

Pritisnjena krožnica in ukrivljenost krivulje



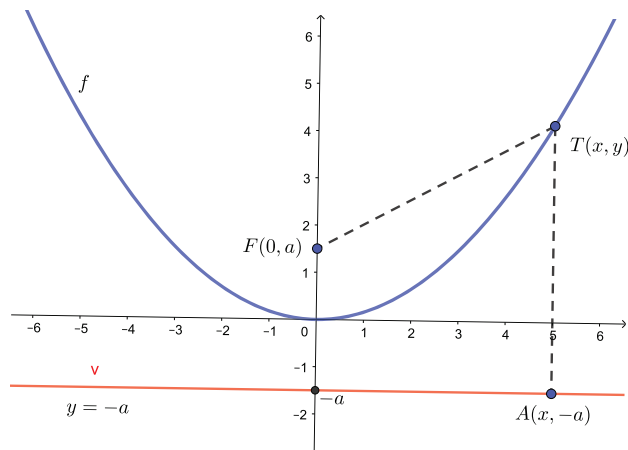
PETER LEGIŠA

→ Ukrivljenost krivulje v dani točki lahko merimo s pomočjo krožnice, ki se v tej točki dotika krivulje in ki se ji v dotikališču kar najboljše prilega. Izračunali bomo ukrivljenost parabole v temenu in ukrivljenost elipse v temenih. Povedali bomo še nekaj o ukrivljenosti bolj splošnih krivulj in o uporabi tega pojma v praksi.

Parabola

Naj bo $a > 0$. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišimo premico v z enačbo $y = -a$ in točko $F(0, a)$ kot na sliki 1.

Zanima nas množica točk $T(x, y)$, ki so enako oddaljene od v in F . Tej množici točk rečemo **parabola**. Ena točka na tej paraboli je izhodišče O . Razdalja med T in v je $y + a$. Razdalja med T in F pa je



SLIKA 1.

Parabola $y = x^2/6$

kvadratni koren izraza $x^2 + (y - a)^2$. Torej je

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a.$$

Če poenostavimo, dobimo $4ay = x^2$ ali

$$y = \frac{x^2}{4a}.$$

Naša krivulja je torej graf enostavne kvadratne funkcije $f(x) = x^2/4a$ in je simetrična glede na ordinatno os, ki ji zato rečemo *os parabole*.

Premico v imenujemo *vodnica* parabole. Točka $(0, 0)$, ki je presečišče parabole in njene osi, je *teme* parabole. Točka F pa je **gorišče** parabole. Če je naša parabola zrcalo, se namreč žarki, ki od zgoraj vpadajo na parabolo in so vzporedni njeni osi, odbijejo v gorišče F . Tega tu ne bomo dokazovali. Je pa to lastnost, zaradi katere uporabljamo parabolične antene, parabolična zrcala v teleskopih in podobno.

Pritisnjena krožnica v temenu parabole

Narišimo krožnico K s polmerom r in s središčem $S(0, r)$ na ordinatni osi kot na sliki 2. Ta krožnica se dotika abscisne osi in naše parabole v izhodišču.

Določimo presečišča naše parabole in krožnice K . Enačba krožnice je $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ ali $x^2 + y^2 - 2ry = 0$.

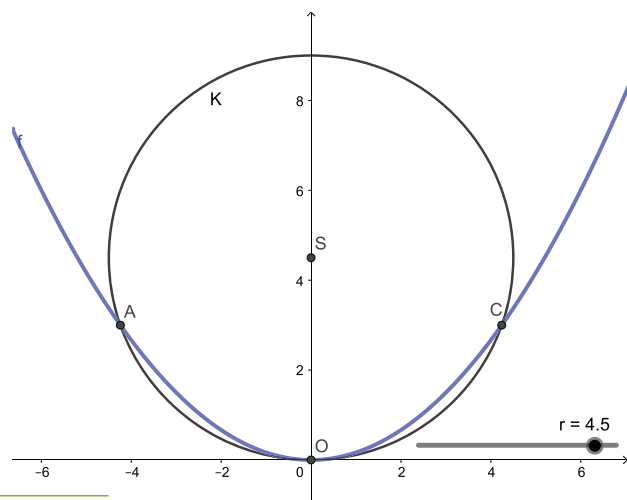
V presečišču je $x^2 = 4ay$. Tako je tam $4ay + y^2 - 2ry = 0$ ali

$$y(y + 4a - 2r) = 0.$$

Eno presečišče je seveda pri $y = 0, x = 0$. Druga presečišča morajo zadoščati pogoju

$$y = 2r - 4a = \frac{x^2}{4a}.$$

Tako je $x^2 = 8a(r - 2a)$. Za $r > 2a$ dobimo dve presečišču: A, C . Na sliki 2 imamo to narejeno za



