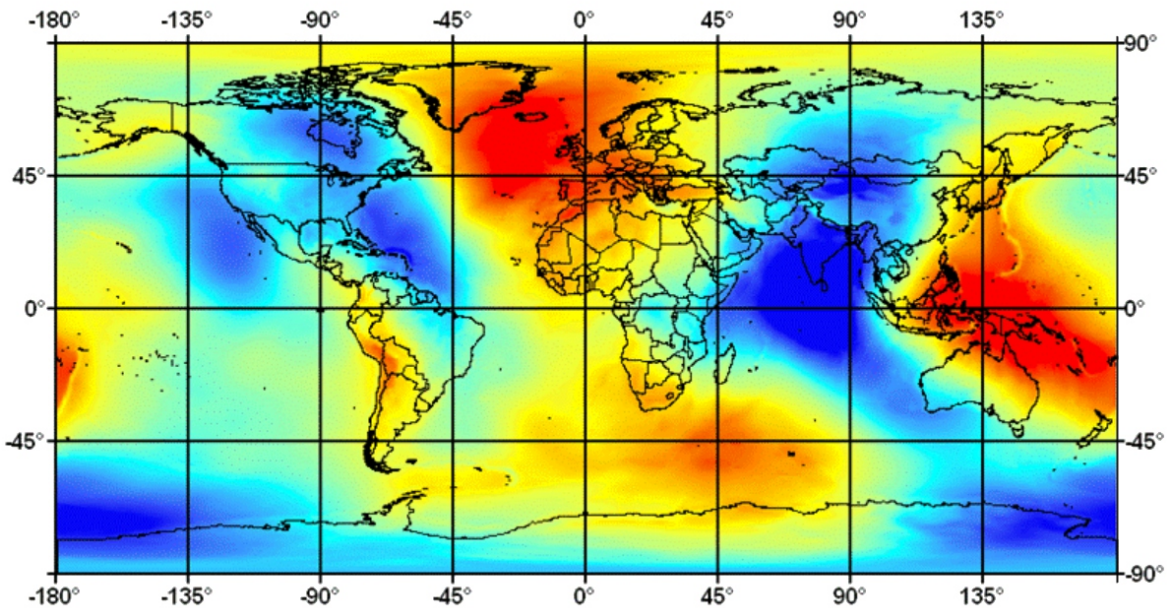


OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilno Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2016, letnik 63, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kopal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregleдал Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemaajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2016 DMFA Slovenije – 2027

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

RAČUNANJE KVADRATNEGA KORENA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A32, 33F05

V prispevku obravnavamo računanje kvadratnega korena števila na način, ki je opisan v Bakhšalijskem rokopisu.

SQUARE ROOT COMPUTING

In this contribution we discuss the square root computing described in the Bakhshali manuscript.

Uvod

Pretvarjanje pravokotnikov v ploščinsko enake kvadrate je staro toliko, kot je stara matematika. Spomnimo se samo na staro Mezopotamijo. Z zapisi števil in osnovnimi aritmetičnimi operacijami z njimi v pisni obliki se je hitro pojavil problem, kako izračunati kvadratni koren pozitivnega števila. Če že ne natančno, pa vsaj približno. V Indiji so odkrili, kako se izvaja osnovne aritmetične operacije s števili, ki so zapisana z indijskimi števkami v desetiškem številskem sestavu. Obvladali pa so tudi kvadratno in kubično korenjenje. To znanje se je prek Arabcev razširilo v Evropo. Vse te operacije se prav malo razločujejo od tistih, ki smo se jih učili v šoli takoj po drugi svetovni vojni. Algoritem kubičnega korenjenja so kmalu opustili, algoritem kvadratnega korenjenja pa le še redko kdo obvlada.

Zanimivo je, da Indijci niso zapisovali necelih števil v decimalni obliki, ampak z ulomki. Korenili so naravna števila. Z današnjega vidika je to dovolj, saj je v praksi pozitivno število, ki ga je treba koreniti, dano s končno mnogo decimalkami. Če to število pomnožimo z dovolj veliko sodo potenco števila 10, dobimo naravno število. Tega korenimo, nato pa rezultat delimo z ustrežno potenco števila 10, da dobimo pravi rezultat. Množenje in deljenje z 10 pa tako in tako le premika decimalno vejico med števki. V resnici je v tem prispevku opisano kvadratno korenjenje dobro za vsa pozitivna števila.

Babilonski postopek

Denimo, da moramo kvadratno koreniti naravno število Q , ki ni kvadrat naravnega števila in ga lahko zapišemo kot $Q = \xi_0^2 + q$, kjer je ξ_0 celi del števila \sqrt{Q} , q pa neničelno naravno število. Imenujmo ξ_0 začetni približek za \sqrt{Q} . Dandanes bi dopuščali tudi negativne q , toda vživimo se v čase, ko so računali samo z naravnimi števili in pozitivnimi ulomki. Število q je zato lahko $1, 2, \dots, 2\xi_0$. Če bi bil q enak 0 ali $2\xi_0 + 1$, bi bil Q popolni kvadrat, kar pa seveda ni zanimivo. Vsekakor lahko zapišemo

$$\sqrt{Q} = \sqrt{\xi_0^2 + q} = \xi_0 + a_0, \quad (1)$$

kjer je a_0 pozitivno število. S kvadriranjem dobimo

$$Q = \xi_0^2 + q = (\xi_0 + a_0)^2 = \xi_0^2 + 2a_0\xi_0 + a_0^2 \approx \xi_0^2 + 2a_0\xi_0,$$

torej $\xi_0^2 + q \approx \xi_0^2 + 2a_0\xi_0$. Pri tem smo a_0^2 zanemarili, ker je majhen v primerjavi s preostalimi členi. Velja namreč

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2 + q} - \xi_0 = \frac{q}{\sqrt{\xi_0^2 + q} + \xi_0} < \frac{q}{2\xi_0} \leq 1.$$

Postavimo $q = Q - \xi_0^2 \approx 2a_0\xi_0$ in s tem $a_0 \approx q/(2\xi_0) = (Q - \xi_0^2)/(2\xi_0)$. S tem smo s pomočjo (1) našli za \sqrt{Q} racionalni približek:

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{q}{2\xi_0} = \xi_0 + \frac{Q - \xi_0^2}{2\xi_0} = \frac{1}{2} \left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0} \right). \quad (2)$$

Rezultat (2) je bil znan že Babiloncem, Heronu iz Aleksandrije in Indijcem.

Do enakega rezultata pridemo tudi z dvema členoma razvoja v vrsto

$$\sqrt{\xi_0^2 + q} = \sqrt{\xi_0^2 \left(1 + \frac{q}{\xi_0^2} \right)} = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{q}{\xi_0^2}} \approx \xi_0 \left(1 + \frac{q}{2\xi_0^2} \right) = \xi_0 + \frac{q}{2\xi_0}.$$

Tudi Newtonova ali tangentna metoda nas privede do takega rezultata. Po tej metodi poiščemo pri danem pozitivnem začetnem približku ξ_0 za pozitivno ničlo polinoma $p(x) = x^2 - Q$ naslednji približek ξ_1 za ničlo tega polinoma po formuli

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{p(\xi_0)}{p'(\xi_0)}.$$

Torej

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{\xi_0^2 - Q}{2\xi_0} = \frac{1}{2} \left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0} \right).$$

Morda bi lahko sklepali tudi takole. Če je ξ_0 približek za \sqrt{Q} , potem Q/ξ_0 ni enak ξ_0 , kajti v nasprotnem primeru bi imeli $\xi_0^2 = Q$, kar ne gre. Ker je $\xi_0 < \sqrt{Q}$, je $Q/\xi_0 > \sqrt{Q}$. Torej je za nov približek ξ_1 dobro vzeti kar aritmetično sredino

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0} \right).$$

Po dobro znani relaciji med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil je $\xi_1 > \sqrt{Q}$.

Vpeljimo funkcijo f , ki je pri danem $Q > 0$ za $x > 0$ definirana kot

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{Q}{x} \right). \quad (3)$$

Graf funkcije f je konveksen, ima za poševno asimptoto premico $y = x/2$, za navpično asimptoto premico $x = 0$ in lokalni minimum v točki (\sqrt{Q}, \sqrt{Q}) . Funkcija f je zvezna, poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva in na intervalu $(0, \sqrt{Q})$ monotono padajoča, na poltraku (\sqrt{Q}, ∞) pa monotono naraščajoča. Graf funkcije (3) kaže slika 1.

Očitno je $\xi_1 = f(\xi_0)$. Če število ξ_1 vzamemo, tako kot prej ξ_0 , za približek \sqrt{Q} , potem je tudi $\xi_2 = f(\xi_1)$ približek za \sqrt{Q} , pa tudi $\xi_3 = f(\xi_2)$. Tako lahko najdemo neskončno zaporedje racionalnih približkov $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$ za \sqrt{Q} , kjer so členi dani z rekurzivno relacijo $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$ za $n = 0, 1, 2, \dots$. Zaporedje $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je navzdol omejeno s \sqrt{Q} , je pa tudi padajoče. Za $n = 1, 2, \dots$ namreč velja $\xi_{n+1} < \xi_n$, kar sledi iz:

$$\xi_n - \xi_{n+1} = \xi_n - f(\xi_n) = \xi_n - \frac{1}{2} \left(\xi_n + \frac{Q}{\xi_n} \right) = \frac{\xi_n^2 - Q}{2\xi_n} > 0.$$

Zaporedje $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$, ki smo ga dobili po opisanem, tako imenovanem iterativnem postopku oziroma z iteracijo, je konvergentno in ima limito ξ . Z limitnim procesom na obeh straneh relacije $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$ dobimo enačbo $\xi = f(\xi)$, kar pomeni, da je ξ negibna točka funkcije f . Preprost račun pokaže, da je $\xi = \sqrt{Q}$. To pomeni, da je za dovolj velike indekse n člen ξ_n tako blizu \sqrt{Q} , kakor želimo.

Iz relacij

$$\xi_{n+1}^2 - Q = \left(\frac{\xi_n^2 - Q}{2\xi_n} \right)^2 \quad \text{in} \quad \xi_n > \sqrt{Q}$$

dobimo še oceno

$$|\xi_{n+1}^2 - Q| < \frac{|\xi_n^2 - Q|^2}{4Q}. \quad (4)$$

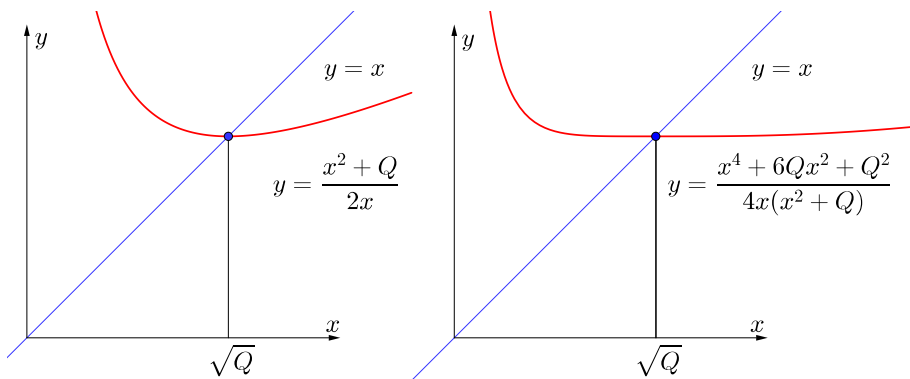
Iz (4) sklepamo, da je število točnih decimalk za \sqrt{Q} v členu ξ_{n+1} približno dvakrat večje kot v členu ξ_n . Pripomnimo, da je opisani iterativni postopek za računanje \sqrt{Q} primeren za vsako pozitivno število Q , in to neodvisno od izbire začetnega približka $\xi_0 > 0$. Hitrost konvergence zaporedja $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$ je tem boljša, čim bližje je ξ_0 številu \sqrt{Q} . Vsekakor je starodaven babilonski postopek za kvadratno korenjenje zelo hiter in ni čudno, da se je na veliko uporabljal v praksi pred prihodom žepnih računal in elektronskih računalnikov. Dovolj je bilo kakršnokoli računalno, s katerim se je dalo izvajati osnovne aritmetične operacije.

