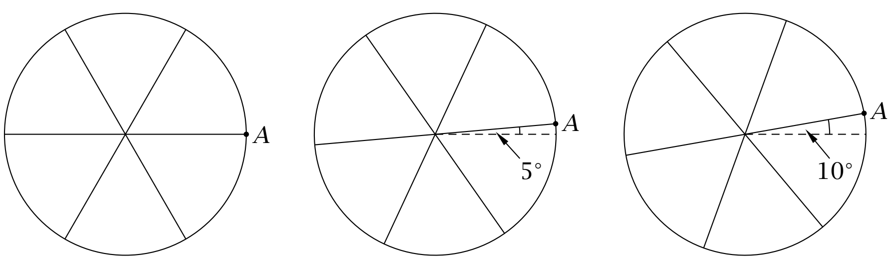
Razlaga ni težka. Vzemimo zaradi lažjega risanja kolo s šestimi špicami, katerega os je pritrjena na steno nasproti nas. Kolo se vrti v pozitivni smeri, torej nasprotno smeri urnega kazalca. Snemamo vrtenje kolesa. Čas med dvema zaporednima posnetkoma naj bo $T$.

Če se kolo vrti s *kotno hitrostjo* $\omega$, to pomeni, da se v času $t$ katerakoli točka na kolesu (izjema je negibna točka na osi) zavrti za kot $\varphi = \omega t$.

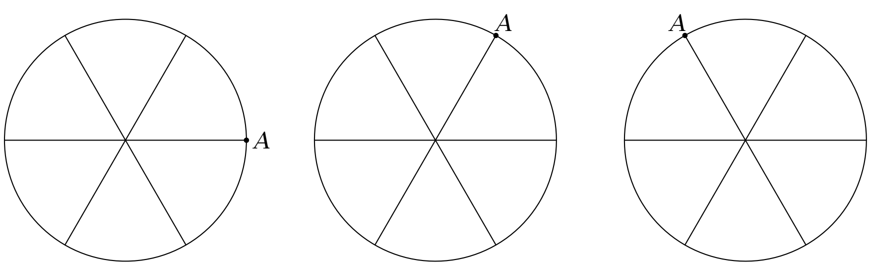
Pri majhnih hitrostih vrtenja, denimo pri $\omega T = 5^\circ$, se med dvema zaporednima posnetkoma kolo zavrti za pet stopinj nasprotno smeri urnega kazalca, kot na sliki 1. Naša glava to interpretira kot vrtenje v pozitivni smeri.

Kaj pa, če se kolo med dvema zaporednima slikama zavrti točno za šestino polnega kota, torej za $60^\circ$? Potem bo na mesto ene prečke v naslednjem posnetku prišla druga zaporedna, kot vidimo na sliki 2. Ker so prečke enake oblike, bodo zaporedne slike enake. (Točka $A$ je označena le na sliki, ne na samem kolesu.) Pri projekciji videa bomo imeli občutek, da kolo stoji.

Zdaj naj se kolo med dvema zaporednima slikama zavrti za malo več kot 60 stopinj, denimo za $65^\circ$. Zaporedje posnetkov na sliki 3 je povsem enako kot na sliki 1, saj so prečke enake. Točka $A$ na samem kolesu seveda ni označena. Zaznamovali smo jo le na sliki. Navajeni smo, da povežemo bližnje elemente




**SLIKA 1.**
Od enega posnetka do drugega se kolo zavrti za pet stopinj.




**SLIKA 2.**
Od enega posnetka do drugega se kolo zavrti za 60 stopinj.

na zaporednih slikah. Videti bo, kot da se kolo počasi vrti nasprotno smeri urnega kazalca s kotno hitrostjo, ki znaša 5/65 = 1/13 resnične kotne hitrosti.

Denimo zdaj, da je $\omega T = 54°$. Med dvema zaporednima posnetkoma se kolo zavrti za 54 stopinj kot na sliki 4. V naslednjem posnetku bo izbrana prečka šest stopinj za prejšnjo lego naslednje prečke. Ko v glavi povežemo bližnje elemente na zaporednih slikah, bomo to interpretirali kot vrtenje v smeri urnega kazalca – kot da se v času $T$ kolo zavrti za šest stopinj v negativni smeri. Se pravi, na filmu bo videti, kot da se kolo počasi vrti v napačni smeri s kotno hitrostjo, ki znaša 6/54 = 1/9 resnične kotne hitrosti.

## Aliasing ali napaka pri vzorčenju

Zadnje tri napake sodijo v zelo široko področje, ki ga v angleščini imenujejo **aliasing**, kar bi lahko prevedli kot **napaka pri vzorčenju**. Zaporedje posnetkov namreč ni nič drugega kot jemanje vzorcev dogajanja.

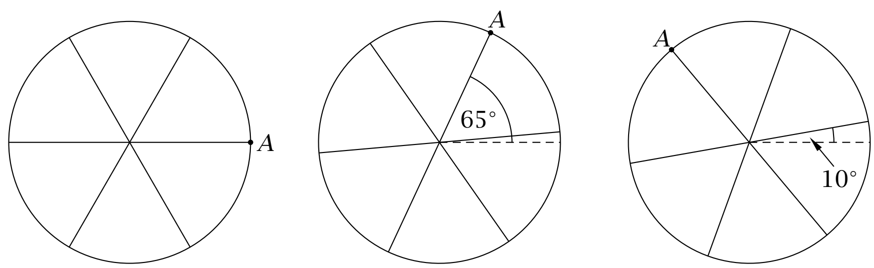
Latinska beseda **alias** pomeni drugikrat, ob drugi priložnosti. Danes alias pomeni tudi drugo ime, drugo eksistenco. Naše vrtenje ob zgrešenem vzorčenju dobi drugačen videz, nekak alias, ki je v nasprotju z resničnostjo. Do tega nezaželenega pojava bo prišlo pri kolesih z veliko prečkami že pri manjših kotnih hitrostih. Do napake bo teže prišlo, če bomo vzorčili bolj na gosto, se pravi, snemali z večjim številom sličic na sekundo.

## Stroboskop

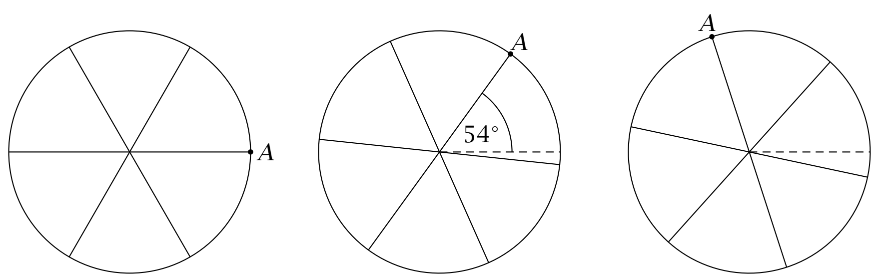
**Stroboskop** je bliskavica, ki je zmožna oddajati zelo kratke bliske drugega za drugim, v enakih časovnih presledkih, z vnaprej določeno frekvenco. Frekvenca je število ponavljajočih se dogodkov (v našem primeru bliskov) v časovni enoti. Merimo jo v hertzih ali hercih. Hertz (Hz) je druga oznaka za $s^{-1}$. Ime ima po nemškem fiziku Heinrichu Rudolfu Hertzu (1857–1894). Ta si je slavo pridobil med drugim z eksperimentalno potrditvijo, da je svetloba elektromagnetno valovanje.

Že za nekaj sto evrov dobimo digitalni stroboskop, ki je zmožen frekvenc od 1 do 1500 Hz (se pravi od 1 do 1500 bliskov na sekundo). V klasičnih stroboskopih je ksenonska cev – kot v fotografski bliskovki. Zdaj najdemo tudi stroboskope s svetlečimi diodami (LED).

Gibajoči se svinčnik smo na sliki 5 osvetlili z večjo fotografsko bliskavico v stroboskopskem načinu s 100 bliski na sekundo. Bliskavico smo naravnali na najmanjšo moč (1/128 polne moči), tako da so bliski kar se da kratki. Čas osvetlitve je znašal 1/25 s, zaslonsko število na kameri smo določili s poskušanjem. Bliskavica je v tem času oddala štiri zelo kratke svetlobne impulze, ki so zamrznili gibanje svinčnika.




**SLIKA 3.**
Med dvema posnetkoma se kolo zavrti za 65 stopinj.




**SLIKA 4.**
Med dvema posnetkoma se kolo zavrti za 54 stopinj.


**SLIKA 5.**
Gibajoči se svinčnik, osvetljen 1/25 sekunde s stroboskopom pri 100 Hz.

Domača naloga. Premer svinčnika je okrog sedem milimetrov. Ocenite povprečno hitrost gibanja konca svinčnika med posameznimi bliski.

S stroboskopom lahko določimo kotne hitrosti vrtečih se objektov. Kadar objekt nima kake markantne točke, lahko s kredo naredimo oznako stran od osi ali pa nalepimo stran od osi košček papirja, izolirnega traka. To je kot kolo z eno samo prečko. Osvetlimo s stroboskopom in spreminjamo frekvenco stroboskopa. Ko je oznaka videti nepremična, je število polnih obratov na sekundo (= frekvenca) vrtečega se objekta očitno cel večkratnik frekvence $\nu$ stroboskopa, se pravi enaka $m\nu$, kjer je $m$ eno od števil $1, 2, 3, 4 \ldots$

Poskusimo osvetliti objekt nato z dvakratnikom frekvence $\nu$. Če je košček spet nepremičen, lahko spet sklepamo, da je frekvenca objekta cel večkratnik od $2\nu$. Če vidimo dve kopiji oznake, simetrični glede na os vrtenja, je frekvenca vrtečega se objekta $k\nu$, kjer je $k$ eno od lihih naravnih števil, se pravi eno od števil $1, 3, 5 \ldots$ V tem primeru osvetlimo s frekvenco $3\nu \ldots$ Tako lahko zožimo nabor možnih frekvenc. Navadno približno vemo, kolikšna naj bi bila frekvenca vrtečega se objekta. S stroboskopom frekvenco natančneje določimo.

Avtomehanik ima majhen stroboskop, s katerim pri bencinskih motorjih posveti na vrteči se razdelilec vžiga in preveri ali nastavi vžig.

## Stroboskopski efekt

Domača naloga. Imamo vrteče se kolo s šestimi prečkami. Pri osvetlitvi s stroboskopom s frekvenco $\nu$ je videti nepremično. Kolikšna je frekvenca kolesa (= število obratov na sekundo)? Odgovor seveda ni enoličen.

Denimo, da imamo ponavljajoče se dogajanje. Če osvetlitev s pulzirajočo svetlobo (ali snemanje) to dogajanje »zamrzne« ali bistveno upočasni, je to primer **stroboskopskega efekta.**

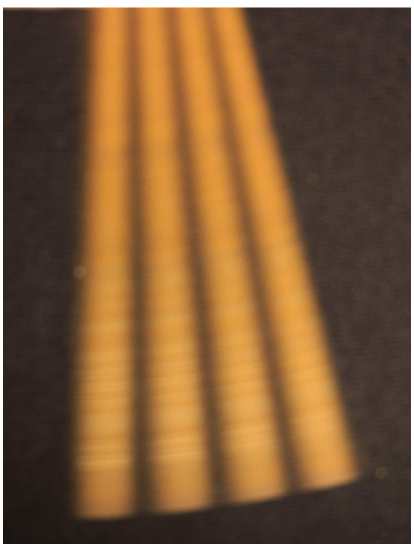
Vzemimo, da z video kamero snemamo panoramo. Pri tem kamero vrtimo okrog navpične osi. Če osrednji del slike zavzema objekt s ponavljajočim se vzorcem in v dveh ali več zaporednih posnetkih dobimo praktično enake slike, bo videti, kot da se je v tem časovnem obdobju naše vrtenje ustavilo. Panorama bo »cukala«. To je spet primer stroboskopskega efekta. Zaradi tega in drugih razlogov navadno panoramske posnetke vlečemo zelo počasi.