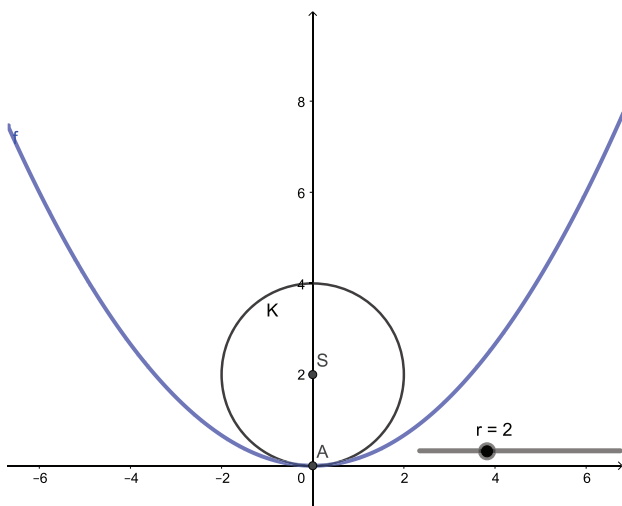
SLIKA 2.

Presečišča pri $r = 4,5 > 2a$

parabolo $6y = x^2$, torej pri $a = 1,5$. Vidimo, da je v tem primeru v temenu parabola bolj »ukrivljena« kot pa krožnica K . Na Geogebra strani [1] poženite animacijo, ki spreminja r . Abscisi točk A, C sta

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{8a\sqrt{r - 2a}}.$$

Za $r < 2a$ pa ni dodatnih presečišč; krožnica leži znotraj parabole, se je dotika v temenu, a je tam bolj ukrivljena kot parabola. To vidimo na sliki 3.



SLIKA 3.

Presečišča pri $r = 2 < 2a$

Če začnemo z velikim r in ga počasi zmanjšujemo proti $2a$, se presečišči A, C zbližujeta in se pri $r = 2a$ združita v izhodišču – temenu parabole. Na animaciji [1] lahko vidimo, da se v trenutku, ko se A, C združita, torej pri $r = 2a$, dobljena krožnica **najbolje prilega** paraboli v temenu. Tik pred tem se obe krivulji ujemata v treh zelo bližnjih točkah. Zato tej krožnici rečemo **pritisnjena krožnica** k paraboli v njenem temenu. Imamo jo na sliki 4.

Če ima krožnica polmer r , število $1/r$ imenujemo **ukrivljenost** te krožnice. Smiselno je reči, da je ukrivljenost parabole v temenu enaka ukrivljenosti pritisnjene krožnice v tej točki, torej enaka $1/r$, kjer je r polmer pritisnjene krožnice. V našem primeru je r celo enak razdalji med goriščem in vodnico parabole.

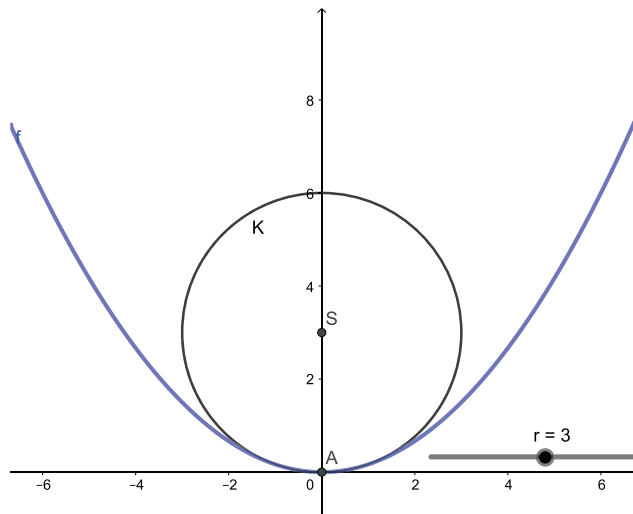
Elipsa

Vzemimo zdaj elipso s polosema a in b in z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kjer je $a > b$.

Spet bi radi našli krožnico, ki se najboljše prilega elipsi v temenu $A(a, 0)$. Ta krožnica bo vsebovala A . Njeno središče bo zaradi simetrije v točki $S(c, 0)$, kjer je $0 < c < a$ kot na sliki 5. Če je r polmer



SLIKA 4.