Ali se nemara ne da iteracije, ki nas privede do dobrih približkov za \sqrt{Q} , pospešiti? Zakaj bi obravnavali vse člene zaporedja $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$, saj na primer zaporedji $\{\xi_{2j}\}_{j=0}^{\infty}$ in $\{\xi_{3j}\}_{j=0}^{\infty}$ prav tako konvergirata k \sqrt{Q} ? V prvem primeru je $\xi_2 = f(\xi_1) = f(f(\xi_0))$, $\xi_4 = f(\xi_3) = f(f(\xi_2))$, ..., v drugem pa $\xi_3 = f(\xi_2) = f(f(\xi_1)) = f(f(f(\xi_0)))$, $\xi_6 = f(\xi_5) = f(f(\xi_4)) = f(f(f(\xi_3)))$, ... Če vpeljemo funkciji $g = f \circ f$ in $h = f \circ f \circ f$ ter zaporedji $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ in $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ z relacijama $x_n = \xi_{2n}$ ter $y_n = \xi_{3n}$, za $n = 0, 1, 2, \dots$, potem lahko zapišemo $x_{n+1} = g(x_n)$, $y_{n+1} = h(y_n)$. Koren $\xi = \sqrt{Q}$ je očitno negibna točka funkcij g in h ter novi zaporedji, ki ju dobimo iterativno iz začetnega približka ξ_0 , konvergirata proti ξ . Toda izraza za g in h lahko izračunamo. Dobimo

$$g(x) = \frac{x^4 + 6Qx^2 + Q^2}{4x(x^2 + Q)}, \quad h(x) = \frac{x^8 + 28Qx^6 + 70Q^2x^4 + 28Q^3x^2 + Q^4}{8x(x^2 + Q)(x^4 + 6Qx^2 + Q^2)}.$$

Prav tako brez težav pridemo do ocen, kako hitro konvergirata novi zaporedji. Za prvo imamo

$$|x_{n+1}^2 - Q| = |\xi_{2n+2}^2 - Q| < \frac{|\xi_{2n+1}^2 - Q|^2}{4Q} < \frac{|\xi_{2n}^2 - Q|^4}{(4Q)^3} = \frac{|x_n^2 - Q|^4}{(4Q)^3},$$



Slika 1. Grafa funkcij f in g .

torej

$$|x_{n+1}^2 - Q| < \frac{|x_n^2 - Q|^4}{(4Q)^3}. \quad (5)$$

Podobno dobimo tudi oceno

$$|y_{n+1}^2 - Q| < \frac{|y_n^2 - Q|^8}{(4Q)^7}. \quad (6)$$

Ocena (5) pove, da se z vsakim iteracijskim korakom s funkcijo g število pravih decimalnih približkov x_n za \sqrt{Q} približno početrji, ocena (6) pa, da se z vsakim iteracijskim korakom s funkcijo h število pravih decimalnih približkov y_n za \sqrt{Q} približno posmeri. Hitro konvergenco obravnavanih zaporedij h za \sqrt{Q} lahko napovemo iz grafov funkcij, s katerimi iterativno računamo približke. V okolici negibne točke ima zaporedje funkcij $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$ vedno manjše odvode, grafi so konveksni in čedalje bolj plitvi. Slika 1 kaže grafa funkcij f in $f \circ f$.

Lahko bi nadaljevali še z večkratnimi kompoziti funkcije f , ki pa postajajo vedno bolj zapletene racionalne funkcije z visokimi stopnjami števcov in imenovalcev. Vse imajo minimum v točki (\sqrt{Q}, \sqrt{Q}) , poševne asimptote njihovih grafov pa so po vrsti premice $y = x/2, y = x/4, y = x/8, \dots$

Za primer vzemimo $Q = 10$ in $\xi_0 = x_0 = 3$. Na 15 decimalnih točno je

$$\sqrt{10} = 3,162277660168379.$$

S funkcijo f dobimo (točne decimalke so podčrtane)

$$\xi_1 = \underline{3,1666666666666666},$$

$$\xi_2 = \underline{3,162280701754385},$$

$$\xi_3 = \underline{3,162277660169842}.$$

Izračunani so točni ulomki kot racionalni približki za $\sqrt{10}$, ki so nato pretvorjeni v decimalni zapis. Števci in imenovalci ulomkov naraščajo z večanjem indeksa.

S funkcijo g gre hitreje. Števci in imenovalci ulomkov se še hitreje povečujejo z rastočim indeksom. V decimalni obliki izračunamo

$$x_2 = \underline{3,16227766016837933199889388},$$

$$x_3 = \underline{3,162277660168379331998893544}.$$

Približka $x_1 = \xi_2$ nismo pisali še enkrat. Za funkcijo h prav tako dobimo ulomke z ogromnimi števci in imenovalci. Prvi približek y_1 je seveda enak ξ_3 , toda že drugi približek y_2 za $\sqrt{10}$ je točen na 99 decimalk.

Bakhšalijski postopek

Zapišimo (3) v obliki

$$f(x) = x - \frac{x^2 - Q}{2x}.$$

Potem lahko izrazimo

$$\xi_1 = f(\xi_0) = x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0} = x_0 + a_0, \quad a_0 = \frac{Q - x_0^2}{2x_0}.$$

Ker je

$$\xi_2 = f(\xi_1) = \xi_1 - \frac{\xi_1^2 - Q}{2\xi_1},$$

dobimo z malo več računanja

$$\xi_2 = x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0} - \frac{\left(x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0}\right)^2 - Q}{2\left(x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0}\right)} = x_0 + \frac{Q - x_0^2}{2x_0} - \frac{\left(\frac{Q - x_0^2}{2x_0}\right)^2}{2\left(x_0 + \frac{Q - x_0^2}{2x_0}\right)}.$$

Zadnji izraz lahko nazadnje zapišemo v strnjeni obliki

$$x_1 = \xi_2 = x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}. \quad (7)$$

Vsota prvih dveh členov na desni strani enačaja ni nič drugega kot babilonski približek ξ_1 za \sqrt{Q} . Zgornji izraz za približek x_1 pa tudi ni novost. Najdemo ga v *Bakhšalijskem rokopisu*, ki ga je našel neki kmet v razvalinah neke ograde leta 1881 v vasi Bakhšali blizu Pešavarja v današnjem Pakistanu. Leta 1881 Pakistan še ni obstajal, ampak je bilo njegovo ozemlje del Indije pod britansko kolonialno upravo. Rokopis sestavlja 70 kolikor toliko ohranjenih brezovih listov, na katerih so v mešanici sanskerta in lokalnega jezika in v stari indijski pisavi šarada zapisani razni računski zgledi in problemi iz aritmetike in algebre ter nekaj iz geometrije. Uporabljene so indijske številke v starinski obliki, uporabljen je mestni zapis števil in zapis ulomkov. Matematiki in lingvisti so razbrali zapise ter ugotovili, čeprav se vsi s tem ne strinjajo, da so nastali v 7. ali 8. stoletju in da so morda prepis še starejšega rokopisa iz 4. stoletja. V rokopisu je zelo malo matematičnih simbolov, skoraj vse je opisano z besedami. Med prvimi deli, ki poročajo o rokopisu, je [3]. Sledilo mu je še veliko drugih vse do najnovejših časov, na primer [2], ki popravlja napačne razlage starejših del, ter [4], ki obravnava razne izboljšave bakhšalijskega postopka in izdelava analogen postopek za kubično korenjenje.

Kakorkoli že, Bakhšalijski rokopis je eden najstarejših ohranjenih staroindijskih rokopisov. Hrani ga Bodleian Library v angleškem Oxfordu. V rokopisu je tudi naslednje besedilo, ki se v našem jeziku glasi:

V primeru nekvadrata odštej najbližji kvadrat; z dvakratnikom korena le-tega deli ostanek. Polovico kvadrata tega deli z vsoto korena in ulomka ter rezultat odštej od te vsote. Dobiš približek za koren nekvadrata. Nekvadrat je manjši od kvadrata te razlike za kvadrat odštetega števila.

V prvem delu tega besedila se ne skriva nič drugega kot približek x_1 , ki smo ga zapisali zgoraj. Zadnji stavek besedila pomeni

$$Q = x_1^2 - \left(\frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} \right)^2.$$

Do te relacije pridemo z nekoliko daljšim računom:

$$\begin{aligned} x_1^2 - \left(\frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} \right)^2 &= \left(x_1 + \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} \right) \cdot \left(x_1 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} \right) \\ &= (x_0 + a_0) \cdot \left(x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{x_0 + a_0} \right) = (x_0 + a_0)^2 - a_0^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0a_0 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \frac{Q - x_0^2}{2x_0} = Q. \end{aligned}$$

Žal ni znano, kako so stari Indijci prišli do teh rezultatov. Dokazov namreč niso zapisovali. Prav tako ni znano, ali so poznali iteracijo, to se pravi, da bi x_1 vzeli za nov začetni približek za \sqrt{Q} in postopek ponovili. Videli smo, da le-ta daje precej zapletene ulomke. Bakhšalijska iteracija bi potekala takole. Izberemo približek x_0 za \sqrt{Q} , nato izračunamo $a_0 = (Q - x_0^2)/(2x_0)$ in za $n = 0, 1, 2, \dots$ na podlagi (7) nadaljujemo z relacijama:

$$x_{n+1} = x_n + a_n - \frac{a_n^2}{2(x_n + a_n)}, \quad a_n = \frac{Q - x_n^2}{2x_n}.$$

Po vsem, kar smo doslej videli, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{Q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Morda je stari indijski matematik, ki je poznal babilonski približek za \sqrt{Q} , dodal še en člen μ in ga nekako izračunal. Danes bi zapisali:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{x_0^2 + q} = x_0 + \frac{q}{2x_0} + \mu = x_0 + a_0 + \mu.$$

S kvadriranjem hitro dobimo

$$x_0^2 + q = \left(x_0 + \frac{q}{2x_0} \right)^2 + 2\mu \left(x_0 + \frac{q}{2x_0} \right) + \mu^2.$$

Za μ je to kvadratna enačba, katere reševanje spet zahteva korenjenje. Da se temu izognemo, zanemarimo μ^2 v primerjavi s preostalimi členi in dobimo

$$x_0^2 + q \approx x_0^2 + q + \left(\frac{q}{2x_0} \right)^2 + 2\mu \left(x_0 + \frac{q}{2x_0} \right) = x_0^2 + q + a_0^2 + 2\mu(x_0 + a_0).$$

Vidimo, da je koristno vzeti

$$\mu = -\frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}$$

in na koncu dobimo bakhšalijski približek

$$\sqrt{x_0^2 + q} \approx x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} = x_1.$$

Možno je tudi, da je nekdo dvakrat zapored uporabil babilonsko metodo in po poenostavljanju prišel do opisane bakhšalijske metode. Kdo ve!

Za konec

Običajno ljudje mislijo, da so v stari Indiji odkrili desetiški številski sistem in deset znakov za številke in nič drugega. V resnici je matematično znanje že v starih časih prehajalo v vse smeri: med Evropo, Bližnjim vzhodom, Indijo in Kitajsko. Postopki za računanje z desetiško zapisanimi števili, vključno s korenjenjem, so že zelo stari. Najdemo jih v staroindijskih rokopisih, ki vsebujejo veliko konkretnih nalog, ki jih na primer rešujemo z linearnimi in kvadratnimi enačbami ter Pitagorovim izrekom. Indijski matematiki so odkrili marsikaj celo pred evropskimi, na primer funkciji sinus in kosinus, precej dobro aproksimativno formulo za funkcijo sinus, potenčno vrsto za funkcijo arkus tangens, rešitve nekaterih Pellovih enačb. Kot primer smo natančneje obravnavali postopek kvadratnega korenjenja, kakršnega drugi niso poznali.

LITERATURA

- [1] D. H. Bailey in J. M. Borwein, *Ancient Indian Square Roots: An Exercise in Forensic Paleo-Mathematics*, <http://www.davidhbailey.com/dhbpapers/india-sqrt-encyc.pdf>, ogled: 18. 11. 2015.
- [2] M. N. Channabasappa, *On the Square Root Formula in the Bakhshali Manuscript*, *Indian J. History Sci.* **11** (1976) 2, 112–124.
- [3] A. F. R. Hoernle, *On the Bakhshali Manuscript*, Bibliolife, Charleston; faksimile knjžice, ki je izšla na Dunaju 1887 pri založbi Alfred Hölder.
- [4] S. A. Shirali, *The Bakhshali Square Root Formula*, *Resonance* (2012), september, 884–894.

MÖBIUSOVA¹ ZANKA IN $\int Rac(x, \sqrt{X(x)}) dx$

IVAN PUCELJ

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 00A35, 33E05

V zapisu obravnavamo nekaj lastnosti Möbiusove zanke in pripadajočega Möbiusovega traku.

MÖBIUS LOOP AND $\int Rac(x, \sqrt{X(x)}) dx$

We study some properties of the Möbius loop and of the corresponding Möbius band.

Od prvega aksioma v Osnovah geometrije (D. Hilbert): »Dve različni točki določata natanko eno premico, ki gre skozi njiju« pa do enakosti

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

ki analitično pomeni enačbo premice skozi točki A in B , $A \neq B$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, vodi zahtevna pot po geometriji, linearni algebri in analizi. Realno številsko os smo z (1) »dvignili« na opornici \vec{a} ter \vec{b} in ohranili vso bogato strukturo množice realnih števil.

Denimo, da se točki A in B pričneta gibati po evklidskem prostoru: vektorski funkciji $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $t \in J$, naj pomenita krivulji, ki sta dovolj krotki, denimo vsaj razreda $C^{(3)}$, na intervalu J (trikrat zvezno odvedljivi, ali vsaj odsekoma, s končno mnogimi izjemami). Tako dobimo iz (1) dvoparametrsko vektorsko funkcijo

$$\vec{r}(\lambda, t) = (1 - \lambda)\vec{a}(t) + \lambda\vec{b}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad t \in J, \quad (2)$$

ki je enoparametrska družina premic (ali pa daljic, ko je $\lambda \in [0, 1]$); pri vrednostih parametra t , ko je $\vec{a}(t) = \vec{b}(t)$, pa premica degenerira v le eno točko. Enačba (2) lahko pomeni ploskev (v prostoru \mathbb{R}^3), ki nosi premice.

¹Nemški matematik in tudi astronom August Ferdinand Moebius (1790–1868) je deloval v obdobju, ko je matematična ustvarjalnost v Evropi čudovito zacvetela; nekaj časa se je pod Gaussovimi mentorstvom ukvarjal z astronomijo. V geometriji je znana *Möbiusova geometrija krožnic* (ki je vseč tudi arhitektom in slikarjem), pa konstrukcija poliedrov, ki nimajo prostornine, najbolj znana je po njem imenovana neorientabilna ploskev v evklidskem prostoru \mathbb{E}^3 s svojimi čarobnimi lastnostmi, še vedno zaželeno raziskovalcem v geometrijski topologiji.