S stroboskopom lahko odkrijemo ponavljajoča se dogajanja, ki jih sicer ne bi opazili. Spomnim se, kako nam je pred leti Presekov urednik dr. Andrej Likar v Fizikalnem praktikumu osvetlil s stroboskopom curek vode iz pipe. Pri določeni frekvenci smo videli fantastično drevo, katerega deblo je bil sam curek. Veje pa so sestavljale kapljice, ki so periodično odletavale v vodoravni smeri, očitno na bolj ali manj istih mestih.

Stroboskopski efekt je lahko tudi nevaren. Nekateri običajni viri svetlobe, kot so fluorescenčna razsvetljava, LED sijalke (predvsem cenejše), **lahko** oddajajo svetlobo, ki bolj ali manj utripa s frekvenco 100 Hz. (Poudarek je na »lahko«; dobre fluorescenčne in LED svetilke so neproblematične in oddajajo praktično konstanten svetlobni tok.) Denimo, da s tako utripajočo svetlobo osvetljujemo naše vrteče se kolo in v času 10 ms od enega do drugega utripa prečka pride približno na mesto neke druge prečke. Če nismo pozorni, lahko dobimo vtis, da kolo stoji ali se giblje počasneje kot v resnici. Podobno se lahko zgodi s šivalnim strojem: videti je lahko, kot da igla stoji, čeprav se giblje s 100 (ali 200) vbodi na sekundo. To je dejansko lahko vzrok nesreč v delavnicah in tovarnah.

O vzrokih takega, v običajnih razmerah praktično nevidnega utripanja sijalk smo več povedali v člankih *LED sijalke* in *Žarnice in sijalke* v četrti in peti letošnji številki Preseka.

Če bi na hitro radi preverili utripanje svetlobe, vzemite svinčnik. Hitro mahajte z njim sem ter tja blizu svetila. Če svetloba resno utripa, boste videli zaporedje zamaknjenih slik svinčnika. Fotografija 6 gibajočega se svinčnika je bila posneta pod ceneno, majhno in lahko LED sijalko (z močjo 4 W). Čas osvetlitve je znašal 1/25 sekunde. Vidimo, da je svinčnik v tem času doživel štiri svetlobne »sunke«. Med njimi pa je bilo za kratek čas svetlobe zelo malo. V 1/25 sekunde je sijalka utripnila štirikrat, v eni sekundi utripne torej okrog $4 \times 25 = 100$ krat. Primerjajmo s sliko 5, pa vidimo, da ta sijalka deluje kot slab stroboskop z eno samo frekvenco. Kot smo videli v prej omenjenih člankih, je frekvenca utripanja dvakratnik frekvence omrežne napetosti, torej natančno 100 Hz. Stroboskopski efekt moti, če imamo hitro gibajoče se objekte ali pa če hitro premikamo pogled. Zato utripajoča svetloba ni dobra za branje.



**SLIKA 6.**
Svinčnik v gibanju, osvetljen 1/25 sekunde s poceni LED sijalko.

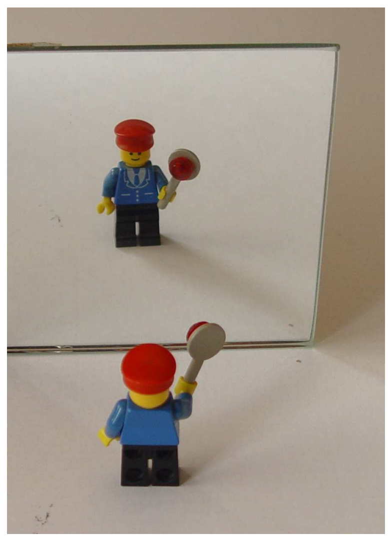
# Ne le levo, desno, tudi gor, dol

Nada Razpet

**Iz vsakdanjih izkušenj vemo, da sta na zrcalnih slikah leva in desna stran zamenjani. Kaj že to pomeni? Naredimo poskus.**

Pred navpično postavljeno ravno zrcalo postavimo prometnika, ki v desni roki drži lopar. Slika prometnika nastane za zrcalom, na enaki razdalji, kot je prometnik oddaljen od zrcala. Lopar, ki ga drži prometnik v svoji desni roki, ima na zrcalni sliki v levi roki. Zamenjani sta torej leva in desna stran. Ali lahko zamenjamo tudi gor in dol?

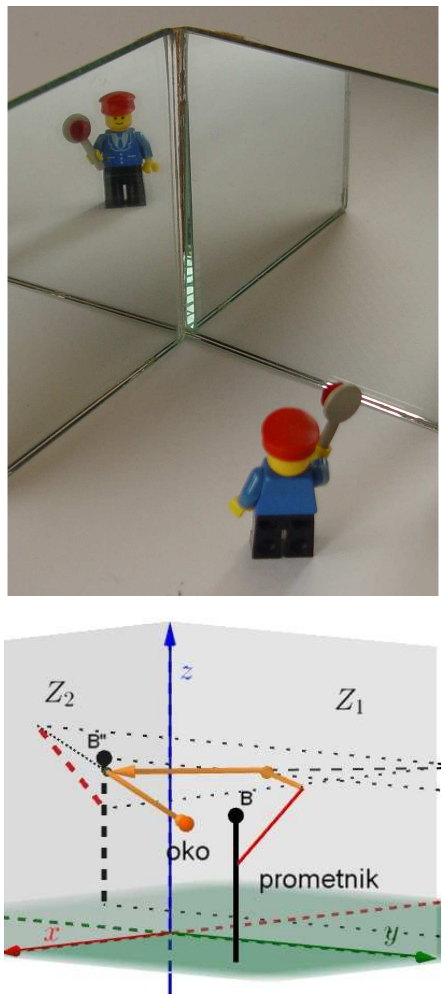
Da bomo lahko odgovorili na to vprašanje, naredimo prej še en poskus.



**SLIKA 1.**
Prometnik drži lopar v desni roki, na zrcalni sliki pa ima lopar v levi roki.

## Dve, med seboj pravokotni ravni zrcali

Zdaj prometnika postavimo pred dve, med seboj pravokotno postavljeni ravni zrcali. Kaj vidimo v zrcalu, je seveda odvisno od lege opazovalčevih oči. Pri dveh med seboj pravokotnih zrcalih lahko, če se prav postavimo, poleg prometnika samega vidimo še tri njegove slike. Fotografijo na sliki 2 smo obrezali tako, da je vidna le tista slika, ki nas trenutno zanima.

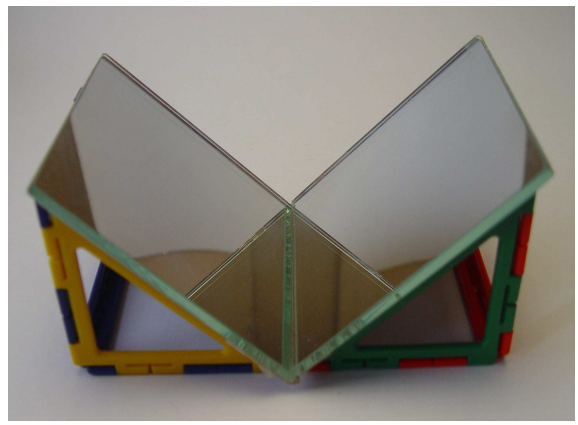



**SLIKA 2.**
Pred dve, med seboj pravokotni ravni zrcali postavimo prometnika. Tudi na sliki drži prometnik lopar v desni roki. Spodaj: Potek enega od žarkov po odboju od obeh zrcal. Leva in desna pri tej sliki nista zamenjani.

Kaj opazimo? Tudi na sliki ima prometnik lopar v desni roki. Slika prometnika je nastala po odboju žarkov od obeh zrcal (slika 2). Ta primer nam daje namig, kako bi tudi v ravnem zrcalu lahko videli sliko prometnika, postavljenega na glavo.

## Vrtimo zrcali

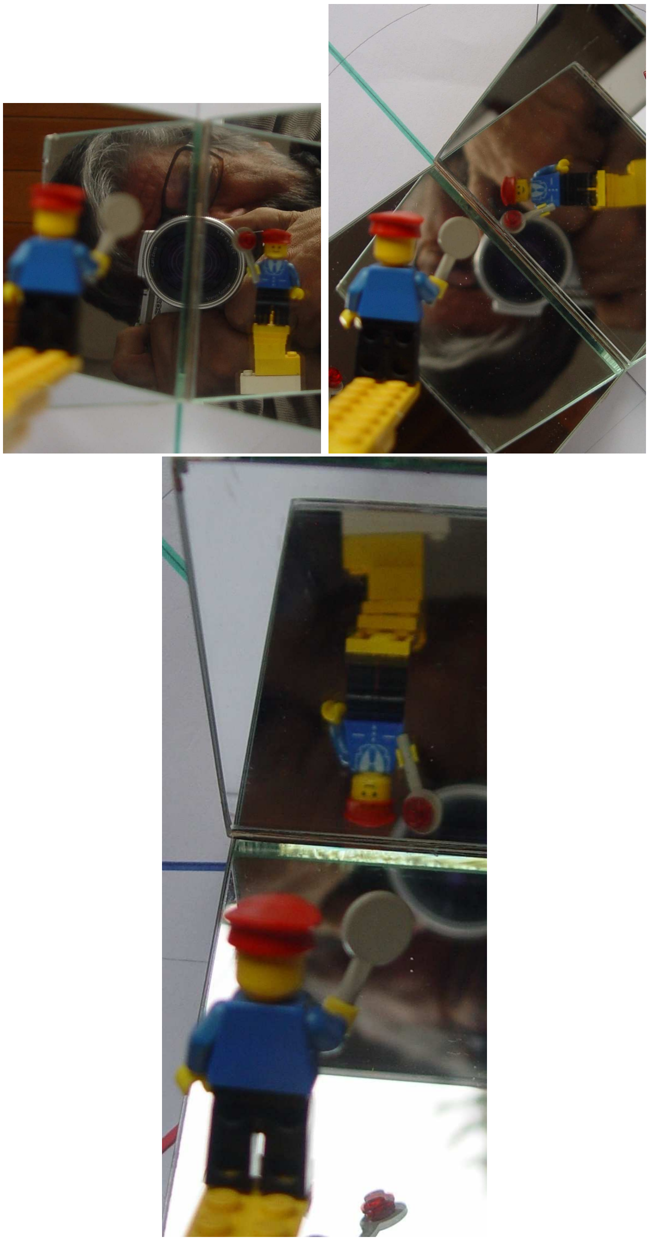
Dve ravni zrcali z lepilnim trakom zalepimo po enem od robov in ju pritrdimo na nosilec tako, da sta med seboj pravokotni, hkrati pa sta glede na vodoravno ravnino nagnjeni za $45^\circ$, kot kaže slika 3.



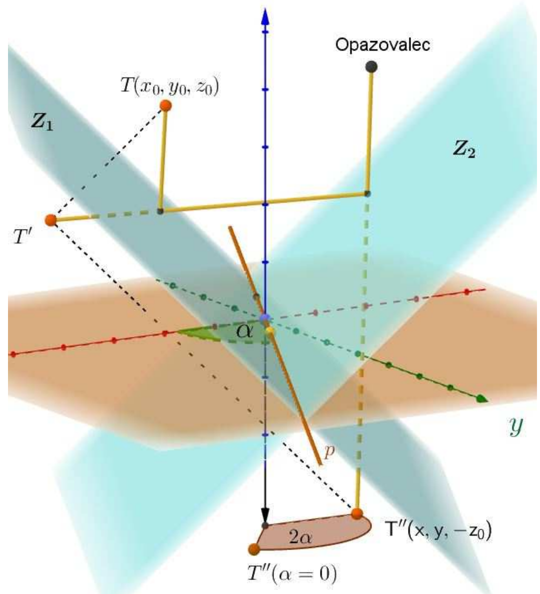
**SLIKA 3.**
Dve, med seboj pravokotni ravni zrcali postavimo na vrtljivi nosilec.