Pritisnjena krožnica k paraboli

→ krožnice, je $c = a - r$. Enačba krožnice je torej

$$\blacksquare (x - a + r)^2 + y^2 = r^2.$$

Poiščimo presečišča obeh krivulj. Iz enačbe elipse je $y^2 = b^2 - b^2 x^2 / a^2$ in tako za absciso presečišča velja

$$\blacksquare x^2 - 2x(a - r) + (a - r)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - r^2 = 0.$$

Če malo predelamo, imamo

$$\blacksquare p(x) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2(r - a)x + a^2 - 2ar + b^2 = 0.$$

Vemo, da je $x = a$ ena od rešitev enačbe, torej je polinom $p(x)$ deljiv z $(x - a)$. Zdelimo (z dolgim deljenjem ali s Hornerjevim algoritmom), pa dobimo količnik

$$\blacksquare q(x) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x + 2r - a - \frac{b^2}{a}.$$

V (dodatnih) presečiščih je ta količnik 0. Na spletni strani [2] poženite animacijo, ki spreminja polmer r . Opazujte, kaj se dogaja s presečišči. Animacija nas privede na misel, da dobimo pritisnjeno krožnico takrat, ko se dodatni presečišči ujemata s temenom, se pravi pri $x = a$. (Malo pred tem se obe krivulji ujemata v treh zelo bližnjih točkah.) Ob ujemanju je $q(a) = 0$. Takrat je

$$\blacksquare r = \frac{b^2}{a}.$$

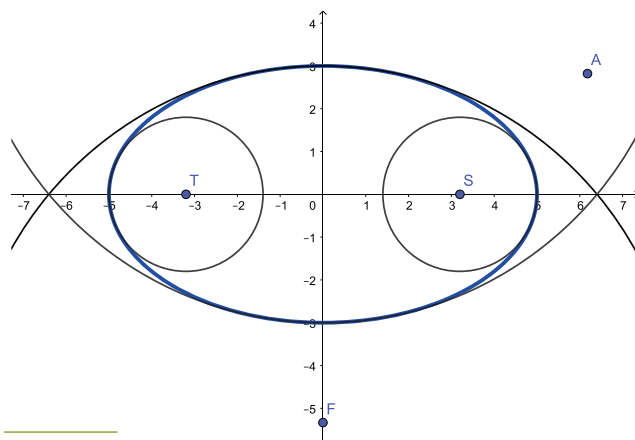
To imamo na sliki 5.

Še malo bolj lahko to utemeljimo, če ničlo polinoma q zapišemo kot

$$\blacksquare x = a + \left(\frac{b^2}{a} - r\right) \frac{2a^2}{a^2 - b^2}.$$

Če je $r < b^2/a$, je $x > a$, kar za nas nima pomena. Če je $r > b^2/a$, pa je $x < a$ in se krožnica očitno slabo prilega elipsi. V temenih elipse na osi y ima pritisnjena krožnica polmer a^2/b .

Avtor tega članka je še poslušal predmet *Opisna geometrija*. Za izpit je bilo potrebno najprej oddati več slik, narisanih s tušem. Na eni je bilo med drugim potrebno narisati pritisnjene krožnice v vseh temenih elipse z danima polosema. To je dalo slutiti



SLIKA 5.

Elipsa s polosema $a = 5$ in $b = 3$. Narisani so loki pritisnjenih krožnic v vseh temenih.

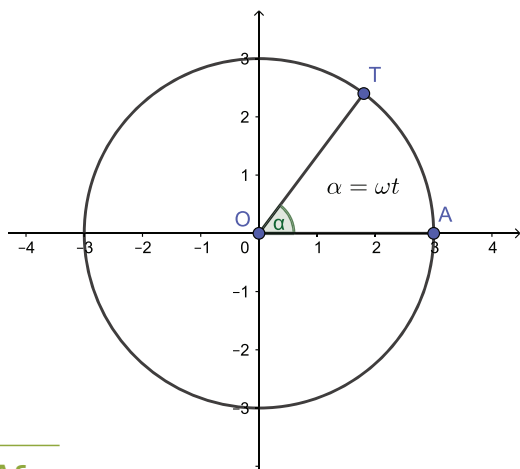
podobo elipse. Nato je bilo s pomočjo orodja, imenovanega *krivuljnik*, potrebno nekako povezati dele pritisnjenih krožnic v dokončno podobo elipse (slika 5). Kljub raznim krivuljam, vrezanim v orodje, kljub vrtenju krivuljnika v vse smeri – avtorju ni in ni šlo. Ni bilo mogoče v eni potezi s tem orodjem povezati oba krožna loka s črto in kolikor toliko prepričljivo sestaviti četrtno elipse. Dodaten problem je bilo dejstvo, da je napake, narejene s tušem, skoraj nemogoče popravljati. Da ne govorimo o packah! Skoraj vsi smo uporabljali preprosta jeklena peresa. (Mimogrede, podobna zoprna je bila naloga: Nariši ravno črto dolžine 15 cm iz samih pikic. Na centimeter naj bi bilo kakih dvajset do trideset pikic! Pregledovalec je bil znan po silno ostrem očesu.)