Nanjo pa lahko gledamo tudi kot na zvezno družino zveznih funkcij, ki povezujejo dani funkciji $\vec{\mathbf{a}}(t)$ in $\vec{\mathbf{b}}(t)$, torej linearno homotopijo med njima:

$$\vec{\mathbf{r}}(0, t) = \vec{\mathbf{a}}(t), \quad \vec{\mathbf{r}}(1, t) = \vec{\mathbf{b}}(t).$$

Zgled 1. Naj bosta $\vec{\mathbf{a}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t), t \in [0, 1]$, zanki (zanka je zvezna sklenjena pot, tj. taka pot, ki se začne in konča v isti točki) v ravnini, ki sta vsebovani v enotski krožnici $S^1 := \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{\mathbf{x}}| = 1\}$ s središčem v izhodišču $(0, 0)$.

Pokažimo, da lahko eno zanko zvezno deformiramo v drugo (torej ju povežemo s *homotopijo*), če »si le nista preveč vsaksebi«. Dovolj je, da sta njuni vrednosti v vsaki točki t oddaljeni za manj kot 1, torej da velja

$$k := \max_{t \in [0, 1]} |\vec{\mathbf{a}}(t) - \vec{\mathbf{b}}(t)| < 1. \tag{3}$$

Želena homotopijo dobimo, če linearno homotopijo (2) komponiramo z radialno retrakcijo

$$\mathbb{R} - \{(0, 0)\} \longrightarrow S^1, \quad \vec{\mathbf{x}} \longmapsto \frac{\vec{\mathbf{x}}}{|\vec{\mathbf{x}}|},$$

prebodene ravnine na krožnico S^1 . Pri pogoju (3) namreč premica (in zato tudi na njej ležeča daljica) (1) ne gre skozi izhodišče $(0, 0)$: za daljico, določeno z $\lambda \in [0, 1]$, v nasprotnem pridemo do protislovne neenakosti

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{0}} &= (1 - \lambda)\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}, & -\vec{\mathbf{a}} &= \lambda(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}), \\ |-\vec{\mathbf{a}}| &= |\lambda||\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|, & 1 &= |\lambda||\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}| \leq k < 1. \end{aligned}$$

Preden se lotimo obravnave Möbiusove zanke, si oglejmo vektorsko funkcijo (2) v dveh primerih. Naj bosta e, f pozitivni realni števili in $\lambda \in [0, 1]$. Za $0 \leq t \leq 2\pi$ naj bo

(i) $\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\mathbf{b}}(t) = (e \cos t, f \sin t, ct);$

(ii) $\vec{\mathbf{a}}(t) = (0, 0, ct), \quad \vec{\mathbf{b}}(t) = (e \cos t, f \sin t, ct).$

V primeru (i) je pripadajoča ploskev stožec z vrhom v izhodišču 0 koordinatnega sistema xyz , ki ima za osnovo (eliptično) vijačnico $\vec{\mathbf{b}}(t)$; ploskev v (ii) pa si lahko zamišljamo »kinematično«, s translacijo polmerov elipse $(x/e)^2 + (y/f)^2 = 1$ v smeri osi z tako, da je ploskev unija vodoravnih daljic, ki povezujejo točke na navpični osi z ustreznimi točkami nad elipso.

Dolžino loka krivulje $\vec{\mathbf{b}}(t)$ od $t = 0$ do nekega $t \in [0, 2\pi]$ dobimo z integracijo (predpostavimo še $f \leq e$)

$$\begin{aligned} \int_0^t |\dot{\vec{\mathbf{b}}}(r)| d\tau &= \int_0^t \sqrt{e^2 \sin^2 \tau + f^2 \cos^2 \tau + c^2} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{e^2 + c^2 - (e^2 - f^2) \cos^2 \tau} d\tau. \end{aligned}$$

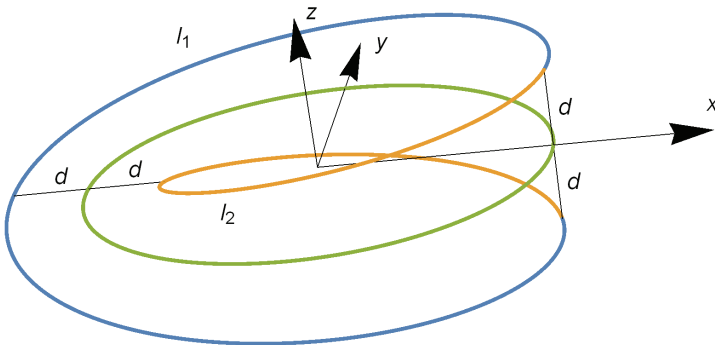
Označimo $k^2 := (e^2 - f^2)/(e^2 + c^2)$ in uvedimo novo spremenljivko φ s predpisom $\tau =: \frac{\pi}{2} - \varphi$. Potem imamo

$$\int_0^t |\dot{\vec{\mathbf{b}}}(r)| d\tau = \sqrt{e^2 + c^2} \int_{\pi/2-t}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Če izberemo $t = \pi/2$, dobimo izraz $\sqrt{e^2 + c^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, kjer je $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ polni eliptični integral druge vrste, zapisan po Legendru; zanj in za eliptična integrala $F(\varphi; k)$ ter $\Pi(\varphi; k, n)$ so izdelane preglednice vrednosti, glej [4]. Število k v oznakah teh treh integralov se imenuje *modul* ustreznega eliptičnega integrala.

Möbiusova zanka

Naj bosta sedaj $0 < d < r$ realni števili. Oglejmo si poti $\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{c}}(t) + \vec{\mathbf{d}}(t)$ in $\vec{\mathbf{b}}(t) = \vec{\mathbf{c}}(t) - \vec{\mathbf{d}}(t)$ za $t \in [0, 2\pi]$, kjer je $\vec{\mathbf{c}}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$



Slika 1. Desnosučna Möbiusova zanka.

parametrizacija krožnice v ravnini xy s polmerom r in središčem v izhodišču,

$$\vec{\mathbf{d}}(t) = \left(d \sin \frac{t}{2} \cos t, d \sin \frac{t}{2} \sin t, d \cos \frac{t}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

pa opisuje pot točke, ki v navpični ravnini potuje v negativni smeri po krožnici s polmerom d in središčem v izhodišču od najvišje do najnižje točke krožnice ter se hkrati z dvojno hitrostjo vrti okoli osi z v pozitivni smeri, glej sliko 1. »Mehanski model« za nastanek obeh krivulj $\vec{\mathbf{a}}(t)$, $\vec{\mathbf{b}}(t)$, ko je $\lambda \in [0, 1]$, je razviden iz slike 2.

Iz odvodov

$$\dot{\vec{\mathbf{c}}}(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0)$$

in

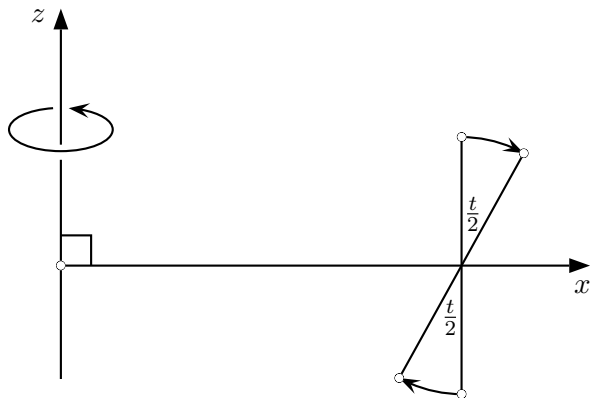
$$\dot{\vec{\mathbf{d}}}(t) = \left(\frac{d}{2} \cos t - d \sin \frac{t}{2} \sin t, \frac{d}{2} \cos \frac{t}{2} \sin t + d \sin \frac{t}{2} \cos t, -\frac{d}{2} \sin \frac{t}{2} \right)$$

zlahka izračunamo $|\dot{\vec{\mathbf{c}}}|^2 = r^2$, $|\dot{\vec{\mathbf{d}}}|^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + d^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ in $\dot{\vec{\mathbf{c}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{d}}} = rd \sin \frac{t}{2}$, od tod pa

$$|\dot{\vec{\mathbf{a}}}| = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(r + d \sin \frac{d}{2}\right)^2, \quad |\dot{\vec{\mathbf{b}}}| = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(r - d \sin \frac{t}{2}\right)^2.$$

Ker je $\vec{\mathbf{d}}(2\pi) = -\vec{\mathbf{d}}(0)$, je $\vec{\mathbf{a}}(0) = \vec{\mathbf{b}}(2\pi)$ in $\vec{\mathbf{b}}(0) = \vec{\mathbf{a}}(2\pi)$. Enostavno sklenjeno krivuljo $\vec{\mathbf{r}}(t)$, ki pomeni isto množico točk, podaja predpis:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \vec{\mathbf{a}}(2t), & \text{če je } 0 \leq t \leq \pi \\ \vec{\mathbf{b}}(2t - 2\pi), & \text{če je } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$



Slika 2

To je desnosučna Möbiusova zanka; bralcu predlagamo, da premisli, kako je treba prepis spremeniti, da nastane levosučna zanka.

Njeno dolžino dobimo po integraciji

$$l_1 + l_2 = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{\mathbf{a}}}| dt + \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{\mathbf{b}}}| dt.$$

Geometrijsko je $|\dot{\vec{\mathbf{a}}}|$ dolžina tvorilke stožca z vrhom v točki $(0, 0, \frac{d}{2})$, katerega osnova je projekcija krivulje $\vec{\mathbf{a}}(t)$ na koordinatno ravnino xy (glej sliko 3). Dobimo torej integrala

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(r \pm d \sin \frac{t}{2}\right)^2} dt = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r \pm d \sin t)^2} dt,$$

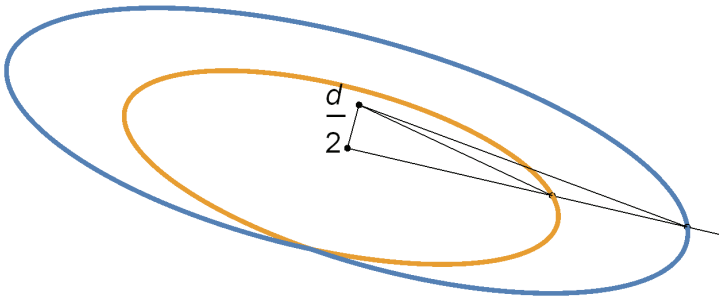
kjer predznak plus ustreza $|\dot{\vec{\mathbf{a}}}(t)|$, minus pa $|\dot{\vec{\mathbf{b}}}(t)|$.

Zgornji integral $L := 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r \pm d \sin \tau)^2} d\tau$ lahko preoblikujemo z uvedbo nove spremenljivke $t = \text{tg}(\tau/2)$ in dobimo

$$L = 8 \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(r \pm d \cdot \frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)}.$$

Označimo

$$a := \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2, \quad b := \pm 4 \cdot r, \quad c := 4d^2$$



Slika 3

in

$$\begin{aligned} X(t) &:= a(1+t^2)^2 + bt(1+t^2) + ct^2 \\ &= at^4 + bt^3 + (2a+c)t^2 + bt + a. \end{aligned}$$

Potem je

$$\frac{1}{8}L = \int_0^1 \sqrt{X(t)} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^1 \frac{X(t)}{(1+t^2)^2 \sqrt{X(t)}} dt$$

in zato $\frac{1}{8}L = aL_0 + bL_1 + cL_2 - cL_3$, kjer smo označili

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{X(t)}}, & L_1 &= \int_0^1 \frac{t dt}{(t^2+1)\sqrt{X(t)}}, \\ L_2 &= \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{X(t)}}, & L_3 &= \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2\sqrt{X(t)}}. \end{aligned}$$

Prišli smo tako do integralov oblike $\int \text{Rac}(t, \sqrt{X(t)}) dt$, kjer je $\text{Rac}(t, u)$ racionalna funkcija spremenljivk t in u . V našem primeru je $u = \sqrt{X(t)}$ in $X(t)$ simetričen polinom četrte stopnje. Na prav take vrste integralov privede tudi določanje dolžin projekcij danih krivulj $\vec{\mathbf{a}}(t)$, $\vec{\mathbf{b}}(t)$ in določanje ploščin območij v ravnini xy , ki jih omejujejo te projekcije.

Opišimo na kratko, kako integral L_0 prevedemo na kanonično obliko (po Legendru). Polinom $X(t)$ izrazimo kot produkt dveh kvadratnih polinomov z realnimi koeficienti. V njiju se z linearno ulomljeno substitucijo znebimo linearnih členov (primerjaj to z integracijo »podobnih« integralov, ko je $X(t)$ kvadratni polinom, npr. [1]). Tako smo že blizu cilja, pridemo namreč do integralov oblike npr.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

V našem primeru – polinom $X(t)$ je simetričen – je za delo pomembno tole: če je t ničla polinoma $X(t)$, je tudi $1/t$ ničla tega polinoma, ničle polinoma X pa nastopajo v konjugiranih parih. Vprašanje je tedaj, ali lahko (pri danih d in r) prevedemo te integrale na eliptične integrale $F(\varphi; k)$, $E(\varphi; k)$ in $\Delta(\varphi; k, n)$. Za podrobnosti obravnave integrala L_0 glej na primer [3] in [4].