Na papir narišemo krog, označimo središče kroga in ga razdelimo najmanj na štiri enake dele, da bomo lažje spremljali povezavo med zasukom zrcal in sliko prometnika. Zrcali z nosilcem postavimo tako, da se stični rob zrcal ujemo z enim od premerov kroga, sredina stičnega roba pa je nad središčem kroga. Nad zrcali, vzporedno s podlago, pritrdimo prometnika. Nosilec z zrcaloma vrtimo v vodoravni ravnini $(x, y)$ okrog navpične osi $z$. Opazujemo z mesta, s katerega vidimo tisto sliko prometnika, ki nastane po odboju od obeh zrcal. Ko zrcali zavrtimo za kot $\alpha$, se slika predmeta zavrti za kot $2\alpha$, kot kažejo slike 4.

Narišimo še ustrezno skico (slika 5). Namesto celega predmeta bomo preslikali le eno točko in pogledali, kako se spreminja lega slike točke po odboju od obeh zrcal v odvisnosti od zasuka zrcal.



**SLIKA 4.**
Predmet je pritrjen nad zrcaloma in se med poskusom ne premika, slika v zrcalih se obrača. Ko se zrcali zasukata za $45^\circ$, se slika zavrti za $90^\circ$, ko pa ju zasukamo za $90^\circ$, se slika zasuka za $180^\circ$. Tudi slika fotografove glave se je zavrtela, čeprav fotografira vedno z istega mesta. Opazujemo le sliko, ki nastane po odboju od obeh zrcal.




**SLIKA 5.**
Zrcali zavrtimo za kot $\alpha$ okrog navpične osi (označena z modro barvo), slika točke se po odboju od obeh zrcal zavrti za kot $2\alpha$.

Slika točke $T$ po odboju od obeh zrcal je točka $T''(x_1, y_1, z_1)$. Pri zasuku zrcal riše točka $T''$ krožni lok s središčem na osi $z$. Lok leži v ravnini, ki je vzporedna z ravnino $(x, y)$, torej je koordinata $z_1 = -z_0$ te točke konstantna. Račun je nekoliko zahtevnejši, zanj je potrebno osnovno znanje o preslikavah z vektorji.

## Os vrtenja je os $x$

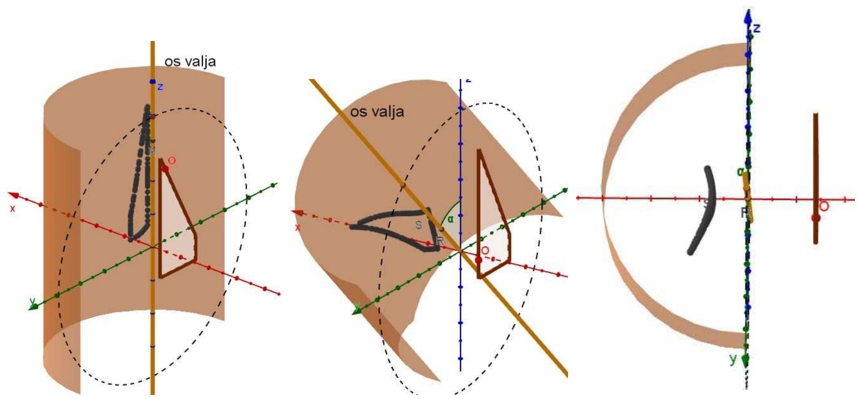
Dve pravokotni ravni zrcali zdaj postavimo tako, da sta nagnjeni za $45^\circ$ proti navpični ravnini (ravnini $y, z$), in ju vrtimo okrog osi $x$. Gledamo se v zrcali in ju hkrati vrtimo. Skupaj z zrcaloma se suka tudi naša glava.

Vemo, da s krogelnimi konkavnimi zrcali obrnemo sliko predmeta na glavo. Poskusimo to s konkavnim cilindričnim zrcalom, ki ga lahko izdelamo sami.

## Konkavno cilindrično zrcalo

Konkavno cilindrično zrcalo izdelamo iz pravokotnega kosa zrcalne folije, ki jo pritrdimo na okrogel

**SLIKA 6.**
Predmet je pred konkavnim cilindričnim zrcalom in se med poskusom ne premika. Ko obroč zavrtimo za kot $45^\circ$, se slika zavrti za kot $90^\circ$, ko pa ga zasukamo za kot $90^\circ$, se slika zasuka za $180^\circ$.




**SLIKA 7.**
Os valja zavrtimo za kot $45^\circ$ v ravnini $(y, z)$, slika štirikotnika (označeno s črno barvo) se zavrti za $90^\circ$. Stranice slike štirikotnika so zakrivljene in ne ležijo v isti ravnini (zadnja slika). Slika je realna.

obroč ali notranji obod valjastega lonca. Obroč vrtljivo pritrdimo na nosilec. Razdalja $d$ prometnika do zrcala naj bo $r < d < 2r$, pri čemer je $r$ polmer obroča, na katerem je pritrjena folija. Ravnino obroča zavrtimo najprej za približno $45^\circ$, nato pa za $90^\circ$ (slika 6). Slika prometnika se zavrti za $90^\circ$ oziroma $180^\circ$. Slika prometnika se pri zasukanem zrcalu ukrivi. Opazimo še, da leva in desna stran tudi tu nista zamenjani, slika prometnika *lebdi* v zraku in je realna.

Ponazorimo si to še s skicami (slika 7). Zrcalo je del plašča pokončnega valja. Narišemo še os valja. Zrcalo nagibamo tako, da spreminjamo naklon osi valja v ravnini $(z, y)$.

Zadnja skica na sliki 7 ja pogled v smeri osi $z$ na ravnino $(x, y)$. Opazimo, da je slika štirikotnika ukrivljena.

Še sami se poglejte v cilindrično zrcalo. Če bi imeli večja zrcala, bi lahko stali pred njim, naša slika pa bi *ležala* v zraku. Na podoben način v hišah eksperimentov navidezno *premagajo težnost* in ljudje *lebdijo* v zraku oziroma stojijo na glavah.

## Literatura


[1] S. Derman, *An optical puzzle that will make your head spin*, *Phys. Teach.* **19** (1981), 395,

[2] A. J. DeWeerd, S. E. Hill, *The Dizzying Depths of the Cylindrical Mirror*, *Phys. Teach.* **43** (2005), 90–92.


× × ×

# Nagradna križanka

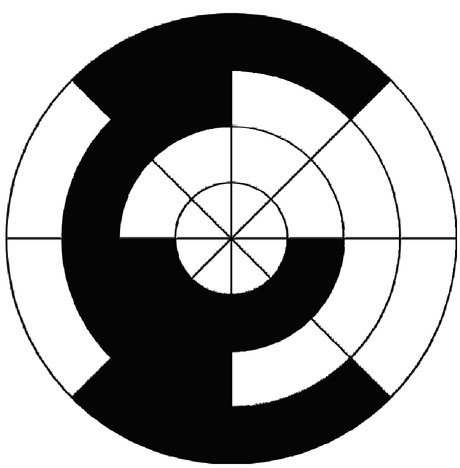
AVTOR MARKO BOKALIČ
OČE KLASIČNE GEOMETRIJE
PRIMORSKO RDEČE VINO
KOS BLAGA ZA POGRNITEV MIZE
ELFRIEDE JELINEK
KRAJ V TRŽAŠKEM PRIMORJU
ZDRAVLJENJE UŠESNIH BOLEZNI
VISOK PLEMIŠKI NASLOV
ENOTA ZA BORZNO TRGOVANJE
PISEC ESEJEV
SOSEDI ČRKE Š

STAROGRŠKI NARAVOSLOVEC IN POLITIK
STOPNJA ZANESLJIVOSTI, MOŽNOST DOGODKA
ŽIVAL, KI RIJE POD ZEMLJO
FRANCOSKI MATEMATIK (FRANCOIS)
GL. MESTO SENEGALA
ŽENSKA POTOMKA
ENAKI ČRKI
NEMŠKI LETAL. KONSTRUKTOR (CLAUDE)
AMERIŠKA IGRALKA (CAMERON)
GORIŠČE
JANEZ HOČEVAR
VSEVEDEN ČLOVEK
JUGOZAHODNI DEL LJUBLJANE
IMOBILIZACIJA UDA

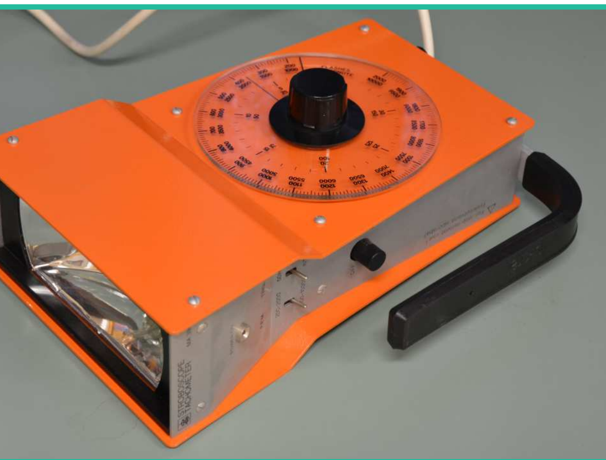
VELIKA KOVINSKA POSODA ZA DVIGANJE PREMOGA ALI RUDE PO JAŠKU
NEMŠKI TENORIST (RENE)
KNJIGA Z ZEMLJEVIDI
LUTECIJ
ODVOD VODE
ARGENTIN. PISATELJ (ROBERTO)
ITALIJAN. MOTORIST (VALENTINO)
POSPEŠEVAL. ELEKTRONOV
POLJŠČINA, KI IMA VELIK PODZEMELJSKI PLOD

KOLIČINA, PODANA LE S ŠTEVILOM IN ENOTO
ŠOLSKI PROSTOR Z ZBIRKAMI IN UČNIMI PRIPOMOČKI
KDOR NE ZMORE OPRAVITI, KAR JE POTREBNO
PRIKAZ GLOBINE NA PLOSKVI
GL. MESTO FINSKE
ANTIČNO IGRALSKO OBUVALO Z VISOKIM PODPLATOM
RUSKI BALETNIK (RUDOLF)
ČAS PRED NOČJO
ZRAČNO VOZILO
POT GIBAJOČEGA SE TELESA
REKA V STRASBOURGU, PRITOK RENA
UTRJENA RIMSKA MEJA
TANTAL
CVETICA ŽAMETNICA
REKA, KI TEČE SKOZI ASTANO
AMERIŠKA TEMNOPOLTA VOKALNA SKUPINA
IGOR AKRAPOVIČ
UBRANOST V NARAVI
ITALIJAN. TISKOVNA AGENCIJA

ZVRST ZABAVNE GLASBE
POVELJSTVO
ANG. KEMIK IN IZUMIT. (JOHN F.)
ROMAN SAVNIK
PREMER STRELNE CEVI
REČNA OBALA
NEPRIJETNOST, NEVŠEČNOST
IGRALKA MIRANDA
POMOŽNI DOKAZNI IZREK



PREGIBNA BESEDNA VRSTA
JAZ, TI, ?
NABITOST
PISNA ZNAMENJA ZA GLASOVE
PALICA Z JERMENOM ZA UDARJANJE
MESTO OB ISTOIMEN. NAJVEČJEM JEZERU V TURČIJI
RIMSKI GRIČ
VELETOK NA INDIJSKI PODCELINI
ITALIJAN. GRADITELJ VELIKIH OBJEKTOV (PIER LUIGI)
BARIJ
JANEZ ERŽEN
NIKARAGOV. DRŽAVNIK (DANIEL)
OBMOČNA ENOTA
IZGOVARJANJE GLASU L PRI OPISNIH DELEŽNIKIH
POTENCIRANO ŠTEVILO
NAŠ BIOLOG, ŽIVILSKI TEHNOLOG (BOŽIDAR)
ALDEHID OCETNE KISLINE