Naša obravnava pritisnjene krožnice je bila zabaven primer uporabe preproste srednješolske matematike. Sami lahko na ta način poskusite določiti polmer pritisnjene krožnice v temenu hiperbole. Za bolj zapletene krivulje pa se stvari lotimo drugače.

Posplošitev

Krivuljo lahko podamo kot pot gibajoče se točke. V ravnini, recimo, za vsak čas t podamo koordinati $x(t)$ in $y(t)$ oziroma krajevni vektor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Primer je enakomerno kroženje točke A v razdalji R okrog izhodišča. Na sliki 6 imamo krožnico s polmerom R in s središčem v izhodišču. Zveznica točke



SLIKA 6.

Kroženje s kotno hitrostjo ω .

T z izhodiščem oklepa kot α s pozitivnim delom abscisne osi.

Naj bo $\alpha = \omega t$. Tu je ω (fiksna) **kotna hitrost**. Koordinati točke $T(x, y)$ sta $(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$. Tako je

$$\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)).$$

Ker točka T v času t preteče lok dolžine $R\alpha = R\omega t$, je velikost njene hitrosti enaka $v = R\omega$.

V naslednjem kratkem odstavku bomo izpeljali še pospešek točke T pri takem kroženju. (Če še ne poznate odvoda, lahko ti dve vrstici preskočite.)

Če formulo za $\vec{r}(t)$ dvakrat odvajamo, dobimo vektor pospeška točke

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t), \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\ &= (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

ali

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Pospešek kaže od točke T proti središču krožnice. To je **centripetalni pospešek**.

Njegova velikost je

$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}.$$

Če je velikost hitrosti enaka 1, $v = 1$, je pospešek enak $1/R$, kjer je R polmer krožnice.

Imejmo zdaj kako bolj splošno krivuljo. Če v točki A take krivulje obstaja pritisnjena krožnica, se v bližini te točke krivulja zelo dobro prilega tej krožnici.

Če se po krivulji vozimo s hitrostjo 1, bo v bližini točke A praktično enako, kot bi se vozili po pritisnjeni krožnici s hitrostjo 1, torej bo pospešek v točki A enak $1/R$, kjer je R polmer pritisnjene krožnice. Pravimo, da je $1/R$ **ukrivljenost** krivulje v točki A , R pa **krivinski polmer** v tej točki.

To nam za »lepe« krivulje zagotavlja obstoj pritisnjene krožnice in omogoča določiti polmer pritisnjene krožnice. Obstaja sorazmerno enostavna formula za ukrivljenost, v kateri nastopajo prvi in drugi odvodi funkcij $x(t), y(t)$, vendar izpeljava presega nivo Preseka.

Ker imata pritisnjena krožnica in krivulja v točki A skupno tangento, je za ravninske krivulje lahko najti središče S pritisnjene krožnice: zveznica AS je pravokotna na tangento.

Krivinski polmer je zelo pomemben pri projektiranju cest. Predpisi določajo, kakšna sme biti in kako se lahko spreminja ukrivljenost ceste določene kategorije. Prenaglo povečanje ukrivljenosti namreč pomeni – ker tisti, ki spregledajo omejitev hitrosti, težko dovolj hitro zavrejo – veliko povečanje centrifugalnega pospeška (po formuli $a = \frac{v^2}{R}$). Z avtom, kolesom lahko zletimo s ceste ali pa se znajdemo na napačni strani. Pred desetletji je bilo nekaj takih »črnih točk« celo na najpomembnejših cestah zaradi težkega terena in pomanjkanja finančnih sredstev za gradnjo predorov. Tako je bilo, recimo, na štajerski strani trojanskega klanca.

V angleščini je termin za pritisnjeno krožnico *osculating circle*. Latinski izraz *osculum* pomeni *poljub*. To je torej krožnica, ki poljublja krivuljo v dani točki.

Literatura

- [1] P. Legiša, *Krožnica se dotika parabole v temenu*, GeoGebra, dostopno na www.geogebra.org/m/tackgfvq, ogled 21. marca 2022.
- [2] P. Legiša, *Krožnica se dotika elipse*, GeoGebra, dostopno na www.geogebra.org/m/m6bn74sg, ogled 21. marca 2022.

× × ×