Za ilustracijo pogledjmo primer, ko ima polinom $X_1(x)$ dva para konjugirano kompleksnih ničel: $X_1(x) = (x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$, $a > b > 0$, kar je enostavneje kot pri zgornjem $X(t)$. V integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}$$

vpeljemo $x^2 + a^2 = y^2$, $x^2 + b^2 = y^2 - (a^2 - b^2)$, $xdx = ydy$ in dobimo (ob upoštevanju pozitivnosti x)

$$\int_a^{\sqrt{1+a^2}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)(y^2 - (a^2 - b^2))}}.$$

Z uvedbo $y = \frac{a}{\sin \varphi}$ ta integral prevedemo na želeno obliko

$$\frac{1}{a} \int_{\arcsin(a/\sqrt{1+a^2})}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{1}{a} F\left(\arcsin \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, k\right),$$

kjer je $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Möbiusov trak

Ploskev, ki jo omejuje Möbiusova zanka, imenujemo Möbiusov trak in je podana s preslikavo

$$\vec{\mathbf{r}}(\lambda, t) = (1 - \lambda)\vec{\mathbf{a}}(t) + \lambda\vec{\mathbf{b}}(t) = \vec{\mathbf{c}}(t) + (1 - 2\lambda)\vec{\mathbf{d}}(t)$$

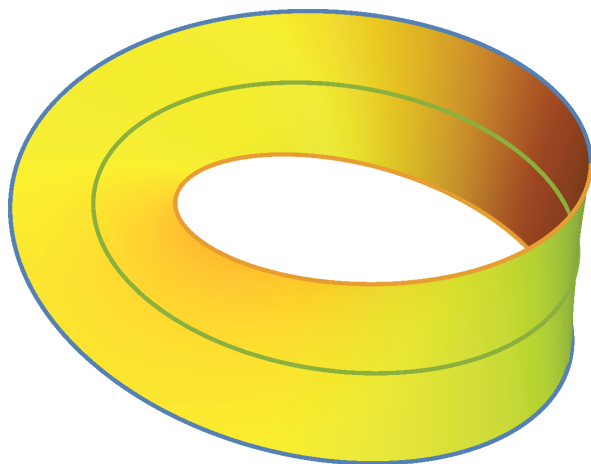
za $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vpeljimo $\mu := (1 - 2\lambda)$, $-1 \leq \mu \leq 1$, torej je

$$\vec{\mathbf{r}}(\mu, t) = \vec{\mathbf{c}}(t) + \mu\vec{\mathbf{d}}(t). \quad (4)$$

Prva fundamentalna forma te ploskve je

$$I(\mu, t) = ds^2 = E(\mu, t)d\mu^2 + 2F(\mu, t)d\mu dt + G(\mu, t)dt^2,$$

kjer je $E(\mu, t) = \vec{\mathbf{r}}_\mu \cdot \vec{\mathbf{r}}_\mu$, $F(\mu, t) = \vec{\mathbf{r}}_\mu \cdot \vec{\mathbf{r}}_t$ in $G(\mu, t) = \vec{\mathbf{r}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}}_t$. Ker je $\vec{\mathbf{r}}_\mu = \vec{\mathbf{d}}(t)$ in je $|\vec{\mathbf{d}}| = d$, je $E(\mu, t) = d^2$. Iz konstantnosti dolžine vektorja $\vec{\mathbf{d}}$ sledi, da je $\vec{\mathbf{d}}(t) \cdot \dot{\vec{\mathbf{d}}}(t) = 0$, zato je $F(\mu, t) = \vec{\mathbf{d}}(t) \cdot \dot{\vec{\mathbf{c}}}(t)$, kar je enako 0. To pomeni, da



Slika 4. Möbiusov trak.

so koordinatne krivulje $\mu = \text{konstanta}$ pravokotne na koordinatne krivulje $t = \text{konstanta}$ (kar je nazorno očitno). Podobno kot formulo za $|\dot{\vec{a}}|$ dobimo

$$G(\mu, t) = \mu^2 \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 + \left(d \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) + 2\mu r d \sin \frac{t}{2} + r^2.$$

Ploskovni element Möbiusovega traku je enak $dP = W(\mu, t)d\mu dt$, kjer je

$$W(\mu, t) = \sqrt{E(\mu, t)G(\mu, t) - F(\mu, t)^2} = \frac{rd}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{t}{2}}} \sqrt{1 + V(\mu, t)^2}$$

in $V(\mu, t) = \mu \frac{d}{2r} (1 + 4 \sin^2 \frac{t}{2}) + 2 \sin \frac{t}{2}$, površino pa izračunamo z integriranjem po traku. Integracija po μ je elementarna, saj je v funkciji $W(\mu, t)$ pod korenem kvadraten izraz v μ (glej [1]). Ta integral lahko izračunamo s standardnim nastavkom ali pa vpeljemo novo spremenljivko $u = V(\mu, t)$, kjer t obravnavamo kot parameter:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 W(\mu, t) d\mu &= \\ &= \frac{r^2}{(1 + 4 \sin^2 \frac{t}{2})^{3/2}} \left(V(\mu, t) \sqrt{1 + V(\mu, t)^2} + \operatorname{arsh} V(\mu, t) \right) \Big|_{\mu=-1}^{\mu=1}. \end{aligned}$$

Prvi del v oklepaju pri integraciji po t porodi integrale, ki so v zvezi z integrali L_0, L_1, L_2, L_3 , ki smo jih že srečali pri določanju dolžin Möbiusove zanke.

Spomnimo se, da je druga fundamentalna forma ploskve enaka

$$II(\mu, t) = L(\mu, t)d\mu^2 + 2M(\mu, t)d\mu dt + N(\mu, t)dt^2,$$

kjer so koeficienti forme projekcije ustreznih drugih odvodov parametrizacije $\vec{\mathbf{r}}(\mu, t)$ na normalo na ploskev. Ker je $\vec{\mathbf{r}}_\mu$ neodvisen od μ , je $\vec{\mathbf{r}}_{\mu\mu} = \vec{\mathbf{0}}$ in zato je $L(\mu, t) = 0$. Od tod pa sledi, da je Gaussova ukrivljenost K Möbiusovega traku enaka

$$K = -M^2/W^2 < 0.$$

Bolj podrobno, dolžina normale $\vec{\mathbf{r}}_\mu \times \vec{\mathbf{r}}_t$ je zaradi pravokotnosti vektorjev $\vec{\mathbf{r}}_\mu$ in $\vec{\mathbf{r}}_t$ enaka

$$|\vec{\mathbf{r}}_\mu \times \vec{\mathbf{r}}_t| = |\vec{\mathbf{r}}_\mu| \cdot |\vec{\mathbf{r}}_t| = \sqrt{EG} = W(\mu, t),$$

torej je

$$\begin{aligned} MW &= (\vec{\mathbf{r}}_{\mu t}, \vec{\mathbf{r}}_\mu, \vec{\mathbf{r}}_t) = (\dot{\vec{\mathbf{d}}}, \vec{\mathbf{d}}, \dot{\vec{\mathbf{c}}}) = \vec{\mathbf{d}} \cdot (\dot{\vec{\mathbf{c}}} \times \dot{\vec{\mathbf{d}}}) \\ &= d \cdot \sqrt{|\dot{\vec{\mathbf{c}}}|^2 |\dot{\vec{\mathbf{d}}}|^2 - |\dot{\vec{\mathbf{c}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{d}}}|^2} = \frac{rd^2}{2} \end{aligned}$$

in

$$K(\mu, t) = -\frac{r^2 d^4}{4W(\mu, t)^4}.$$

Möbiusov trak je torej ploskev nekonstantne negativne Gaussove ukrivljenosti, saj je funkcija $W(\mu, t)$ res odvisna od spremenljivk μ in t . To pomeni, da traku ne moremo »poravnati«, enako pa velja tudi za njegove dele, ki npr. nastanejo, ko ga prerežemo vzdolž vlaken $t = \text{konstanta}$, ki so daljice (dolžine $2d$) – ker vsebuje te daljice, pravimo, da je ploskev *premonosna*. Zaradi neporavnosti pa pravimo, da ni *odvojna* ploskev.

Na »srednjici« $\mu = 0$ ploskve (5) je $W(0, t) = rd$ in ukrivljenost vzdolž te krivulje je konstantna, $K(0, t) = -\frac{1}{4r^2}$. Ta krivulja ima tudi torzijsko ukrivljenost oziroma zvitost enako 0, saj je ravninska. Bralcu prepuščamo v premislek vprašanje, ali ima poleg te krivulje zvitost 0 (za vse t) še katera od koordinatnih krivulj $\mu = \text{konstanta} \in [-1, 1]$ ploskve (4)?

LITERATURA

- [1] I. Vidav, *Višja matematika, 1. del*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1949.
- [2] I. Vidav, *Višja matematika, 2. del*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1951.
- [3] J. Plemelj, *Teorija analitičnih funkcij*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1953.
- [4] I. S. Gradštein in I. M. Ryžik, *Table of integrals, series, and products*, šesta izdaja, Academic Press, Boston, 2000.

O TEŽI IN GRAVITACIJI

JOŽE RAKOVEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 91.10, 92.60

Navedene so nekatere, predvsem geofizikalne posledice razlik med težo in gravitacijo: da težnostni pospešek \vec{g} ni enak sem in tja po Zemlji, da Zemlja ni okrogla, ampak približno elipsoid in natančneje geoid (še natančneje: ima gorovja, njena oblika plimuje, niha z lastnimi načini), da je treba za točno merjenje zračnega tlaka z živosrebrnim barometrom upoštevati točno vrednost lokalnega težnostnega pospeška, da je točnost določanja vetrov preko horizontalnih gradientov zračnega tlaka ali gradientov geopotenciala ploskev konstantnega tlaka tudi odvisna od točnih vrednosti g itd.

ON GRAVITY AND GRAVITATION

On several geophysical examples are illustrated the consequences of the differences between gravity on Earth and the Earth's gravitation: that gravity acceleration \vec{g} differs from place to place, that Earth is not a sphere, but approximately an ellipsoid and more exactly a geoid (and even more exactly: it has mountain massifs, it's shape is influenced by tides, by it's normal modes oscillations), that the exact value of local gravity is essential for exact air pressure measurements with Hg barometer, that for wind estimates based on horizontal air pressure gradients or geopotential gradients on constant pressure levels also proper local g values are needed, etc.

Uvod

Pri površnem izražanju ljudje pogosto enačijo težo z gravitacijo, pospešek sile teže \vec{g} z gravitacijskim pospeškom itd. To je zgolj približno prav in za marsikaj v vsakdanjem življenju med težo in gravitacijo res ni omembe vredne razlike. Enačenje teže z gravitacijo je pogosto tudi na spletu, npr. [2], in celo v fizikalnih učbenikih. Toda teža in gravitacijska sila le nista povsem enaki – gleda marsičesa je razlika kar pomembna.

Gravitacijo klasično razložimo s privlačnostjo mas: sila gravitacije na maso m je posledica tega, da je nekje – na razdalji r – še neka druga (po navadi večja) masa M in sila je odvisna od obeh mas m in M ter od razdalje med njima r – kako velika je, pa pove še gravitacijska konstanta \mathcal{G} : $F = \frac{\mathcal{G}mM}{r^2}$. Njena velikost je $\mathcal{G} = (6,67384 \pm 0,00080)10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. (Po Einsteinovi teoriji pa je gravitacija posledica tega, da masa M okrog sebe ukrivi prostor-čas.)

V vsakdanjem življenju se nam zdi svet okrog nas raven in mirujoč. Seveda pa vemo, da se Zemlja vrti, in to za en obrat v enem dnevu. Torej

naš kraj, v katerem živimo, v 24 urah naredi en obrat okrog osi vrtenja Zemlje. Pri nas je dolžina vzporedniškega kroga na Zemlji okrog 28 tisoč kilometrov. To pomeni, da ob tem, ko »smo pri miru«, krožimo z obodno hitrostjo več kot 1000 km/h! Saj komaj lahko verjamemo! In to ne z enakomerno hitrostjo »naravnost«, ampak po ukrivljeni poti naokrog. Ko »smo pri miru«, v resnici drvimo po krožnici in jutri ob istem času »bomo spet tukaj«. Kroženje pa je pospešeno gibanje – hitrost se ves čas spreminja. Tudi pri enakomernem kroženju, ko se velikost hitrosti sicer ne spreminja, se ves čas spreminja smer hitrosti. Čeprav se tega v vsakdanjem življenju ne zavedamo, živimo torej v pospešenem svetu.

Iz mirujočega sistema lahko opazujemo neki drug sistem, ki se pospešeno giblje. Čeprav telesa v tistem sistemu morda tudi mirujejo, vseeno »od zunaj vidimo« pospešek teles – zato, ker se pospešuje ves opazovani sistem. Če pa smo sami v tem drugem sistemu – na vrteči se Zemlji – in se ne premikamo, imamo občutek, da »smo res pri miru«. Opazovalec »od zunaj« seveda lahko opazi, da pospešeno krožimo, čeprav mi tega neposredno ne občutimo. Posledic tega pospešenega gibanja – kroženja – pa je kar nekaj in nekatere so kar pomembne.