DUŠEVNO STANJE NEUGODJA ZARADI NEZADOVOLJITVE ŽELJA
VELIK HOTELSKI KOMPLEKS V TURIST. KRAJU
EMIL ZATOPEK
ORIEN-TALSKA MESNA JED
ROJSTNA VAS SIMONA GREGOR-ČIČA
ELDA VILER
ORGAN SREDI OBRAZA
SLOVITI MEHIŠKI ROKOVSKI KITARIST IN PEVEC
OBSEŽNO OTOČJE Z VMESNIM MORJEM

ŠTEVILO NIHAJEV V ČASOVNI ENOTI

ZBIRALNIK ALI HRA-NILNIK ZA TEKOČINE

UNITED STATES
BERT SOTLAR
SUROVA BOMBAŽNA TKANINA
NEPRI-JETEN OBČUTEK STRAHU NA KOŽI

ŽIVČNI BOJNI STRUP
SKUPINA CELIC
NAŠA ALPSKA REKA
51 Z RIM-SKIMI ŠTE-VILKAMI
KOREJSKI AVTO

EMANUEL LASKER
PESNIKUN
VRSTA TEKMO-VALNIH SANI
PRIPO-MOČEK
GORATA POKRAJINA V ZAHODNI GRČIJI
KILOTONA
OBRATO-VANJE MOTORJA
NEKDANJA NEMŠKA SMUČARKA (MARTINA)
PERZIJEC
VELETOK, KI IZVIRA V BURUN-DIJU
DRUGI NAJVEČJI PRITOK SENE V FRANCIJI
6

VEZNIK
PREBIVALCI OBČINE JUŽNO OD LJUBLJANE
NAŠ RADI-JEC (RADO)
PODOLGOV. VDOLBINA V TLEH

OKRASNA ROŽA
GORSKA TOVORNA POT
5
ENAKA SAMO-GLASNIKA
NEČEDNA ZADEVA

KOŠAR-KARSKI TRENER BEČIROVIĆ
4
KRATEK OPRIJET MOŠKI SUKNJIČ
60 SEKUND
TAJVANSKI REŽISER LEE
MUSLIMAN-SKI BOG

ZVOČNI ZNAK ZA NEVARNOST
OBRAT ZA BAKRENJE
POTREBA, SILA
PRESTOL-NICA OB TIBERI
ZNANILEC OGNJA
VELIK GUMIJAST ČOLN ZA SPUSTE PO BRZICAH
NIZ ZNAKOV ZA OZNAKO SPLETNIH VSEBIN

ANGLEŠKA IGRALKA (JILL)
GRM, KI RO-DI LEŠNIKE
PRIPADNIK ANTIČNE FILOZOF-SKE ŠOLE
NOBELIJ

VODA POD POVRŠJEM ZEMLJE
KEMIČNA TOVARNA V CELJU
OSTANEK IZ DAVNINE

KONCENTR. ŽVEPLOVA KISLINA
GLASBENIK JOHN
10
STENSKO OGLEDALO MED OKNOMA
OTIŠČANEC
NIZ. MESTO S SEDEŽEM VLADE IN PARLA-MENTA

PRED. DROG PRI VOZU
NAŠ FILM. REŽISER (FRANCI)
ŠVEDSKI POHIŠ-TVENI GIGANT
POKOJNI IGRALEC GRANT

PRVA ŽENSKA NA SVETU
NAŠ ROKOM. VRATAR (URH)
GLASBENIK GJURIN

LITERARNA ZVRST, KI IZRAŽA ČUSTVA
MAX ERNST

POKOL

POKOJNI SOVJETSKI FILMSKI REŽISER (NIKOLAJ)
NAJDALJŠA REKA NA ŠKOTSKEM
11

## NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

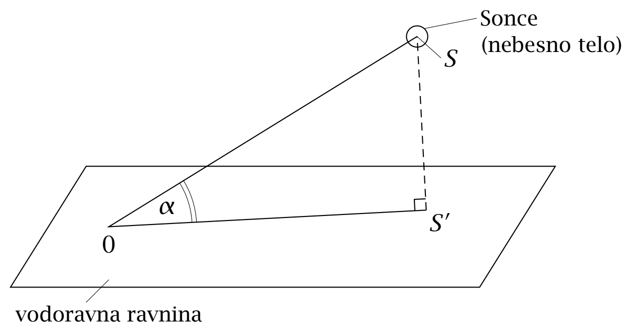
www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. avgusta 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

# Višinski kot nebesnih teles

Marijan Prosen

**Višinski kot nebesnih teles je temeljni pojem iz astronomske geometrije, ki ga je treba obvladati, dobro poznati in razumeti. Napisano je elementarno. Razumeti ga morejo že učenci sedmega razreda naše osnovne šole. V članku si bomo natančneje ogledali višinski kot Sonca in zvezd, omenili pa bomo tudi višinski kot Lune in planetov.**




**SLIKA 1.**
$\alpha$ – (trenutni) višinski kot Sonca, to je kot med smerema $OS$ in $OS'$, $O$ – opazovališče (naše oči); namesto Sonca si lahko predstavljamo Luno, planet, zvezdo ali kako drugo vesoljsko telo.

## Višinski kot Sonca

*Višinski kot Sonca* (ne višina Sonca) je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti Soncu, natančnejše proti središču $S$ Sonca. Ta kot lahko pokažemo z rokama. Iztegnjeno levo roko usmerimo proti Soncu, a vanj ne gledamo, z iztegnjeno desno roko pa z vodoravnim gibanjem roke nakažemo vodoravno ravnino. Kot med levo roko in v mislih nakazano ravnino je višinski kot Sonca.

Sonce se vsak dan giblje na nebu od vzhoda do zahoda. To je njegovo navidezno dnevno gibanje. Vsak trenutek je Sonce drugje na nebu. Zato v bistvu govorimo o trenutnem višinskem kotu Sonca, saj se s časom spreminja. Pozneje bomo besedo *trenutni* izpuščali.

Sonce vsak dan vzide in zaide. Vsak dan pride tudi v najvišjo lego na nebu ali najvišjo lego nad obzorjem. Ob vzidu je višinski kot Sonca nič (0°), dopoldne se kot veča, ker se Sonce dviga, opoldne je Sonce najvišje in zato je njegov višinski kot opoldne največji. Popoldne se Sonce spušča in njegov višinski kot se manjša, ob zaidu pa je spet nič.

Opoldne je Sonce najvišje na nebu v južni smeri. To je najveličastnejši dogodek dneva, saj Sonce ob jasnem dnevu v tej legi najmočneje greje, se najmogočneje razdaja. Je pa ta lega Sonca tudi pomembna za orientacijo. Če smo s trebuhom obrnjeni proti Soncu, je za nami sever (kamor kaže naša senca), levo je vzhod, desno pa zahod.

Opoldne govorimo o opoldanskem višinskem kotu Sonca ali višinskem kotu Sonca opoldne ali tudi o višinskem kotu opoldanskega Sonca. V tem primeru ležita naše opazovališče $O$ in Sonce v navpični poldnevniški ali meridijanski ravnini, ki gre skozi poldnevnico, to je premico sever-jug. Poleti je Sonce opoldne višje na nebu kot pozimi, zato je opoldanski višinski kot Sonca poleti večji kot pozimi.

Opoldanski višinski kot Sonca v kakem kraju je odvisen od lege kraja na Zemlji oziroma od zemljepisne širine tega kraja $\varphi$ in lege Sonca glede na zvezde oziroma od njegove deklinacije $\delta$, ki se med letom spreminja v mejah od $-23{,}5°$ (zimski solsticij) do $+23{,}5°$ (poletni solsticij). Opoldanski višinski kot $\alpha$ Sonca določenega dne (datuma) v letu, ko je $\delta$ deklinacija Sonca, je v kraju severne Zemljine polute z določeno ali znano zemljepisno širino $\varphi$ enak

- $\alpha = 90° - \varphi + \delta.$

V naših krajih opoldanski višinski kot Sonca nikoli ne doseže 90°. To pomeni, da Sonce nikoli med letom ne pride v nadglavišče (zenit), natančno navpično na nebo nad nami. V nekaterih krajih pa pride. Poglejmo, v katerih.

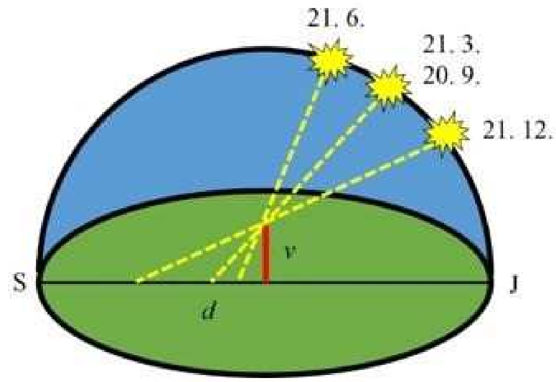
Enačbo za opoldanski višinski kot Sonca določenega dne v letu zapišimo nekoliko drugače, takole: $\alpha = 90° - (\varphi - \delta)$. Da je $\alpha = 90°$, mora biti $(\varphi - \delta) = 0$ oziroma $\varphi = \delta$, ko je zemljepisna širina kraja enaka deklinaciji Sonca. To je v tistih krajih, ki ležijo med južnim in severnim Zemljinim povratnikom z zemljepisnima širinama $-23{,}5°$ in $+23{,}5°$, torej še v krajih na obeh povratnikih in seveda na Zemljinem ekvatorju. Matematično to zapišemo: $-23{,}5° \leq \varphi \leq +23{,}5°$ in preberemo, da $\varphi$ leži med vrednostma $-23{,}5°$ in $+23{,}5°$ in jima je tudi enak.

### Zgleda

- Kolikšen je opoldanski višinski kot Sonca v Kranju s $\varphi = 46°$ ob poletnem Sončevem obratu (21. 6.), ko je $\delta = 23{,}5°$?
  Opoldanski višinski kot Sonca v Kranju tega dne je $\alpha = 90° - \varphi + \delta = 90° - 46° + 23{,}5° = 67{,}5°$.
- V nekem kraju na severni Zemljini poluti je sredi aprila, ko je $\delta = 10°$, opoldanski višinski kot Sonca enak $\alpha = 25°$. Kolikšna je zemljepisna širina $\varphi$ tega kraja?
  Iz enačbe za opoldanski višinski kot Sonca sledi $\varphi = 90° - \alpha + \delta = 90° - 25° + 10° = 75°$.

### Naloge

- Koliko meri opoldanski višinski kot Sonca v Kranju s $\varphi = 46°$ ob zimskem Sončevem obratu (21. 12.), ko je $\delta = -23{,}5°$? [20,5°]
- Slika 2 velja za naše kraje. Opišite, kaj prikazuje; posebej $v$ – višina navpične palice, $d$ – opoldanska dolžina sence palice. Kaj se dogaja z opoldansko dolžino sence palice v navedenih datumih med letom?
- Iz Slovenije, kjer za kraje lahko približno vzamemo kar $\varphi = 45°$, nekega dne opazujemo Sonce in izmerimo opoldanski višinski kot Sonca 30°. V katerem letnem času ga opazujemo, spomladi, poleti, jeseni ali pozimi? [$\delta = -15°$; to je jeseni, okoli 1. novembra; uporabimo Astronomske efemeride.]
- Katerega dne pride v krajih na Zemljinem ekvatorju Sonce opoldne v zenit? [Ob enakonočju.] Opomba. Postavite to vprašanje še drugače (z opoldanskim višinskim kotom Sonca, ki je 90°).




**SLIKA 2.**

- V Ljubljani s $\varphi = 46°3'$ smo pozimi izmerili opoldanski višinski kot Sonca enak 20°. Ali je to mogoče?

## Višinski kot zvezde

*Višinski kot zvezde* (ne višina zvezde) je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti zvezdi. Tudi ta kot lahko pokažemo z rokama. Iztegnjeno levo roko usmerimo proti zvezdi, z iztegnjeno desno roko pa z vodoravnim gibanjem roke nakažemo vodoravno ravnino. Kot med iztegnjeno levo roko in v mislih nakazano ravnino je višinski kot zvezde.