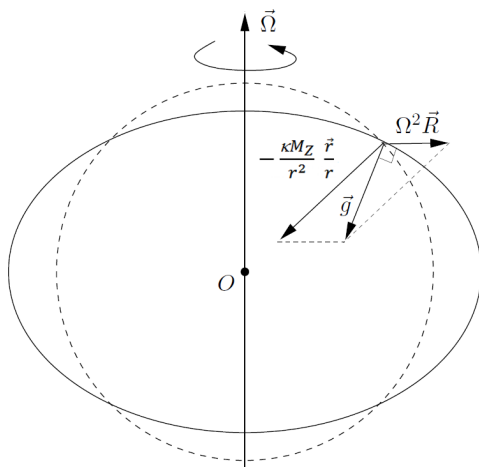
Teža

Oglejmo si sliko 1 (iz [1]). Del Zemljine površine se ob vrtenju s centripetalnim pospeškom $-\Omega^2\vec{R}$ ves čas obrača v novo smer. Ta pospešek pa na njej, ko krožimo skupaj z njo, občutimo kot sistemski centrifugalni pospešek $+\Omega^2\vec{R}$, pri čemer je R polmer vzporedniškega kroga. Lahko govorimo tudi o sistemski centrifugalni sili na masno enoto $\vec{f}_R = \vec{F}_R/m = +\Omega^2\vec{R}$. Ta se skupaj z gravitacijsko silo $-\frac{\mathcal{K}mM_Z}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ (tu je M_Z masa Zemlje, r pa njen polmer) sešteje v silo teže, na enoto mase pa v specifično silo teže \vec{f}_t oz. v težnostni pospešek $\vec{g} = \vec{f}_t$. Težnostni pospešek oz. sistemska specifična sila teže \vec{f}_t je torej vsota gravitacijskega pospeška, ki kaže proti središču Zemlje – v smeri $-\vec{r}$, in sistemskega centrifugalnega pospeška v smeri $+\vec{R}$: $\vec{f}_t = \vec{g} = -\frac{\mathcal{K}M_Z}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + \Omega^2\vec{R}$. Prispevek sistemske centrifugalne sile pri teži pa ni vedno zanemarljiv!

Vplivi vrtenja Zemlje na težo

Težnostni pospešek ni povsod po Zemlji enak

Velikost težnostnega pospeška ni povsod na Zemlji enaka. Na polu je polmer kroženja $R = 0$, zato je tam teža enaka gravitaciji: g je tam največji



Slika 1. Zaradi vrtenja okrog svoje osi ima Zemlja približno elipsoidno obliko, kajti njena površina se oblikuje pravokotno na rezultanto sile gravitacije in sistemske centrifugalne sile – iz [1].

– $g_{\text{pol}} = g_{\text{grav}} \approx 9,83 \text{ ms}^{-2}$. Na ekvatorju je polmer kroženja R največji, poleg tega pa tam gravitacijski in centrifugalni pospešek kažeta ravno v nasprotni smeri. Zato je tam g zaradi vpliva vrtenja Zemlje najmanjši: $g_{\text{ekv}} \approx 9,78 \text{ ms}^{-2}$. Njune razlike nam povedo, kolikšen je na ekvatorju pospešek zaradi vrtenja Zemlje $g_{\text{vrt}} \approx 0,05 \text{ ms}^{-2}$. Razlike so torej okrog $\pm 0,25$ odstotka od srednje vrednosti. Velikokrat vzamemo za g vrednost okrog $9,81 \text{ N kg}^{-1}$, kar je blizu mednarodno dogovorjene »standardne« vrednosti $g_0 = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$. Kakšen je težnostni pospešek na neki geografski širini φ , najlažje ocenimo za okroglo Zemljo: vektorsko seštejemo gravitacijski pospešek \vec{g}_{grav} in pospešek zaradi vrtenja \vec{g}_{vrt} (glej sliko 1) in dobimo $g(\varphi) = \sqrt{g_{\text{ekv}}^2 \cos^2 \varphi + g_{\text{pol}}^2 \sin^2 \varphi}$. Ta približna ocena ne upošteva sploščnosti Zemlje, zato je boljša ocena Carla Somigliane:

$$g(\varphi) = (ag_{\text{ekv}} \cos^2 \varphi + bg_{\text{pol}} \sin^2 \varphi) / \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

kjer sta a in b velika in mala polos elipsoida – radija Zemlje na ekvatorju in na polu. Danes pa se največ uporablja $g(\varphi)$ v obliki vrste

$$g(\varphi) = g_0(1 + c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \sin^4 \varphi + c_3 \sin^6 \varphi + \dots),$$

kjer so $c_1 = 5,2790414 \cdot 10^{-3}$, $c_2 = 2,32718 \cdot 10^{-5}$, $c_3 = 1,262 \cdot 10^{-7}$, ... glej npr. [3].

(Ena »hudomušna«. Marsikdo ima težave s preveliko »težo«. Ker je g na ekvatorju manjši, bi bilo zanj najpreprosteje, da jo zmanjša tako, da gre na ekvator – takoj bo nekoliko »lažji«. Žal pa bo ob manjši teži njegova masa še vedno enaka . . .)

Zemlja je približno elipsoid

Že slika 1 nam pokaže, da zaradi vrtenja Zemlja torej ni okrogla, ampak je približno elipsoid. Za matematični opis sta v uporabi predvsem: mednarodni rotacijski elipsoid GRS 80 in ameriški WGS 84. Pri obeh je večja polos elipse dolga $a = 6378137,0$ m, manjša polos b pa za okrog 21000 m krajša (in določena v metrih na celo 18 decimalk); njena dolžina se po obeh omenjenih geoidih malce razlikuje – pri GRS 80 je za okrog 1 mm krajša kot je pri WGS 84 [4].

Oba pola sta torej okrog 21 km bliže središču Zemlje, kot so ekvatorialni predeli. Tudi ta razlika oddaljenosti od središča Zemlje malenkost prispeva k razlikam g med ekvatorjem in polom: malo več kot pol tisočinke – ta razlika ni neposredno povezana s sistemsko centrifugalno silo, ampak z gravitacijo, v kateri nastopa $1/r^2$.

Razlaga elipsoidne oblike je nakazana že na sliki 1. Gladina oceanov je pravokotna na težo, ki pa ne kaže povsod proti središču Zemlje – v središče kaže samo na obeh polih ter na ekvatorju. Od tod elipsoid. Idealni elipsoid je torej tista oblika, pri kateri je gravitacijski pospešek povsod enak in povsod kaže proti središču Zemlje, tej gravitaciji pa se pridruži še vpliv vrtenja Zemlje – od tod poimenovanje rotacijski elipsoid. Rezultanta pa ne kaže povsod v središče Zemlje.

Bolj natančno: Zemlja je geoid

K lokalni velikosti in smeri težnostnega pospeška \vec{g} poleg vrtenja Zemlje vpliva po gravitacijskem zakonu tudi razporeditev mas v okolici te lokacije in pod njo. Zemeljska skorja je različno debela – pod oceani med 5 in 10 km, pod kopnim med 20 in 70 km [5]. V njej so različni deleži različno gostih kamnin in rudnin z različnimi sestavami; največ je silicijevega dioksida SiO_2 (okrog 60 %, 2650 kg m^{-3}), sledi mu aluminijev oksid Al_2O_3 (okrog 15 %, 3950 kg m^{-3}), ki je za pol gostejši, potem so tu še drugi minerali, tja do železovega oksida FeO (okrog 3,5 %, 6000 kg m^{-3}), ki je več kot dvakrat gostejši od SiO_2 , itd. (isti internetni vir). Lokalno so deleži mineralov različni, debeline skorje različne, torej mase pod lokacijo različne in privlačnost različna. Na privlačnost mas vplivajo velike mase v obsežnih visokih gorovjih, pod gladino oceanov so kilometri vode z (glede na rudnine in kamnine)

relativno majhno gostoto okrog 1000 kg m^{-3} , itd. Geodeti z merjenji anomalij teže z gravimetri določajo referenčno obliko Zemlje – geoid. Največ uporabljajo gravimetre na osnovi nihala (nihajni čas je odvisen od dolžine niti, na kateri je obešena utež, in od g) ali pa na osnovi prostega pada [6]. Ko zberejo te podatke, pa imajo še kar precej težav in dela.

Geoid je tista (še vedno nekoliko idealizirana) oblika površine Zemlje, ki je pravokotna na težo. Še vedno idealizirana je ta oblika zato, ker geoid neposredno ne prikazuje hribov (ponekod tudi več kot 8000 m nadmorske višine) in globokih udrtin (globine tudi več kot 11 000 m pod morsko gladino): prikazuje obliko Zemlje, kot da bi bila povsod prekrita s tekočino, katere gladina je povsod pravokotna na \vec{g} . Smer \vec{g} se lokalno spreminja tja do 1 ločne minute glede na pravokotnico na elipsoid, velikost pa za večja območja okrog $\pm 0,0015 \text{ ms}^{-2}$ (geodeti bi temu rekli 150 mGal – z enoto, poimenovano po Galileju), lokalno, na manjših območjih pa tudi do $\pm 0,003 \text{ ms}^{-2}$. Razlike med geoidom in idealnim rotacijskim elipsoidom so ponekod od -110 m pa tja do $+90 \text{ m}$ (glej sliko na naslovnici).

Za matematični opis globalnega geoida za vso Zemljo je potrebna dolga vrsta členov analitičnih funkcij radija, geografske širine in dolžine – čim večja prostorska ločljivost, tem daljša vrsta funkcij (glej npr. [8]). Opis geoida znova in znova izpopolnjujejo – npr. EGM2008 (slika na naslovnici) opisuje geoid s prostorsko ločljivostjo 2,5 kotne minute! Geodeti pa razvijajo tudi lokalne približke, ki so lokalno točnejši od globalnega geoida (npr. [9]).

Geoid dodaja gravimetrične popravke k elipsoidni ukrivljenosti oceanov. Ukrivljena gladina oceanov je torej tisto, čemur rečemo »vodoravno«. Zato je kar umestna spet ena hudomušna opomba: da »vodoravno« sploh ni vodo-ravno, ampak »vodo-ukrivljeno«.

Prava oblika Zemlje

K pravi obliki Zemlje je treba na geoid »naložiti« še hribe, ki so ponekod visoki tja do 8 km in več, ter dejansko obliko morske gladine, ki se spreminja zaradi konvergenč in divergenč morskih tokov, zaradi plimovanja... Delno plimuje tudi zemeljska skorja, saj »plava« na tekočem zunanjem plašču. V tekočem delu Zemlje je tudi konvekcija. Pa tudi to še ni vse: površina Zemlje tudi niha, »vibrira« na več lastnih načinov – kar predstavljajte si vrtečo se kroglo iz mehkega želeja ali pa balon iz milnice v zraku, kako lahko vibrirata! Ali torej sploh poznamo pravo obliko Zemlje? Za vsak trenutek in za vsako lokacijo kljub naporom geodetov v resnici ne.

Točno merjenje zračnega tlaka z živosrebrnim barometrom

Pojdimo sedaj k meteorologiji, kjer so razlike glede \vec{g} tudi precej pomembne. Visoko v ozračju zaradi tega, ker vrednost g pada s kvadratom razdalje od središča Zemlje. Ker pa se vreme dogaja v spodnjih 10 ali 15 kilometrih nad tlemi, je do te višine sprememba sorazmerno majhna in primerljiva s krajevnimi razlikami zaradi vrtenja Zemlje.

Najprej si oglejmo klasično merjenje zračnega tlaka z živosrebrnim barometrom. Danes ga sicer nadomeščajo novi merilniki, je pa živosrebrni barometer absolutni merilnik, ki ga ni treba umerjati. Zračni tlak je premo sorazmeren z dolžino stolpca živega srebra v barometru h , gostoto živega srebra ρ_{Hg} in velikostjo težnostnega pospeška g : $p = \rho_{\text{Hg}}gh$. Meteorologi morajo meriti tlak na nekaj desetink milibara točno ($1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa} = 100 \text{ N m}^{-2}$)¹. Zato so pomembni točna dolžina h , točna gostota ρ_{Hg} in točna vrednost g . Pri dolžini pazimo, da jo merimo zares navpično (zato barometer ni nikoli privit na steno, ampak visi na kljuki) in da merimo točno (z mikrometrskim merilom). Pri gostoti upoštevamo, da se živo srebro močno temperaturno razteza, zato je v barometrsko živo srebro vgrajen dodatni termometer.

Glede g moramo pri merjenju tlaka z živosrebrnim barometrom upoštevati lokalne vrednosti, ki jih določijo geodeti. Danes ti barometri niso več na široko v uporabi, toda v umerjevalnem laboratoriju, v katerem umerjajo drugačne barometre, je spet treba poznati pravi lokalni g . Tako v laboratoriju ARSO, kjer umerjajo barometre za potrebe slovenske meteorološke službe, uporabljajo vrednost $9,80615880 \text{ N kg}^{-1}$.

Vetrovi v ozračju

Zakaj je sploh potrebna tolikšna točnost pri merjenju zračnega tlaka? Milibar gor ali dol – saj tega sploh ne občutimo. Še ko gremo npr. v hribe, kjer je zračni tlak za 100 ali celo 200 mbar nižji, tega ne občutimo. Šele na res velikih višinah nas začne »dajati višinska bolezen«. Zakaj torej zračni tlak na okrog desetinko milibara točno?

Za razlago pomembnosti točne vrednosti tlaka sta potrebna dva odstavka uvodnih razlag: o Coriolisovi sistemski sili in o geostrofskem ravnotežju.

Posledica tega, da se Zemlja vrti, ni samo sistemska centrifugalna sila, ampak tudi sistemska Coriolisova sila. Ta se pojavi samo, če se telesa gibljejo po Zemlji sem in tja (drugače od sistemske centrifugalne sile $+m\Omega^2\vec{R}$,

¹Uporaba enote za tlak $\text{mbar} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}$ je zaradi uveljavljenosti dovoljena tudi v sistemu enot SI, čeprav ni nujna. Je pa res, da se vse več in več uporablja v obliki hPa.

ki deluje na vsa telesa – mirujoča in gibajoča se). Razlaga Coriolisovega učinka je malce bolj zapletena, zelo približno pa lahko rečemo, da je to nekaj podobnega kot »zanašanje« pri premikanju po vrtečem se vrtiljaku (za pravilno razlago glej npr. [1]). Ta sistemska sila $\vec{F}_C = m\vec{f}_C$ je za premikanje po vodoravni smeri sorazmerna hitrosti premikanja v , sorazmernostni faktor je Coriolisov parameter $f = 2\Omega \sin \varphi$, kjer je φ geografska širina, njena velikost je torej $F_C = |\vec{F}_C| = mf v$. Ob ekvatorju je vrednost Coriolisovega parametra $f = 0$ (geografska širina je tam nič), pri nas pa je velikost $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Na vrteči se Zemlji na horizontalno se premikajoča telesa deluje Coriolisova sila na severni polobli pravokotno v desno od smeri premikanja, na južni polobli pa v levo od smeri premikanja.

Zračni tlak je hidrostatični tlak – posledica teže zraka nad nami. Nad zemeljsko površino se ponekod z vetrovi nakopiči več zraka in zato je tam tlak pri tleh večji, drugod pa je manj zraka in je torej pri tleh manjši zračni tlak. Tlačne razlike povzročajo silo – od višjega tlaka proti nižjemu tlaku. Čim večja je razlika Δp na čim krajši razdalji Δl , tem večja je sila. Vzemimo kvader dolžine Δl s stranicama S na levi in na desni. Njegov volumen je torej $V = S\Delta l$. Če je na levi strani ob ploskvi S tlak p , ob ploskvi S na desni strani pa nižji tlak $p - \Delta p$, potem od leve proti desni deluje neto sila zaradi tlačnih razlik: $F = S[(p - \Delta p) - p] = -S\Delta p$. Na masno enoto je sila $F/m = -S\Delta p/\rho V = -\frac{1}{\rho}\Delta p/\Delta l$ – smer proti nižjemu tlaku. Za poljubno smer upadanja zračnega tlaka nadomestimo $-\frac{1}{\rho}\Delta p/\Delta l$ z $-\frac{1}{\rho}\text{grad}p = -\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}(\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial p/\partial z)$. Dobimo vektor sile na masno enoto zaradi prostorskih razlik zračnega tlaka:

$$\vec{f}_{\text{gr}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Vertikalna komponenta te sile je vzgon na masno enoto: $f_{\text{vzg}} = -\frac{1}{\rho}\partial p/\partial z$, horizontalni komponenti pa sta vzrok za vetrove.

V višinah trenja skorajda ni, kajti okrog dela zraka, ki se giblje z vetrom, se z enako hitrostjo gibljejo tudi sosednji deli zraka – vsi približno enako, torej nič trenja med njimi. Tako se tam vzpostavlja ravnovesje med silo zaradi tlačnih razlik in Coriolisovo sistemske silo:

$$\left| -\frac{1}{\rho}\nabla_z p \right| = f v_g,$$

ter, upoštevajoč še smeri:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_z p = f\vec{k} \times \vec{v}_g.$$

Oznaka \vec{v}_g pomeni geostrofsko hitrost, oznaka z pa pomeni $z = \text{konst.}$ S pomočjo enotskega vektorja \vec{k} , ki kaže navpično navzgor, v smeri $-\vec{g}$, smo opisali smer specifične Coriolisove sile: pravokotno na smer vetra in nasprotno smeri specifične sile gradienta tlaka. Ker je Coriolisov učinek posledica vrtenja Zemlje, imenujemo namreč to ravnotežje geostrofsko ravnotežje (v stari grščini *Gea* – Zemlja, *strophe* – obrat). Na severni polobli piha veter v višinah, kjer ni trenja, tako da je nizek tlak na levi od smeri gibanja in tja kaže sila zaradi gradienta tlaka, Coriolisova sistemska sila pa kaže v nasprotno smer – v desno od smeri hitrosti.

Končno torej lahko utemeljimo, zakaj hočemo meriti zračni tlak absolutno točno na desetinko ali dve desetinki milibara. Pri hitrosti vetra 10 m s^{-1} je velikost $f v = 10^{-3} \text{ N kg}^{-1}$. Torej se vzpostavlja ravnovesje pri specifičnih silah okrog $10^{-3} \text{ N kg}^{-1}$. Pri kakšnih tlačnih razlikah dobimo to vrednost? Pri gostoti zraka $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ je za takšno vrednost potrebna tlačna razlika $|\frac{\Delta p}{\Delta z}| = 10^{-3} \text{ N m}^{-3} = 10^{-3} \text{ P m}^{-1} = 1 \text{ mbar}/100 \text{ km}$. Samo 1 mbar različni tlaki na 100 km razdalje, pa piha veter s hitrostjo $10 \text{ m s}^{-1} = 36 \text{ km/h}$. Če je npr. nad Ratečami zračni tlak za samo 0,1 mbar višji kot na isti višini nad Ljubljano, to že pomeni veter $1 \text{ m s}^{-1} = 3,6 \text{ km/h}$. Morebitne napake pri merjenju zračnega tlaka utegnejo povzročiti sicer relativno majhne napake pri tlaku, toda pomembne napake pri oceni vetrov.

Še to: ker se zračni tlak dosti močneje spreminja v višino kot po horizontali, moramo za horizontalne sile upoštevati tlačne razlike na isti višini. Tlake pa merimo npr. v Ljubljani na višini okrog 300 m, v Ratečah pa na višini 900 m. Da ju lahko medsebojno primerjamo, ju moramo preračunati na isto višino – dogovorjeno je, da na morski nivo. To neizogibno prinese napake: saj ne vemo, kolikšna masa zraka bi bila pod Ratečami ali pod Ljubljano tja do morskega nivoja. Kadar je mraz, je zrak gost in je v 300 ali 900 m debeli plasti večja masa zraka, kot kadar je vroče in je zrak redek. Sploh pa: kako gost bi bil zrak pod nami, če bi tam sploh bil? Saj tega sploh ne vemo! Saj ga ni: spodaj je 300 ali 900 m peska, skal ... Zato je dogovorjeno, da tlak preračunavamo na morski nivo samo, če meritev ni bila opravljena na preveliki nadmorski višini. Tako se izognemo vsaj prevelikim napakam.

Geopotencial in še enkrat vetrovi

Vreme se dogaja »tam zgoraj« v troposferi, tja do višine okrog 11 km (nad tropi več, nad polarnimi predeli manj). S teh višin nočemo preračunavati zračnega tlaka na morski nivo – neizogibna napaka bi bila namreč nesprejemljivo velika. Računanju sile zaradi tlačnih razlik preko $\nabla_z p$ poiščemo

alternativo – preko gradienta težnostnega potenciala, ki mu rečemo tudi geopotencial.

V prejšnjem poglavju smo silo zaradi prostorskih razlik v tlaku definirali z negativnim gradientom tlaka po horizontali. Če je ploskev $p = \text{konst.}$ nagnjena, na njej ni nobenih tlačnih razlik, so pa razlike višin oz. težnostnih potencialov. Veter namreč lahko obravnavamo tudi preko gradienta geopotenciala delov zraka z enakim tlakom $\nabla_p(gz)$, za poznavanje katerega moramo poznati, kako visoko nad tlemi je neki tlak ter kakšen je tam lokalni g .

Obravnava prostorskih ali časovnih razlik med spremenljivkami na ploskvi $p = \text{konst.}$ zahteva malo pazljivosti. Meteorologi (pa tudi oceanografi) namesto neodvisne spremenljivke z sploh radi uporabljajo kako drugo odvisno spremenljivko kot vertikalno koordinato – najpogosteje $p(x, y, z, t)$. Po goj za tako uporabo je, da je ta spremenljivka monotono odvisna od višine, da torej lahko višino povsem enolično izrazimo kot $z = z(x, y, p(x, y, z, t), t)$. Parcialne odvode poljubne spremenljivke A po katerikoli od spremenljivk x , y ali t lahko izrazimo s pomočjo posrednega odvajanja, npr. za odvajanje po x : $\frac{\partial A}{\partial x_z} = \frac{\partial A}{\partial x_p} + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_z}$. Za $\frac{\partial p}{\partial x_z}$ pa velja še $\frac{\partial p}{\partial x_z} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_p}$, zato $\frac{\partial A}{\partial x_z} = \frac{\partial A}{\partial x_p} + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_p}$; pri tem oznaki z in p pomenita odvajanje vzdolž ploskev konstantne višine z ali konstantnega tlaka p . Ker velja enak način tudi za odvajanje po y , velja torej tudi za gradient vzdolž ploskve $p = \text{konst.}$, torej: $\nabla_p A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_p z$. Ko to povsem splošno pravilo² za pretvorbo gradienta iz enega v drug sistem uporabimo za vertikalno koordinato p , seveda uporabimo hidrostatično ravnotežje $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$. Kadar nas zanima gradient tlaka ($A = p$), velja še $\nabla_p p = 0$ in $\frac{\partial p}{\partial p} = 1$. Tako ostane $0 = \nabla_z p + 1 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_p z = \nabla_z p - \rho g \nabla_p z$. Ker g ni konstanten, ampak se po prostoru spreminja, tudi na g uporabimo operator ∇_p , na gostoti ρ pa zato ne, ker je to gostota zraka na tistem mestu, za katero nas zanima sila nanj zaradi tlačnih razlik v njegovi okolici:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_z p = -\nabla_p g z.$$

Horizontalna sila zaradi tlačnih razlik se na ploskvi $p = \text{konst.}$ izraža z gradientom težnostnega potenciala na tej ploskvi: sila od tam, kjer ima neki p višji potencial, tja, kjer je potencial nižji. Pa še ena prednost je: ni

²Ni nujno, da je vertikalna koordinata p , lahko je še kakšna druga – npr. potencialna temperatura $\Theta = T(p_{\text{ref}}/p)^{R/c_p}$, $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$, ki je za zrak invarianta, če se le giblje adiabatno (kar je v višinah skoraj vedno res). Pretvorba poleg za parcialne odvode po kraju – po x in po y – velja tudi za parcialni odvod po času t .

se nam treba spraševati, kakšna je tam gostota ρ zraka – ta pri geostrofskem ravnotežju na ploskvi $p = \text{konst.}$ sploh ne nastopa:

$$-\nabla_p g z = f \vec{k} \times \vec{v}_g.$$

Navajeni smo, da tekočine po navadi tečejo po največji strmini navzdol proti nižji potencialni energiji. Zrak v ozračju na vrteči se Zemlji pa teče drugače – Coriolisova sistemska sila ga odklanja na severni polobli v desno (na južni pa v levo) – pravokotno na gradient težnostnega potenciala. Geopotencial gz je za geostrofsko hitrost torej vektorski potencial v rotacijskem, brezdivergentnem vetrovnem polju: $\vec{v}_g = \frac{1}{f} \vec{k} \times \nabla_p g z$.

Kolikšne napake lahko pri oceni vetrov povzročijo morebitno neupoštevanje tega, da se g spreminja sem in tja po Zemlji – predvsem zaradi vrtenja Zemlje, torej zaradi $g = g(\varphi)$. Velikost hitrosti vetra ocenimo iz

$$|v| = \frac{|\nabla_p(gz)|}{f}.$$

Tudi f se spreminja z geografsko širino, saj je definiran kot $f(\varphi) = 2\Omega \sin \varphi$. Za oceno spreminjanja g vzemimo samo prva dva člena vrste: $g(\varphi) = g_0(1 + c_1 \sin^2 \varphi \dots)$. Ocenimo spremembo hitrosti zaradi teh dveh vplivov (pisanje absolutnih vrednosti opustimo):

$$\begin{aligned} \frac{\delta v}{v} &= \frac{\delta[\nabla_p(gz)]}{\nabla_p(gz)} - \frac{\delta f}{f} = \frac{\delta[g\nabla_p z + z\nabla_p g]}{fv} - \frac{\delta f}{f} = \\ &= \frac{\delta g \nabla_p z + g \delta(\nabla_p z) + \delta z \nabla_p g + z \delta(\nabla_p g)}{fv} - \frac{\delta f}{f} = \frac{\delta g \nabla_p z + z \delta(\nabla_p g)}{fv} - \frac{\delta f}{f}. \end{aligned}$$

Pri tem smo ob zadnjem enačaju privzeli, da višino z in njen gradient $\nabla_p z$ poznamo točno, da je torej $\delta z = 0$ in $\delta(\nabla_p z) = 0$. Upoštevajmo še, da se f in g spreminjata samo z geografsko širino, da je razdalja proti severu $\delta y = r \delta \varphi$ in da torej velja $\delta f = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi$ in $\delta g = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \delta \varphi$ ter $\nabla_p g = \frac{\partial g}{r \partial \varphi}$ ter zato $\delta(\nabla_p g) = \frac{\partial^2 g}{r(\partial \varphi)^2} \delta \varphi$:

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \varphi} \delta \varphi \nabla_p z + z \frac{\partial^2 g}{r(\partial \varphi)^2} \delta \varphi}{f|v|} - \frac{\delta f}{f}.$$

Prispevke k relativnim spremembam hitrosti lahko torej ocenimo preko vrednosti odvodov funkcij $f(\varphi)$ in $g(\varphi)$. Ko to storimo za primerne vrednosti višine in njenega gradienta (kar tukajle preskočimo), se pokaže, da je neizogibno treba upoštevati odvisnost $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ – o tem se prepričajo študenti meteorologije že pri prvem uvodnem predmetu svojega študija. Člen z drugim

odvodom $\frac{\partial g}{(\partial \varphi)^2}$ v zmernih geografskih širinah vsekakor lahko zanemarimo, upoštevanje $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ pa utegne biti koristno. Poglejmo!