Ko je zvezda na obzorju, v vodoravni ravnini, je njen višinski kot 0 (0°), ko pa je navpično nad nami, v nadglavišču, je njen višinski kot 90°.

Zvezde se gibljejo na nebu. To je njihovo navidezno gibanje (kroženje), do katerega pride zaradi vrtenja Zemlje. Glede na to, kje na nebu se gibljejo, razlikujemo zvezde nadobzornice, vzhajalke in podobzornice. Iz določenega kraja lahko opazujemo le nadobzornice, saj so stalno na nebu, in vzhajalke, ki vzhajajo in zahajajo in so ene več, druge manj časa nad obzorjem. Podobzornic pa iz tega kraja ne moremo opazovati, ker nikoli ne pridejo nad obzorje in jih sploh ne moremo videti.

Zvezde spreminjajo svojo lego glede na predmete na obzorju opazovališča. Zato se spreminjajo tudi njihovi višinski koti. Govorimo spet o (trenutnem) višinskem kotu opazovanih zvezd, saj se s časom spreminja. Zaznavamo le višinski kot vzhajalk in nadobzornic.

Obravnavali pa bomo le višinski kot vzhajalke za kraje na severni Zemljini poluti. Sonce je vzhajalka. Kakor Sonce tudi zvezda vzhajalka vzide in zaide. V času enega dne, v 24-ih urah, pride vsaka vzhajalka enkrat tudi v najvišjo lego na nebu ali v najvišjo lego nad obzorjem kakega kraja. Vsaka vzhajalka ob svojem času. Ob vzidu zvezde je njen višinski kot nič ($0^\circ$). Ko se zvezda dviga, se kot veča, ko pride najvišje, je višinski kot zvezde največji. Potem se zvezda spušča in njen višinski kot se manjša, ob zaidu zvezde pa je spet nič.

Zvezde vzhajalke pridejo v najvišjo lego na nebu vedno v južni smeri, na južni strani neba, in sicer vsaka zase, kot že rečeno, v različnem času. Takrat dosežejo največji višinski kot in naše opazovališče $O$ ter zvezda ležita v poldnevniški ravnini. Zvezda, ki se giblje dalj časa nad obzorjem oziroma ima daljši lok gibanja nad obzorjem, prečka to ravnino višje in ima zato večji največji višinski kot kakor zvezda, ki se giblje manj časa nad obzorjem.

Največji višinski kot zvezde v poldnevniški ravnini je za kako opazovališče odvisen od njegove lege na Zemlji oziroma od zemljepisne širine $\varphi$ opazovališča in lege zvezde na nebu oziroma od njene deklinacije $\delta$, ki pa se med letom *ne spreminja*. Največji višinski kot $\alpha$ zvezde z deklinacijo $\delta$ ob njenem prehodu čez poldnevniško ravnino za kraje z znano zemljepisno širino $\varphi$ na severni Zemljini poluti je tako za vse dni v letu enak in je

- $\alpha = 90^\circ - \varphi + \delta.$

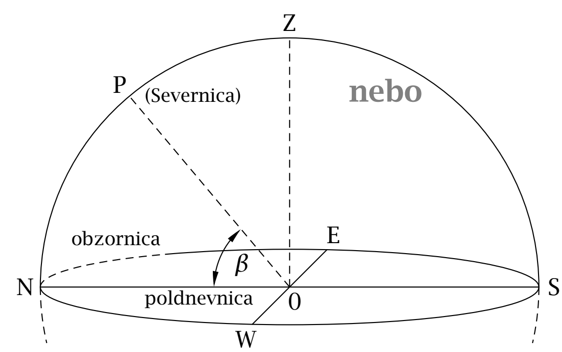
Zanimive so predvsem zvezde, ki pri svojem navideznem gibanju pridejo na nebu natančno nad našo glavo, v nadglavišče. V nadglavišče seveda pridejo le določene, izbrane vzhajalke (in tudi nadobzornice).

Poglejmo, katere vzhajalke s pozitivno deklinacijo ($\delta > 0$) lahko v krajih s pozitivno zemljepisno širino ($\varphi > 0$; to je na severni Zemljini poluti) pridejo v nadglavišče, da gredo čez krajevni nebesni poldnevnik natančno nad glavo, ko je njihov višinski kot natanko $90^\circ$.

To ugotovimo iz enačbe za največji višinski kot zvezde, ki jo spet zapišemo takole: $\alpha = 90^\circ - (\varphi - \delta)$. Da je višinski kot $\alpha = 90^\circ$, mora biti $(\varphi - \delta) = 0$ oziroma $\varphi = \delta$. Povedano z besedami: zemljepisna širina kraja mora biti enaka deklinaciji zvezde. V krajih, ki imajo takšno zemljepisno širino, kot je deklinacija zvezde, taka zvezda pride v nadglavišče.

Ena taka, celo idealna zvezda za naše kraje, je svetla zvezda Kapela ali Koza z $\delta = 46^\circ$, ki leži v ozvezdju Voznik. Sredi zime je ponoči natanko nad našo glavo. Druga (ne ravno idealna) zvezda pa je prav tako svetla zvezda Vega z $\delta = 39^\circ$ v ozvezdju Lira, ki je poleti ponoči blizu nadglavišča. O tem se lahko prepričamo z računom in/ali z opazovanjem zvezd. Za druge kraje pridejo v poštev druge zvezde, da pridejo v nadglavišče.

Na nebu pa je še ena posebno zanimiva zvezda. Višinski kot se ji skoraj ne spreminja. Leži zelo blizu severnega nebesnega pola, komaj $0{,}7^\circ$ oddaljena od njega. Tej nadobzornici je ime Severnica (Polarnica). Navidezno se giblje tik okrog severnega nebesnega pola (kroži po skrajno majčkeni krožnici) in se ji zato višinski kot skrajno malo spreminja.



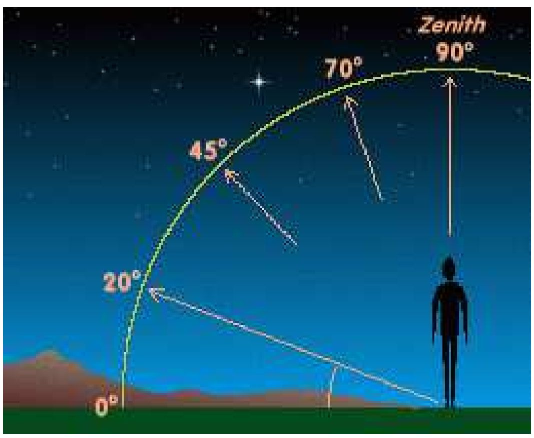

**SLIKA 3.**
Lega Severnice na nebu v neposredni bližini severnega nebesnega pola za naše kraje – podnevi in ponoči praktično leži v isti točki neba, kar uporabimo za nočno orientacijo. Če smo obrnjeni proti Severnici, je pred nami sever N, za nami jug S, desno vzhod E, levo zahod W; $O$ – opazovališče, $P$ – severni nebesni pol, kjer v neposredni bližini leži Severnica, $\beta$ – višinski kot severnega nebesnega pola (približno višinski kot Severnice), to je kot med vodoravno ravnino (obzorjem) in smerjo proti severnemu nebesnemu polu. Dokazati je mogoče, da je višinski kot severnega nebesnega pola enak zemljepisni širini kraja na severni Zemljini polkrogli. To je preprost način določanja zemljepisne širine kraja. Če izmerimo višinski kot Severnice, približno določimo oziroma ocenimo zemljepisno širino kraja. **Opomba.** Pri razlagi tega pojma na osnovni stopnji lahko vzamemo, da Severnica leži kar v $P$, saj je razlika med legama severnega pola in Severnice manjša od $1^\circ$.

Zgleda

- Kolikšen je največji višinski kot svetle zvezde Vege v Kranju s $\varphi = 46°$, če ima deklinacijo $\delta = 39°$? Največji višinski kot Vege je $\alpha = 90° - \varphi + \delta = 90° - 46° + 39° = 83°$.
- V nekem kraju na severni Zemljini poluti opazujemo zvezdo z $\delta = 25°$ v poldnevniški ravnini in izmerimo njen največji višinski kot $\alpha = 60°$. Kolikšna je zemljepisna širina $\varphi$ tega kraja? Iz enačbe za višinski kot zvezde sledi $\varphi = 90° - \alpha + \delta = 90° - 60° + 25° = 55°$.

Naloge

- Koliko meri največji višinski kot svetle zvezde Arktur v Ljubljani s $\varphi = 46°$, če je njena deklinacija $\delta = 19°$? [63°]
- Iz Slovenije, kjer za zemljepisno širino krajev lahko približno vzamemo kar $\varphi = 45°$, opazujemo zvezdo in izmerimo njen največji višinski kot 77°. Kolikšna je deklinacija te zvezde? [$\delta = 32°$]
- Kaj prikazuje slika 4?




SLIKA 4.

- Z iztegnjeno roko in prsti poskusite ugotoviti višinski kot Severnice in s tem oceniti zemljepisno širino vašega kraja.
- Kako se najbolj preprosto prepričate, da se višinski kot Severnice skoraj ne spreminja? Pomislite na nekaj nočnih opazovanj Severnice iz vedno istega opazovališča.
- Katera zvezda pride v nadglavišče v kraju s $\varphi = 32°$? [Zvezda z $\delta = 32°$.]
- Koliko meri zemljepisna širina opazovališča, v katerem opazujemo zvezdo z deklinacijo 65°35′ v zenitu? [$\varphi = 65°35'$]
- Katere zvezde vidimo v krajih na Zemljinem ekvatorju natančno nad glavo? [Zvezde z $\delta = 0°$.]
- Katere zvezde vidimo na severnem Zemljinem polu natanko v nadglavišču? [Nobene, saj tam vendar leži severni nebesni pol, šele zelo blizu pola, manj kot 1°, pa leži Severnica.]

## Višinski kot Lune in planetov

Luna in planeti se navidezno gibljejo v zodiaku, to je pasu na nebu ±8° ob ekliptiki, letni poti Sonca na nebu. Zato v naših krajih ne morejo priti v nadglavišče. Kar velja za višinski kot Sonca in zvezd, velja tudi za višinski kot Lune in planetov (razen to, da je deklinacija konstantna).

Zgled

Recimo, da je Jupiter viden v ozvezdju Dvojčka in ima deklinacijo okoli 31°. Koliki je približno njegov največji višinski kot za kraje v Sloveniji?

Ta je $\alpha = 90° - \varphi + \delta = 90° - 45° + 31° = 76°$. Pa smo vzeli zelo veliko deklinacijo planeta. Kot 76° je še daleč od pravega kota, da bi bil Jupiter v zenitu.

Nebesna telesa, ki se na nebu gibljejo v zodiaku, v naših krajih nikoli ne pridejo v nadglavišče. Tudi Luna ne. Kar opazujte jo.

## Literatura

[1] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2006.

[2] M. Prosen, *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica **3**, DMFA – založništvo, Ljubljana 1978, 252.

[3] B. Dintinjana, H. Mikuž in T. Zwitter, *Naše nebo*, Astronomske efemeride, tekoči letniki.

× × ×

# Naloge 11. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike 2017

Andrej Guštin

**Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike (MOAA) je mednarodno tekmovanje iz znanja, na katerem sodelujejo dijaki in dijakinje iz 45-ih držav. Delež držav, ki se udeležujejo MOAA, predstavlja več kot 90 odstotkov svetovne populacije. Namen tekmovanja je popularizacija astronomije in astrofizike med mladimi in je najpomembnejše tovrstno tekmovanje na svetu. Slovenija je leta 2017 na MOAA sodelovala petič. Na MOAA je število zlatih medalj manjše od 5 % števila vseh udeležencev, zato je prejem takega priznanja še toliko večji uspeh.**

11. MOAA je potekala med 12. in 20. novembrom 2017 na otoku Phuket na Tajskem. Vseh tekmovalcev je bilo skupno 214. V slovenski ekipi, ki sta jo na olimpijadi spremljala Andrej Guštin in Krištof Skok, so bili dijaki Luka Govedič, Rok Kovač, Aleksej Jurca, Urban Ogrinec, Marko Čmrlec. Aleksej Jurca je na olimpijadi zasedel prvo mesto in postal absolutni zmagovalec. Ta neverjetni in težko ponovljivi uspeh sta dopolnila Marko Čmrlec in Luka Govedič, ki sta prejela pohvali.