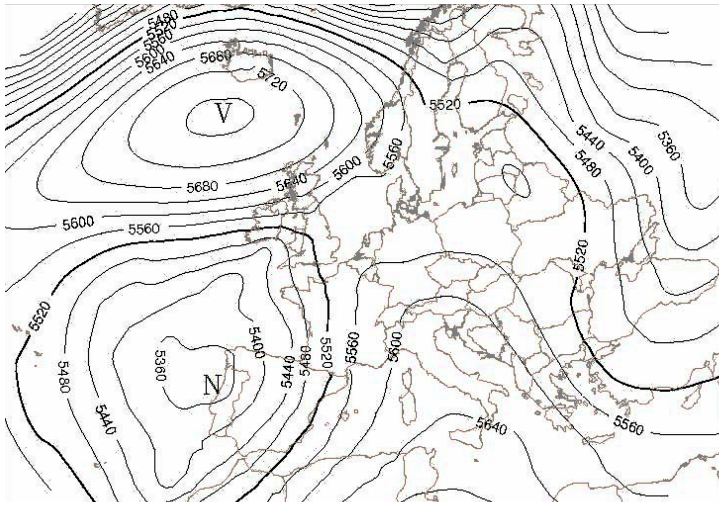
Da ne ostanemo samo pri načelnih analitičnih ocenah, si oglejmo sliko 2, ki prikazuje razporeditev geopotenciala 500 milibarske ploskve za neki primer ciklona (na sliki N) zahodno od Portugalske pri 40° geografske širine in anticiklona (na sliki V) kakih 2400 km severneje, južno od Islandije pri 62° geografske širine (napoved za 4 dni vnaprej za 13. februar 2017, s prijaznostjo ARSO). Ne glede na to, koliko kak model za napoved vremena upošteva (ali ne upošteva) krajevne razlike g – predvsem odvisnost od geografske širine $g(\varphi)$ – vzemimo, da so pri sliki 2 upoštevane in torej narisane geopotencialne višine $Z = \frac{g(\varphi)z}{g_0}$, to so s povprečnim g_0 normalizirane vrednosti geopotenciala (zato, da so številsko primerljive z višinami z). Pri 40° geografske širine na sliki vidimo zaključeno izolinijo $g(\varphi)z/g_0 = 5360$ m, tam sta $f = 0,935 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ in $g(\varphi) = 9,802 \text{ ms}^{-2}$ in težnostni potencial $g(\varphi)z = g_0 \cdot 5360 \text{ m} = 52564 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Pri 62° geografske širine pa je zaključena izolinija $gz/g_0 = 5740$ m, tam sta $f = 1,284 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ in $g(\varphi) = 9,821 \text{ ms}^{-2}$ ter geopotencial $g(\varphi)z = g_0 \cdot 5740 \text{ m} = 56290 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Pravi $\nabla_p g(\varphi)z = 0,00155 \text{ ms}^{-2}$ in iz tega izračunana povprečna hitrost³ vzhodnika od Velike Britanije na zahod $14 \text{ ms}^{-1} = 50 \text{ kmh}^{-1}$. Če pa ne bi upoštevali pravih lokalnih vrednosti $g(\varphi)$, pa bi za $\nabla_p g_0 z$ dobili za 2,6 % manjšo vrednost in posledično tudi za 2,6 % nižje hitrosti vetra.

Zakaj si ne moremo privoščiti nekaj odstotkov napake pri vetru? Saj 2,6 % ni zelo veliko, sploh pa – zakaj je točno poznavanje vetra »tam zgoraj« sploh važno? Recimo, da se nekeje pri vetru »zmotimo« za par odstotkov navzgor, drugje pa dol. S tem povzročimo lažne horizontalne razlike v vetru in s tem lažne divergence ali konvergence v vetrovnem polju. Horizontalna divergenca v polju hitrosti vetra je pri vremenskih sistemih velikih razsežnosti (kot npr. na sliki 2) po navadi zelo majhna⁴ – reda velikosti 10^{-6} s^{-1} . Tok zraka v prostem ozračju teče skorajda brezdivergentno in horizontalno divergenco (konvergenco) kompenzira vertikalna konvergenca (divergenca). Lažne horizontalne konvergence ali divergence zaradi napak pri določanju vetra zato pomenijo lažno dviganje ali spuščanje zraka nad predelom konvergence mbar in lažno spuščanje pod njo⁵. To pa je za vreme zelo zelo

³Povprečna hitrost bi veljala ob povsod enaki velikosti gradienta geopotenciala med središčema ciklona in anticiklona. Dejansko je gradient zahodno od Irske precej večji (goste izolinije) in je zato tam veter precej močnejši kot južneje in severneje.

⁴Vzemimo obsežen raven tok proti severu. Tedaj pri spremembi komponente hitrosti v proti severu za samo 1 ms^{-1} na razdalji 1000 km dobimo za $\nabla_{\text{hor}} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial y}$ velikostni red 10^{-6} s^{-1} .

⁵Meteorolog Philip Thompson, poročnik ameriškega vojaškega letalstva, se je pred le-



Slika 2. Napoved Evropskega centra za srednjeročno napoved vremena (ECMWF) geopotencialnih višin ploskev 500 mbar za štiri dni vnaprej (s podatki 9. februarja 2017) veljavna za ponedeljek, 13. februarja 2017. Slika je bila dobljena od Agencije Republike Slovenije za okolje (ARSO) in nekoliko predelana.

bistveno: ob dviganju se zrak adiabatno ohlaja, lahko pride do kondenza, do oblakov in do padavin. Ob spuščanju pa je obratno – adiabatno segrevanje, nič kondenza, torej jasno nebo. Zato je potrebno tudi horizontalno gibanje zraka poznati kolikor je le mogoče točno – če ne, se lahko namesto napovedane jasnine dejansko pojavi dež, ali pa obratno.

Itd.

Pri opisih tega, da so posledice razlik g sem in tja po Zemlji kar pomembne, smo morali vsaj glede oblike Zemlje ter pri dogajanjih v ozračju poseči v precejšnje podrobnosti iz geodezije in gravimetrije ter dinamične meteorologije.

tom 1946 pri »Projektu divergenca« na UCLA mučil z izračunavanjem divergence. Nekaj mesecev je mozgal, kako bi se dalo dovolj natančno izračunati horizontalno divergenco, ki je zgolj majhna razlika, samo majhen ostanek, ko se delno izenačita dva nasprotujoča si učinka konfluente tokovnic in povečevanja hitrosti vzdolž toka. Kar ostane, je tako majhno, da je reda velikosti napake zaokroževanja. Zato je avstrijski meteorolog, fizik in kemik Max Margules (1856–1920) o poskusih napovedi vremena na ta diagnostični način že pol stoletja prej (leta 1904) opozoril, da to ne bi šlo in naj bi celo rekel, da bi bili: »... nemoralni in škodljivi za dostojanstvo meteorologa.« Kasneje je se Thompson pridružil Julu Charneyu, Johnu von Neumanu in drugim pri prvi uspešni napovedi vremena s pomočjo determinističnih prognostičnih enačb z računalnikom ENIAC [10].

So pa še kakšne posledice razlik med gravitacijo in težo in posledično razlik g sem in tja po Zemlji, ki jih poznajo in takoj razumejo tudi dijaki – npr. točnost ure z nihalom. Če namreč nihalo lahko uporabimo kot dokaj natančen gravimeter (poglavje Bolj natančno: Zemlja je geoid), potem tudi ura z nihalom ne bo točna na neki drugi lokaciji, kjer je g drugačen.

A bodi dovolj – za to, da so razlike med težo in gravitacijo lahko pomembne, smo navedli dovolj primerov.

Za konec

Na vrteči se Zemlji je torej teža nekoliko različna od gravitacije – sicer malo, a nekatere posledice razlik med težo in gravitacijo so kar pomembne. Zato naj nas ne zavede podobnost med izrazoma v angleščini: gravity in gravitation. V drugih jezikih te podobnosti in skušnjave za zamenjavo ni: nemško Gewicht in Gravitation, francosko poids in gravitation, špansko in italijansko peso in gravitación, gravitazione, rusko tjažest, toda, gravitácija ...

Torej recimo in pišimo teža, kadar gre za zemeljsko privlačnost, gravitacija pa, kadar gre za gravitacijo!

Zahvala

Kolegoma s Fakultete za gradbeništvo in geodezijo UL doc. dr. Kuharju in prof. dr. Stoparju se zahvaljujem za komentarje v zvezi z geoidom ter Agenciji Republike Slovenije za okolje (ARSO) za dovoljenje za uporabo slike 2.

LITERATURA

- [1] J. Rakovec in T. Vrhovec, *Osnove meteorologije za naravoslovce in tehnike*, Ljubljana, DMFA – založništvo, 2017.
- [2] <https://sl.wikipedia.org/wiki/Te%C5%BEnost>, ogled: 10. 2. 2017.
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_gravity_formula, ogled: 10. 2. 2017.
- [4] https://fr.wikipedia.org/wiki/WGS_84, ogled: 10. 2. 2017.
- [5] [https://sl.wikipedia.org/wiki/Skorja_\(geologija\)](https://sl.wikipedia.org/wiki/Skorja_(geologija)), ogled: 10. 2. 2017.
- [6] <http://fgg-web.fgg.uni-lj.si/~mkuhar/pouk/FG/FG-Gravimetri-tisk.pdf>, ogled: 10. 2. 2017.
- [7] http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_gis.html, ogled: 10. 2. 2017.
- [8] <https://sl.wikipedia.org/wiki/Geoid>, ogled: 10. 2. 2017.
- [9] https://issuu.com/mfoski/docs/geodetski_dan_2015, ogled: 10. 2. 2017.
- [10] P. Lynch, *The Emergence of Numerical Weather Prediction – Richardson’s Dream*, Cambridge Univ Press, 2006, xii+279 pp.

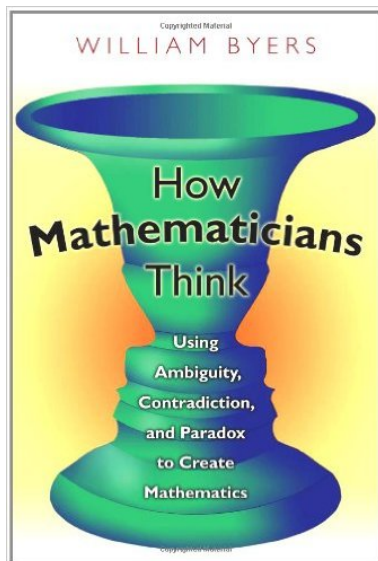
William Byers, How Mathematicians Think, Princeton University Press, Princeton, 2007, 415 strani.

Simpatična in zanimiva knjiga (iz danes v svetu vse bolj priljubljenega žanra esejistično filozofskih refleksij o matematiki) osvetljuje celo matematikom samim razmeroma skrivnosten in ne povsem racionalno razložljiv *proces nastajanja matematike*. Ta proces praviloma ni linearen, ampak vijugav in poln stranpoti in slepih ulic.

Avtor je, po lastnih besedah, želel podati opis oziroma filozofijo matematike, ki bi bila konsistentna z matematično prakso in ne bi bila samo množica nekih apriornih prepričanj o njej (str. 13). Ta »zakulisna« podoba matematike v njenem nastajanju je precej drugačna od »javnosti namenjene« podobe dovršenega matematičnega teksta.

Prototip matematičnega besedila, ki je vpeljal mit o matematiki kot vedi o večnih resnicah, izhajajočih v brezhibernem sosledju iz preprostejših osnovnih definicij, aksiomov in postulatov, so bili Evklidovi Elementi. Takšen strogo logičen način prezentacije matematike so mnogi največji matematiki v zgodovini imeli za najboljšega možnega. Praviloma je zelo pomemben v pedagoški praksi (pouk v razredu), žal pa ne daje nikakršne informacije oziroma ne pokaže realistične podobe o dejanskem procesu matematičnega raziskovanja, odkrivanja in ustvarjanja (to zgodovinsko dimenzijo matematike, iz katere se da veliko naučiti tudi o reševanju problemov, je zainteresiranim učencem in dijakom smiselno približati v okviru matematičnih krožkov).

Avtor zagovarja tezo, da temeljni gradniki matematične misli (vsaj v procesu nastajanja matematike) niso ne *aksiomi*, ne *definicije*, ne *izreki*, ampak *ideje*, in da je brezhibno organizirana logična struktura že dovršenih matematičnih teorij (ki se praviloma izkristalizira šele po daljšem času), do neke mere zavajajoča (še posebej, če je oropana zgodovinskih referenc in poročil o razvoju določenega področja), saj so ključne prvine v procesu kristalizacije matematičnih idej v njihovo izčiščeno obliko: *dvoumnost*, *protislovje* in *paradoks* (ki vsaj na prvi pogled nikakor ne sodijo v čvrsto logično strukturo že dovršenih matematičnih zgradb).