Tokrat prinašamo nekaj nalog 11. MOAA, rešitve pa bomo objavili v prihodnji številki Preseka; nečakani jih lahko najdejo na tem spletnem naslovu: `ioaa2017.posn.or.th/question.php`


**SLIKA 1.**
Aleksej Jurca, najboljši mladi astronom na svetu (Foto: Andrej Guštin).

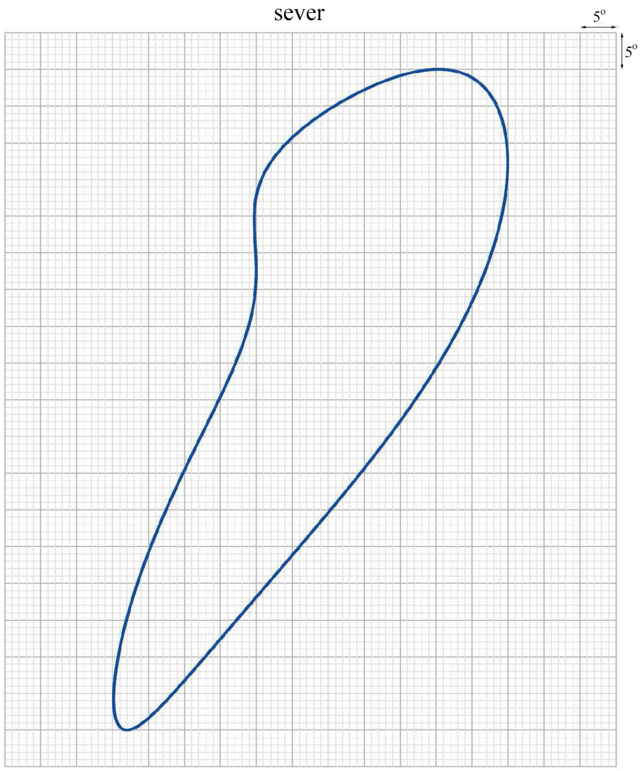
## Analema na drugem planetu

Navodilo. Na podlagi slike 2 določi nagib vrtilne osi namišljenega planeta na njegovo ravnino kroženja okoli neke zvezde.

## Veliki Magellanov oblak nad Phuketom

Nebesne ekvatorialne koordinate Velikega Magellanovega oblaka (LMC) so: rektascenzija = 5 h 24 min; deklinacija $= -70°00'$.

Geografske koordinate Phuketa so: zemljepisna širina $= 7°53'$; zemljepisna dolžina $= 98°24'$ vzhodno.




**SLIKA 2.**
Analema na površju planeta

Izračunaj datum, ko LMC v Phuketu kulminira ob 21.00 uri po lokalnem času. Leta 2017 je zvezdni čas (GST) na Greenwichu 1. januarja ob 00h UT 6 h 43 min, Phuket pa je v časovnem pasu UT + 7 ur.

## Sinhroni satelit

Sinhroni satelit je satelit, ki okoli Zemlje kroži z obhodnim časom, ki je natančno enak vrtilni dobi Zemlje. Višina takega satelita nad površjem Zemlje je 35 786 km. Satelit pošljejo v sinhrono orbito, pri čemer je ravnina njegove orbite nagnjena za $\Theta = 6{,}69°$ glede na ekvatorialno ravnino. Natančno izračunaj največjo možno višino satelita nad obzorjem za opazovalca na zemljepisni širini $\phi = 51{,}49°$. Loma svetlobe v ozračju ne upoštevaj.

## Betlehemska zvezda

Velika konjunkcija je za opazovalca na Zemlji konjunkcija Jupitra in Saturna. Predpostavi, da imata Jupiter in Saturn krožne orbite v ravnini ekliptike.

Čas med dvema zaporednima konjunkcijama lahko ob opazovanju z Zemlje malo niha, vendar je povprečen čas enak za opazovalca iz središča Osončja.

- Določi povprečno periodo velike konjunkcije (v letih) in povprečen heliocentrični kot med dvema zaporednima velikima konjunkcijama (v stopinjah).
- Naslednja velika konjunkcija bo 21. 12. 2020 z elongacijo 30,3° vzhodno od Sonca. Oceni, v katerem ozvezdju se bo to zgodilo. (Podaj IAU latinsko ime ali IAU kratico za ozvezdje, npr. Ursa Major ali UMa.)
  Leta 1606 je Johannes Kepler pokazal, da lahko v določenih letih pride do treh konjunkcij na leto zaradi retrogradnega gibanja planetov. Pokazal je tudi, da je do takšnega dogodka prišlo leta 7 pr. n. št., ki bi lahko bil kandidat za t. i. Betlehemsko zvezdo. Za nadaljnje izračune lahko zanemariš precesijo Zemljine vrtilne osi.
- Oceni, v katerem ozvezdju se je zgodila velika konjunkcija leta 7 pr. n. št. (Podaj IAU latinsko ime ali IAU kratico za ozvezdje, npr. Ursa Major ali UMa.)

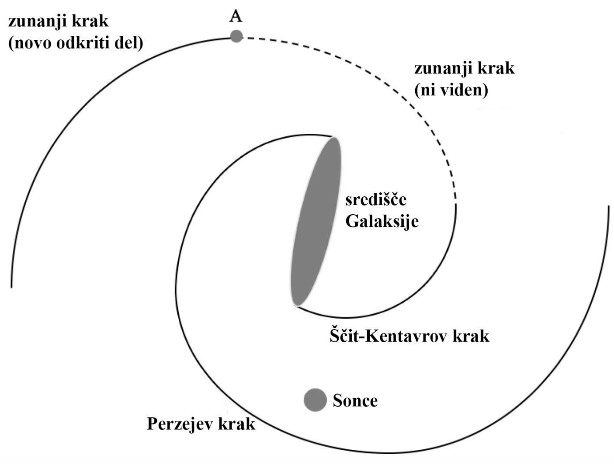
Za opazovalca na Zemlji oceni, v katerem ozvezdju je bilo Sonce ob drugi konjunkciji serije v letu 7 pr. n. št. (Podaj IAU latinsko ime ali IAU kratico za ozvezdje, npr. Ursa Major ali UMa.)

## Novo odkriti spiralni krak naše Galaksije

Leta 2011 sta raziskovalca Dame in Thaddeus našla še neznani del zunanjega kraka naše Galaksije tako, da sta z 1,2-metrskim teleskopom CfA spektroskopsko preučevala porazdelitev oblakov CO. Ugotovila sta, da se oblaki CO začnejo pri galaktični dolžini $l = 13{,}25°$ (na sliki 3 označeno z $A$) in se gibljejo proti Soncu s hitrostjo 20,9 km/s. Predpostavi, da je rotacijska krivulja Galaksije ravna od oddaljenosti 5 kpc od središča Galaksije. Oddaljenost Sonca od središča Galaksije je 8,5 kpc. Hitrost, s katero se Sonce giblje okoli središča Galaksije, je 220 km/s.

→

- Izračunaj razdaljo med začetkom kraka (točka $A$) in središčem Galaksije.
- Izračunaj razdaljo med začetkom kraka (točka $A$) in Soncem.



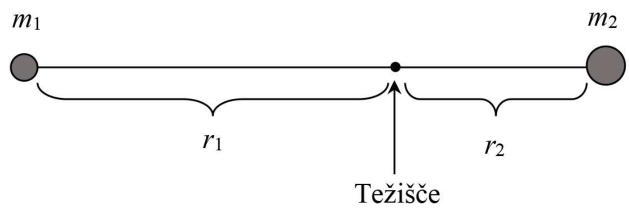

**SLIKA 3.**
Slika ni v merilu.

## Masa Lokalne jate

Z dinamiko M31 (Andromedina galaksija) in naše Galaksije lahko ocenimo skupno maso Lokalne jate. Izhodišče je, da sta danes galaksiji v dvojnem sistemu, takoj po velikem poku pa sta bili skoraj v isti točki. Poleg tega vemo, da večino mase Lokalne jate predstavlja masa Rimske ceste in Andromede. Z Dopplerjevim premikom so astronomi ugotovili, da se M31 giblje proti nam s hitrostjo 118 km/s. To je malo presenetljivo glede na to, da se večina galaksij oddaljuje od nas zaradi širjenja vesolja, a ne gre pozabiti, da so jate galaksij gravitacijsko vezane. Tak par galaksij lahko dobro opišemo kot izolirani točkasti telesi in nato lahko določimo njuno skupno maso iz meritev medsebojne oddaljenosti, relativne hitrosti in s časom od začetka vesolja. Astronoma Kahn in Woltjer (1959) sta uporabila te argumente, da sta ocenila maso Lokalne jate.

V tej nalogi bomo privzeli gornje predpostavke in šli po poti omenjenih astronomov.

- Obravnavaj izoliran sistem z zanemarljivo vrtilno količino z dvema točkastima telesoma z masama $m_1$ in $m_2$, ki se gravitacijsko privlačita (kot to vidi mirujoč opazovalec v težišču sistema) (slika 4). Zapiši izraz za skupno energijo $E$ sistema v matematični obliki, ki povezuje $m_1$, $m_2$, $r_1$, $r_2$, $v_1$, $v_2$, in gravitacijsko konstanto $G$, kjer sta $v_1$ in $v_2$ radialni hitrosti teles $m_1$ in $m_2$.




**SLIKA 4.**

- Predelaj enačbo, ki si jo dobil v zgornji točki z $r$, $v$, $\mu$, $M$, in $G$, kjer so $r \equiv r_1 + r_2$ medsebojna razdalja med $m_1$ in $m_2$, $v$ je hitrost, s katero se spreminja njuna medsebojna razdalja, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ reducirana masa sistema in $M \equiv m_1 + m_2$ skupna masa sistema.
- Pokaži, da enačba iz zgornje točke da
  - $$v^2 = (2GM)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

  kjer je $r_0$ nova konstanta.
  Izrazi $r_0$ z $\mu$, $M$, $G$ in $E$.
  Rešitev enačbe iz druge točke je spodaj podana v parametrični obliki z začetnimi pogoji $r = 0$ ob $t = 0$:
  - $$r(\Theta) = \frac{r_0}{2}(1 - \cos\Theta),$$ $$t(\Theta) = \left(\frac{r_0^3}{8GM}\right)^{1/2}(\Theta - \sin\Theta)$$

  kjer je $\Theta$ v radianih.
- Iz prejšnje parametrične oblike pokaži, da za izraz $\frac{vt}{r}$ velja $\frac{vt}{r} = \frac{(\sin\Theta)(\Theta-\sin\Theta)}{(1-\cos\Theta)^2}$.
- Sedaj obravnavaj $m_1$ in $m_2$ kot Galaksijo in M31. Trenutni vrednosti za $v$ in $r$ sta $v = 118$ km/s in $r = 710$ kpc, za $t$ pa lahko vzameš starost vesolja (13700 milijonov let). Izračunaj $\Theta$ z numerično iteracijo.

Uporabi vrednost $\Theta$ iz zadnje točke in izračunaj $r_{max}$. Izračunaj še $M$ v masah Sonca.

× × ×

# Grayeve kode

Andrej Taranenko

**V prispevku se bomo ukvarjali z binarnimi nizi in ureditvami le-teh. V binarnem nizu se pojavljajo le ničle in enice. Enemu elementu binarnega niza rečemo bit. Število ničel in enic oziroma število bitov v binarnem nizu imenujemo dolžina niza.**

Hammingovo utež binarnega niza $x$ označimo z $\mathtt{w}(x)$ in je enaka številu enic v nizu $x$. Naj bosta $x$ in $y$ binarna niza enake dolžine. Hammingova razdalja med nizoma $x$ in $y$ je enaka številu bitov, v katerih se niza $x$ in $y$ razlikujeta. Označimo jo z $\mathtt{dist}(x, y)$.

Primer 1. Poglejmo nekaj primerov.

| $x$ | dolžina niza $x$ | $\mathtt{w}(x)$ |
|---|---|---|
| 00101 | 5 | 2 |
| 11011110 | 8 | 6 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

Naj bo $x = 0110$, $y = 1110$ in $w = 1001$. Potem velja $\mathtt{dist}(x, y) = 1$, $\mathtt{dist}(x, w) = 4$ in $\mathtt{dist}(y, w) = 3$.

Naj bo $n$ poljubno naravno število. Označimo z $\mathcal{B}_n$ množico vseh binarnih nizov dolžine $n$. Ni težko preveriti, da je število elementov množice $\mathcal{B}_n$ (to je število vseh možnih binarnih nizov dolžine $n$) natanko $2^n$. Vsaka bijektivna preslikava $f : \mathcal{B}_n \to \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ določa ureditev elementov množice $\mathcal{B}_n$. Ureditev elementov določi vrstni red elementov v množici. Sezname oziroma ureditve bomo pisali znotraj oglatih oklepajev, torej v obliki $[B_0, B_1, \dots, B_{2^n-1}]$.

Primer 2. Poglejmo tri izmed vseh možnih ureditev vseh binarnih nizov dolžine 3. Prva ureditev naj bo

- $\mathcal{A} = \left[\overset{0}{000}, \overset{1}{001}, \overset{2}{010}, \overset{3}{011}, \overset{4}{100}, \overset{5}{101}, \overset{6}{110}, \overset{7}{111}\right]$,

druga

- $\mathcal{B} = \left[\overset{0}{000}, \overset{1}{100}, \overset{2}{101}, \overset{3}{001}, \overset{4}{011}, \overset{5}{010}, \overset{6}{110}, \overset{7}{111}\right]$,

tretja pa

- $\mathcal{C} = \left[\overset{0}{000}, \overset{1}{001}, \overset{2}{011}, \overset{3}{010}, \overset{4}{110}, \overset{5}{111}, \overset{6}{101}, \overset{7}{100}\right]$.

Nad posameznimi nizi so zapisana števila, ki označujejo vrstni red elementov. Če natančneje pogledamo ureditvi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, lahko vidimo, da se dva zaporedna niza v izbrani ureditvi vedno razlikujeta v natanko enem bitu, torej je njuna Hammingova razdalja enaka 1.

V primeru 2 vidimo, da je mogoče binarne nize dolžine 3 urediti tako, da je med vsakima dvema zaporednima nizoma v ureditvi Hammingova razdalja enaka 1. Izkaže se, da je to lastnost mogoče doseči za ureditev vseh binarnih nizov dolžine $n$, pri čemer je $n \in \mathbb{N}$. Take ureditve imenujemo Grayeve kode.

Formalno zapisano, naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{B}_n$ množica vseh $2^n$ binarnih nizov dolžine $n$. *Grayeva koda reda $n$* je ureditev $[B_0, B_1, \dots, B_{2^n-1}]$ vseh nizov iz $\mathcal{B}_n$, v kateri se dva zaporedna niza razlikujeta v natanko enem bitu. Povedano drugače, za vsako celo število $i$, kjer je $0 \leq i < 2^n - 1$, velja, da je $\texttt{dist}(B_i, B_{i+1}) = 1$. Če v Grayevi kodi reda $n$ velja tudi, da je $\texttt{dist}(B_0, B_{2^n-1}) = 1$, ji rečemo *ciklična Grayeva koda*.

Ureditev $\mathcal{B}$ v primeru 2 je Grayeva koda reda 3, ni pa ciklična, saj se prvi in zadnji element kode razlikujeta v več kot enem bitu. Ureditev $C$ v tem istem primeru pa je ciklična Grayeva koda reda 3, saj je Grayeva koda in se tudi prvi ter zadnji element razlikujeta v natanko enem bitu.

Primer 2 tudi nakazuje, da obstaja več različnih Grayevih kod nekega reda. V nadaljevanju bomo predstavili Grayevo kodo, imenovano zrcaljena Grayeva koda.

## Zrcaljena Grayeva koda

Obstajajo različne konstrukcije Grayevih kod, predstavili bomo Grayevo kodo, imenovano *zrcaljena Grayeva koda*. Z $G^n$ bomo označili zrcaljeno Grayevo kodo reda $n$ in jo zapisali kot seznam $2^n$ nizov označenih na naslednji način:

- $G^n = [G^n_0, G^n_1, \ldots, G^n_{2^n-1}]$.

Zrcaljeno Grayevo kodo $G^n$ definiramo rekurzivno. Prva koda $G^1$ je po definiciji

- $G^1 = [0, 1]$.

Za podano zrcaljeno Grayevo kodo $G^{n-1}$, zrcaljeno Grayevo kodo $G^n$ definiramo kot

- $G^n = \left[0G_0^{n-1}, \ldots, 0G^{n-1}_{2^{n-1}-1}, 1G^{n-1}_{2^{n-1}-1}, \ldots, 1G_0^{n-1}\right]$.

Na ravni posameznih nizov lahko zapišemo ekvivalentno definicijo na naslednji način:

- $G_i^n = \begin{cases} 0G_i^{n-1}, & \text{če } 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1 \\ 1G^{n-1}_{2^n-1-i}, & \text{če } 2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1. \end{cases}$

Kodo $G^n$ tvorimo iz $G^{n-1}$ v dveh korakih. Najprej vzamemo kopijo $G^{n-1}$ in vsakemu nizu dodamo predpono 0. Nato vzamemo kopijo $G^{n-1}$ v obratnem vrstnem redu in vsakemu nizu dodamo predpono 1. Dejstvo, da vzamemo drugo kopijo v obratnem vrstnem redu, botruje temu, da se koda imenuje *zrcaljena* (za zadnjim nizom prve kopije si predstavljamo zrcalo).

Primer 3. Prva zrcaljena Grayeva koda je po definiciji

- $G^1 = [0, 1]$.

Zrcaljeno Grayevo kodo reda 2 dobimo iz zrcaljene Grayeve kode $G^1$ tako, da vzamemo eno kopijo $G^1$ in vsakemu nizu v tej kopiji dodamo predpono 0, nato vzamemo še eno kopijo $G^1$, pri čemer obrnemo vrstni red nizov v njej in vsakemu dodamo predpono 1. Tako torej dobimo

- 0**0**, 0**1** | 1**1**, 1**0**.

Z modro so zapisani nizi prve kopije $G^1$, ki jim je dodana predpona 0, z rdečo so v obratnem vrstnem redu zapisani nizi druge kopije $G^1$, ki jim je dodana predpona 1, simbol | pa si lahko predstavljamo kot mesto zrcaljenja. Tako smo dobili zrcaljeno Grayevo kodo reda 2, ki je

- $G^2 = [00, 01, 11, 10]$.

Tvorimo še zrcaljeno Grayevo kodo reda 3. Postopek je podoben kot prej, razlika je v tem, da vzamemo kopije zrcaljene Grayeve kode reda 2. Postopek lahko predstavimo torej tako:

- 0**00**, 0**01**, 0**11**, 0**10** | 1**10**, 1**11**, 1**01**, 1**00**.

S tem dobimo zrcaljeno Grayevo kodo reda 3, ki je

- $G^3 = [000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100]$.

S pomočjo indukcije je mogoče enostavno preveriti, da za poljubno naravno število $n \geq 1$ velja, da je $G^n$ Grayeva koda reda $n$. Še več, tako definirana koda je tudi ciklična Grayeva koda.

Sledi algoritem 1, ki predstavlja funkcijo `naslednik` niza v zrcaljeni Grayevi kodi $G^n$. Algoritem 1 prejme torej za parametra število $n$ in binarni niz dolžine $n$, ki ga zapišemo s posameznimi biti, torej v obliki $b_1 b_2 \ldots b_n$. Rezultat algoritma je binarni niz dolžine $n$, ki je v zrcaljeni Grayevi kodi takoj za podanim nizom, če obstaja. V nasprotnem primeru algoritem vrne »*nedefinirano*«.

Algoritem 1 deluje tako: Če je število enic v nizu sodo število, potem spremenimo zadnji bit niza. Če je število enic liho število, poiščemo prvo enico z desne in spremenimo sosednji bit levo od nje. Zadnji niz v $G^n$, ki nima naslednika, je oblike $10\ldots0$.

---

**Algoritem 1:** NaslednikGrayevaKoda($n$, $b_1b_2\ldots b_n$)

---

**if** $\mathtt{w}(b_1b_2\ldots b_n)$ *je sodo število* **then**
  $b_n = 1 - b_n$
**else**
  $j = n$
  **while** $b_j \neq 1$ **and** $j > 0$ **do**
    $j = j - 1$
  **if** $j = 1$ **then**
    **return** »*nedefinirano*«
  $b_{j-1} = 1 - b_{j-1}$
**return** $b_1b_2\ldots b_n$

---

Zrcaljeno Grayevo kodo reda $n$ lahko tvorimo s postopkom, prikazanim z algoritmom 2. Pri tem pričnemo s prvim binarnim nizom v zrcaljeni Grayevi kodi reda $n$, ki ima vse bite enake 0. Nato zaporedoma nad zadnjim izračunanim nizom izvedemo algoritem 1, dokler ne dobimo vseh nizov želene kode.

---

**Algoritem 2:** CelotnaGrayevaKoda($n$)

---

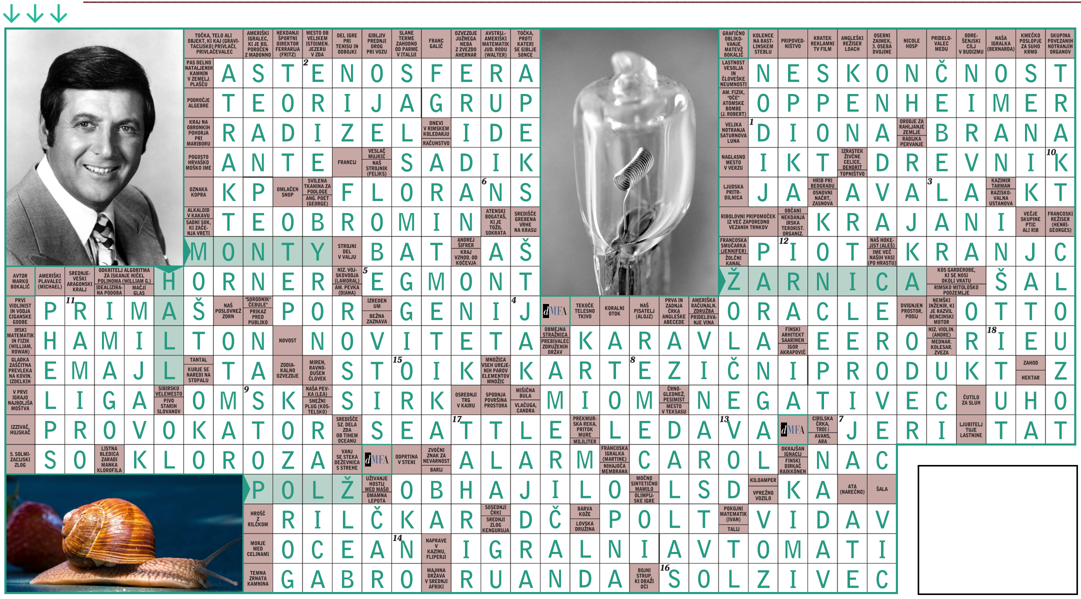
$G_0^n = \underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krat}}$
**for** $i = 1, \ldots, 2^n - 1$ **do**
  $G_i^n = \mathtt{naslednik}(G_{i-1}^n)$
**return** $G^n$

---

## Literatura


[1] D. L. Kreher in D. R. Stinson. *Combinatorial algorithms: generation, enumeration, and search*, CRC Press, 1999.


× × ×



# REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

## PRESEK 45/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke Preseka je **Deljenje skrivnosti.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Stanko Gajšek iz Ljubljane, Marijana Marinšek iz Celja in Ivan Lisac iz Kopra, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×


Klara Drofenik

**→ Letošnja slavnostna prireditev za najuspešnejše na državnih tekmovanjih iz matematike, fizike in astronomije je potekala v soboto 12. maja v Unionski dvorani v Ljubljani. Od skupno 127.926 tekmovalcev, ki so v letošnjem šolskem letu tekmovali na tekmovanjih, ki jih je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA), in so skupaj dosegli 845 zlatih priznanj, je v soboto 162 tekmovalcev prejelo kar 187 nagrad in pohval.**

Prireditev, znano tudi pod imenom Bistroumi, je otvoril Janez Dovč, glasbenik in fizik, ki je z igranjem na Teslovo tuljavo pritegnil pozornost prav vsakega v dvorani, saj je odlično povezal glasbo in fiziko, njegov nastop pa je bil tudi vizualno zelo zanimiv.

Zbrane je najprej nagovoril prof. dr. Dragan Mihailović, predsednik DMFA Slovenije. Po predstavitvi statističnih podatkov sta voditelja, sicer tudi odlična komika, dr. Uroš Kuzman in Aleš Novak, napovedala prve podelitve. Najprej so bile podeljene nagrade in pohvale najboljšim osnovnošolcem, gimnazijcem in študentom na tekmovanju iz znanja matematike ter priznanje diamantni kenguru, ki se ga podeli tistim devetošolcem, ki so v vseh devetih letih osnovnošolskega šolanja zbrali največ točk na tekmovanju Kenguru. Sledila je podelitev nagrad in pohval najboljšim osnovnošolcem in srednješolcem na tekmovanju iz fizike. Pred podelitvijo nagrad tekmovalcem v astronomiji je podelitev popestrila še ena glasbena točka. Znova smo se čudili glasbi Janeza Dovča, ki je tokrat igral na teremin.

Da je statistika lahko zelo zanimiva, sta nas podučila voditelja, ki sta predstavila nekaj statističnih podatkov. Vsi vemo, da je na svetu en papež, a tudi podatek, da Vatikan premore povprečno šest papežev na en kvadratni kilometer, je statistično pravilen.

**SLIKA 1.**
Janez Dovč igra na lasersko harfo. (Foto: Jana Jocif)


**SLIKA 2.**
Aleksej Jurca je na astronomski olimpijadi dosegel neverjeten uspeh. (Foto: Jana Jocif)

Prireditev se je nadaljevala s podelitvijo nagrad najuspešnejšim na tekmovanju iz razvedrilne matematike.

Ogledali smo si tudi kratek film Olimpijke, v katerem so nekdanje udeleženke matematične ali fizikalne olimpijade dr. Polona Oblak, dr. Metka Zupančič, dr. Helena Šmigoc, dr. Mojca Miklavec in dr. Ajda Skarlovnik opisale svoje spomine nanje. Vsem, predvsem pa dekletom, so želele sporočiti, da lahko ogromno dosežejo. Dr. Mojca Miklavec je, recimo, povedala, da je bila v ekipi za mednarodno matematično olimpijado leta 2000 kar polovica ekipe deklet, ki so bile uspešnejše od fantov. To je v zadnjih letih v Sloveniji kar nepredstavljivo, saj že četrto leto zapored v naši ekipi za matematično olimpijado ni nobenega dekleta.

Sledili sta še podelitvi nagrad za najuspešnejše matematike iz srednjih tehniških in strokovnih ter poklicnih šol ter najboljšim na tekmovanju v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike. Ker bi brez mentorjev tekmovalci težko dosegali tako dobre rezultate, je dvorana gromko zaploskala tudi ob prosojnici z imeni mentorjev vseh nagrajencev. Sledil je še zadnji glasbeni nastop, v katerem nas je Janez Dovč ponovno presunil s še enim vizualno zanimivim nastopom, ko je igral na lasersko harfo.

V sklepu prireditve je bil kot posebni gost na oder povabljen lanski absolutni zmagovalec Mednarodne olimpijade v astronomiji in astrofiziki na Tajskem, Aleksej Jurca. V kratkem pogovoru z voditeljema je predstavil zelo zanimivo nalogo iz ekipnega dela tekmovanja, pri kateri so morali tekmovalci iz slike neba v planetariju ter podatka o uri določiti, kje na Zemlji se nahajajo.

Sledila je še razglasitev članov in članic ekip na letošnjih mednarodnih olimpijadah. V imenu vseh se je Luka Govedič, ki se je lani udeležil Mednarodne fizikalne olimpijade in evropske fizikalne olimpijade ter na obeh osvojil srebrno medaljo, zahvalil vsem, ki jih pri delu podpirajo – staršem, profesorjem in prijateljem. Obljubil je, da bodo na olimpijadah ostali neporaženi v nogometu, se šli kopat, če bo le mogoče in se seveda potrudili po svojih najboljših močeh, da se vsaj približajo lanskim tekmovalnim uspehom. Upajmo, da jim to čim bolje uspe.

## Člani ekip za mednarodna tekmovanja 2018

### 59. mednarodna matematična olimpijada, 3.–14. julij 2018, Cluj-Napoca, Romunija

- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad
- Lovro Drofenik, I. gimnazija v Celju
- Luka Horjak, I. gimnazija v Celju
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad
- Andraž Maier, Gimnazija Jesenice
- David Opalič, I. gimnazija v Celju

Vodja ekipe: dr. Gregor Dolinar
Pomočnik vodje: Jakob Jurij Snoj
Tehnični sodelavec IMO: dr. Matjaž Željko

### 49. mednarodna fizikalna olimpijada, 21–29. julij 2018, Lizbona, Portigalska

- Klemen Bogataj, Gimnazija Škofja Loka,
- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad
- Natan Dominko Kobilica, Gimnazija Bežigrad
- Luka Govedič, II. gimnazija Maribor
- Urban Duh, II. gimnazija Maribor

Vodji ekipe: dr. Jure Bajc in dr. Barbara Rovšek

**www.dmfa.si**

### 12. srednjeevropska matematična olimpijada, 27. avgust–2. september 2018, Poljska

- Ana Meta Dolinar, Gimnazija Bežigrad
- Jan Genc, II. gimnazija Maribor
- Tevž Lotrič, Gimnazija Kranj
- Sašo Nikić, II. gimnazija Maribor
- Jaka Vrhovnik, I. gimnazija v Celju
- David Zakšek, I. gimnazija v Celju

Vodja ekipe: Domen Vreš
Pomožni vodja: David Popović

### 12. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, november 2018, Kitajska

- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad
- Gregor Humar, Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad
- Klemen Keršič, Šolski center Slovenska Bistrica
- Ema Mlinar, Gimnazija Vič

Vodja ekipe: Krištof Skok

### 2. evropska fizikalna olimpijada, 28. maj–1. junij 2018, Dolgoprudny, Rusija

- Klemen Bogataj, Gimnazija Škofja Loka
- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad
- Gregor Kikelj, Šolski center Novo mesto
- Luka Školč, Gimnazija Bežigrad

Vodji ekipe: dr. Jurij Bajc in dr. Barbara Rovšek

### 7. evropska dekliška matematična olimpijada, 6.–12. april 2018, Firence, Italija

- Ana Meta Dolinar, Gimnazija Bežigrad
- Tea Jeličić, Konservatorij za glasbo in balet Ljubljana
- Ana Opalič, I. gimnazija v Celju
- Špela Polak, I. gimnazija v Celju.

Vodja ekipe: Rok Havlas
Pomožni vodja: Klara Drofenik

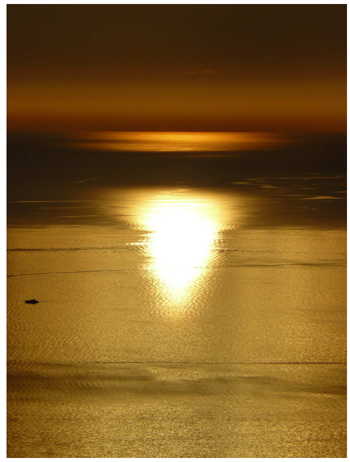

**SLIKA 3.**
Ob zaključku prireditve so se predstavili tudi letošnji olimpijci in olimpijke. (Foto: Jana Jocif)

# Zlata cesta

Aleš Mohorič

**Naslovnici te in prejšnje številke krasita fotografiji vsem dobro znanega svetlobnega pojava, zlate ceste. Kaj ga povzroča?**

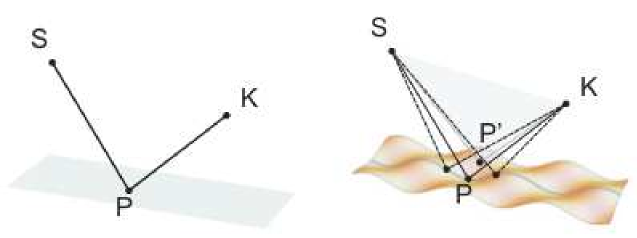
Odgovor je na dlani – odboj svetlobe. Ampak ta odboj ni kar tako. Razkrije nam lastnosti površine, na kateri se zgodi. Že tako je vodo težko opazovati, ker je prozorna, kaj šele podrobnosti na njenem površju. Z opazovanjem odboja izvemo več o podrobnosti površja. Odboj na ravni, gladki površini nam je dobro znan, če ne drugače, se vsak dan vidimo v zrcalu. Kako pa je z odbojem na površini, ki jo razbrazdajo valovi? Še vedno velja odbojni zakon, le da ga moramo uporabiti skoraj za vsak žarek posebej (slika 1). Svetla proga, ki jo opazimo na razburkani površini zaradi odboja svetlobe, je sestavljena iz množice odsevov, ki se hitro spreminjajo s časom. V večini primerov je proga simetrična glede na navpično ravnino, v kateri ležita opazovalec in svetilo (Sonce). Če je Sonce visoko nad obzorjem, je proga ovalne oblike (slika 2), ki pa se podaljša v enakomerno široko cesto, ko se Sonce spušča proti obzorju. Cesta se zaključi na obzorju in je široka toliko kot Sonce, kar pomeni, če upoštevamo perspektivo, da je proga čedalje širša, dlje kot je od očesa. Proga je najsvetlejša blizu sredine, vendar ne tam, kje bi videli zrcalni odsev na mirni površini, ampak nekoliko dlje od opazovalca.



**SLIKA 2.**
Zlata cesta ima obliko ovala, ko je Sonce visoko na nebu. Na fotografiji Sonca ni videti, ker se nahaja nad zgornjim robom fotografije. (Foto: Peter Legiša)

Razmere so v resnici nekoliko bolj zapletene in zainteresiranega bralca napotim na odlično knjigo Light and Color in the Outdoors Marcela Minnaerta.

Pojav lahko opazujemo tudi na mokrih tleh, gladkih površinah z drobnimi, urejenimi razami ali pa tudi skozi prozorne objekte, na katerih so drobne proge. Sorodna pojava sta tudi svetli krog na šopu optičnih vlaken (Optična vlakna, Presek 5/38, 2010) in krogi okoli vej, ki zastirajo pogled na vir svetlobe (Krožne veje, Presek 4/45, 2017). Zaradi svoje izrazitosti pojav radi upodobijo tudi slikarji (slika 3).




**SLIKA 1.**
Žarki od svetila S dosežejo kamero K tudi tako, da se odbijejo v točkah P. Na razburkani gladini se odsev raztegne v liso, katere velikost je odvisna od največjega naklona valov.

**SLIKA 3.**
Na levi je Zvezdna noč nad Rhono Vincenta van Gogha na desni pa Prizor iz pristanišča Clauda Lorraina. Kaj menite, kdo se je pri upodobitvi nekoliko zmotil?

# Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.


18,74 EUR


14,50 EUR


23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!