To svojo tezo (pa tudi, kaj natančno pojmuje pod zgoraj imenovanimi prvinami) Byers zelo natančno (in zato mestoma nekoliko dolgovezno) pojasnjuje in ilustrira s številnimi primeri, pa tudi referencami na relevantno literaturo.

Obširni razlagi, kaj natančno pojmuje pod temi prvinami, avtor posveti prvi del knjige. Najprej razgali naivnost in nevzdržnost prepričanja, da logična struktura določenega matematičnega področja povzema njegovo bistvo. Pravi (str. 25), da sicer mnogi matematiki na vprašanje, kaj dejansko počenjajo, odgovorijo, da samo *dokazujejo izreke*: »I just prove theorems.«), po drugi strani pa da se mnogi matematiki odmikajo od tega formalističnega stališča in si (tako kot znanstveniki z drugih področij) prizadevajo za nekaj pomembnejšega od kopičenja znanja oziroma »odgovorov«, za *razumevanje*.

Byers postavi *dvoumnost* v samo središče matematičnega ustvarjanja. Verjame, da bo sprejetje tega pogleda prineslo »*paradigmatični premik v našem razumevanju narave matematike*«. Celo najbolj elementarne trditve v matematiki, kot je npr. $1 + 1 = 2$, so, navkljub vsej svoji jasnosti in natančnosti, vsebinsko mnogo bogatejše, skrivnostnejše in dvoumnejše, kot se to zdi površnemu opazovalcu. Da je celo pojem enakosti, eden najbolj elementarnih konceptov v matematiki, vsebinsko mnogo bogatejši, kot si navadno mislimo, kaže npr. Einsteinova enačba $E = mc^2$ (ki je, kot pravi David Bodanis, ki je o njej napisal celo knjigo, pokazala, da energije ni mogoče najti le v dotlej znanih oblikah – kemični, toplotni, magnetni itd. – ampak tudi tam, kjer je dotlej nihče ni iskal: v snovi sami).

Pisec knjige »*Kako razmišljajo matematiki*« definira dvoumnost najprej kot »*situacijo ali idejo, ki je zaznavana skozi dva, sama po sebi konsistentna, vendar pa vzajemno izključujoča se referenčna okvira*« (str. 28). Ob tem, ko nam predstavlja različne matematične koncepte in trditve (npr. enakost $1 = 0,999\dots$, kjer je matematični *objekt* – število, izenačen z rezultatom *procesa* – seštevanja neskončno mnogo števil) »skozi leče dvoumnosti«, nam obenem ponazarja, kaj dejansko razume pod tem pojmom. Tako, pravi, je npr. dvoumen pojem spremenljivke v enačbi, kot je npr. $2x = 4$: ali x pomeni *katerokoli* število (tako namreč razmišljamo o spremenljivki na začetku reševanja), ali le rešitev enačbe $x = 2$?

Po njegovem mnenju je dvoumna tudi narava *nič*a (za katerega pravi, da je mnogo širši pojem kot samo *število nič*). Nič kot simbol nečesa, česar ni, zlasti v indijski tradiciji, kjer je ta koncept prvotno nastal, obsega bogato hierarhijo različnih pomenov. Iznajdba števila nič oziroma *ničle* kot simbola zanj je bila pomemben mejnik v zgodovini matematike.

Dvoumnost vsebuje po eni strani koherenco, po drugi pa protislovje. Matematika je po Byersovem mnenju neločljivo povezana s človeško izkušnjo, ta pa je neposredno zapletena v različna protislovja; posledično so protislovja neločljiv del matematike (vsaj tiste v nastajanju). Paradoksi so

trditve, ki se zdijo absurdne ali protislovne, pa so vendarle (lahko) resnične. Imajo svoje negativne (absurdnost) in pozitivne vidike (lahko so resnični iz nekega novega zornega kota). Veliko paradoksov v matematiki je povezanih z neskončnostjo, najdemo jih tudi v geometriji, teoriji množic in infinitezimalnem računu (že sama narava infinitezimalov se zdi paradoksalna, saj gre za pozitivne količine, manjše od poljubnega pozitivnega števila, takšnih pa med realnimi števili ni). Paradokse se da »razrešiti« ali bolje »ukrotiti« na različne načine, vendar pa izbor določene interpretacije paradoksnе situacije kot take ne odpravi. Tako npr. nikoli ne bomo do konca izčrpali skrivnosti in paradoksov v zvezi z neskončnostjo (str. 145).

Drugi del knjige je posvečen *matematičnim idejam – temeljnim gradnikom matematične misli*. Kot pravi avtor, globoke ideje izvirajo iz dvoumnih, problematičnih, konfliktnih situacij, ki vsebujejo elemente, ki na prvi pogled ne sodijo skupaj, ne pa iz površnega preurejanja in logičnega strukturiranja nekih že dobro razumljenih dejstev. »Ideja se pojavi kot odgovor na tenzijo, ki je rezultat konflikta, inherentnega v dvoumnosti.« Deluje kot *organizirajoče, generativno, dinamično načelo*, ki – podobno kakor magnet uredi železne opilke v svojem magnetnem polju – koherentno organizira določeno matematično situacijo in razreši napetost med dvema protislovnima referenčnima okviroma, ki sta povzročala njeno dvoumnost.

Čeprav je matematični dokaz lahko izjemno dolg in vključuje natančne izračune in subtilne logične argumente, pogosto temelji na presenetljivo enostavni matematični ideji, ki je osnova za vse delo oziroma izdelovanje podrobnosti. Ideje so v samem središču matematike. Globoke ideje je težko odkriti. Kadar se pojavijo, matematiki poskušajo izžeti iz njih toliko posledic, kot je le mogoče. Dragoceni so tudi zametki idej, ki še niso popolnoma razvite.

Vendar pa je ideje treba tudi preveriti (z dokazi, izračuni itd.) oziroma preizkusiti njihovo uporabnost, morda jih tudi posplošiti ali modificirati. Kot pravi Byers: »*Matematična praksa vključuje interakcijo med idejami in logično strogostjo*.« Dodaja še, da je pomembnost matematičnih idej pogosto prezrta, ker je logična struktura očitnejša in jo je lažje obvladati, da pa so matematične ideje vendarle »*glavni igralci na odru matematične aktivnosti*«. Zato so, pravi, na Harvardu v zadnjih letih organizirali »Seminar o temeljnih pojmih«, kjer vsak teden obravnavajo neko osrednjo matematično idejo, ki se pojavlja na različnih področjih matematike.

Kot primer plodne matematične ideje Byers navaja »*idejo teleskopiranja*«, zgoščeno ponazorjeno v (le ob določenih pogojih veljavnem) »dokazu« formule za vsoto geometrijske vrste: Če je $S = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$, potem je $aS = a^2 + a^3 + a^4 + \dots$ in $S - aS = a$ ter $S = \frac{a}{1-a}$. Raziskovanje, kdaj je ta ideja veljavna, vodi še do mnogih drugih vprašanj, kot so npr.: kaj je vsota neskončne vrste, kaj je konvergenca itd. Ideja teleskopiranja,

izražena v formuli $(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$, je tudi v ozadju osnovne formule integralnega računa.

Mnogo matematičnih idej sestoji iz prepoznavanja določenega »vzorca«, kot npr. v rezultatih $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$. Ko poskušamo natančno izraziti, »kaj se dogaja tukaj«, lahko eksplicitno formuliramo hipotezo, da je »vsota prvih n lihih števil enaka n^2 .« Seveda pa je treba to hipotezo še preveriti s takšnim ali drugačnim dokazom, npr. z matematično indukcijo, ali pa z novo bistroumno idejo – opažanjem, da lahko zaporedna liha števila $1, 3, 5, 7, \dots$ predstavimo geometrijsko z množicami točk, razporejenih v obliki črke L kot na spodnji sliki:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \\ c & c & c & d \\ d & d & d & d \end{bmatrix}$$

Že angleški matematik G. H. Hardy (1877–1947) je v svoji znani »*Matematičkovi apologiji*« postavil tezo, da je matematik, podobno kot slikar ali pesnik, ustvarjalec vzorcev, pri čemer pa so ti vzorci trajnejši od vzorcev kateregakoli drugega umetnika, saj so stkani iz idej. Prepoznavanje vzorcev, pa tudi generiranje vzorcev, sta v sami srži inteligence. Kot pravi Byers, je morda matematika tako zelo uspešna na vseh področjih človekove aktivnosti prav zaradi svoje sposobnosti prepoznavanja in generiranja vzorcev. Odnos med dvoumnostjo in idejo v matematiki primerja z odnosom med oviro in premaganjem ovire.

Čeprav matematične ideje niso urejene v strogo hierarhijo, so nekatere ideje enostavnejše od drugih. Med tipične »elementarne« ideje (ki obstajajo še celo onstran matematike ali pred umestitvijo vanjo) uvršča npr. koncepte, kot so »ena«, »dve« in »enakost«. Tako je že platonist Plotin zapisal: »*Ena je absolutno prvo načelo vsega.*« Ena in sorodni koncept enosti sta dvoumna koncepta, ki se uporabljata v dveh različnih in konfliktnih pomenih: bodisi za izražanje enote, ločenosti, posebnosti, individualnosti, različne od vseh drugih, bodisi za izražanje enosti različnih delov, harmonično združenih v večjo celoto. Koncept števila »dve« izraža najenostavnejše možno strukturiranje oziroma diferenciranje celote. Že psiholog C. G. Jung je poudarjal, da sodijo majhna naravna števila med najbolj temeljne ideje, ki strukturirajo tako zunanji svet narave kot tudi naš notranji svet. Sposobnost prepoznavanja moči majhnih razredov objektov brez štetja je tako rekoč položena v zibelko že otrokom.

Byers pravi, da je določena kompleksnost celo v tako preprostih konceptih oziroma elementarnih idejah, kot je npr. ideja enakosti (ki ni sinonim za idejo identičnosti). Tako sta npr. izraza » $3 + 2$ « in » $4 + 1$ « sicer oba enaka 5, imata pa še neko notranjo strukturo in v določenih kontekstih nista

ekvivalentna (tako npr. v kombinatoriki dejansko razlikujejo med različnimi razčlenitvami naravnega števila n na manjša naravna števila).

Med nekoliko zahtevnejšimi, a še vedno temeljnimi idejami Byers podrobno obravnava npr. idejo zveznosti, ki nastopa celo v tako duhovito formuliranih izrekih, kot je npr. »izrek o palačinki« (angl. pancake theorem), ki pravi, da se da vsako palačinko razrezati na dva ploščinsko enaka dela z enim samim rezom (str. 236). Stroga formalizacija ideje zveznosti v obliki znane epsilon-delta formulacije zveznosti funkcije je bila rezultat dolgega zgodovinskega razvoja. Sama ideja zveznosti je bila najprej implicitno vsebovana v evklidski geometriji.

Byers poudarja, da imajo mnoge pomembne matematične ideje obliko analogije, pa tudi metafore in interpretacije. Infinitesimalni račun je npr. mogoče razumeti tudi kot proces linearne aproksimacije, ki nam pomaga pri »linearizaciji« problemov.

V tretjem, morda najglobljem in najzanimivejšem delu knjige se avtor ukvarja z nekoliko bolj filozofskimi temami oziroma vprašanji, kot npr: *Kaj je resnica v matematiki? Je objektivna ali subjektivna (obstoječa le v človeškem umu)?* Poroča o izkušnjah vrhunskih matematikov (od Poincareja do Wileasa), ki so po dolgotrajnem, na videz brezplodnem trudu do določenih svojih odkritij prišli nepričakovano, tako rekoč v trenutku, in so se obenem tudi z gotovostjo zavedali, da so njihovi vpogledi resnični, »kot bi se prižgala luč v temni sobi«. Sama *verifikacija* rezultata (formalni dokaz izreka) ni isto kot *razumevanje* (zakaj je neki izrek resničen). Do matematične resnice vodijo ideje, ne logika. Celoten proces ustvarjanja matematike kaže interaktivno povezanost idej in dokazov.

Četudi v knjigi ne bomo našli kakšnih presenetljivih matematičnih rezultatov, za katere dotlej ne bi vedeli, pa nam lahko način gledanja na matematiko, ki ga ponuja ta knjiga, odpre oči za drugačno, širše, bogatejše razumevanje matematike, med drugim za spoznanje, da »*vsebine matematike ne moremo dokončno ločiti od tega, kako je matematika ustvarjana in razumljena.*« Za bralca, ki ga ob matematiki zanima tudi njena filozofija (in aplikacije te filozofije na poučevanje matematike), je dragocen tudi kratek pregled različnih zornih kotov, iz katerih je mogoče gledati na matematiko: *platonizma, formalizma in konstruktivizma*, pa tudi avtorjev pogled na matematiko, ki tudi kot celota premore dvojno, dvoumno naravo: po eni stvari je ustvarjana (subjektivna), po drugi odkrivana (objektivna).

Knjiga *How mathematicians Think* od bralca zahteva nenehno pripravljenost za opuščanje starih, preveč poenostavljenih prepričanj o matematiki, in za sprejemanje novih, bolj prilagojenih dejanski matematični praksi.

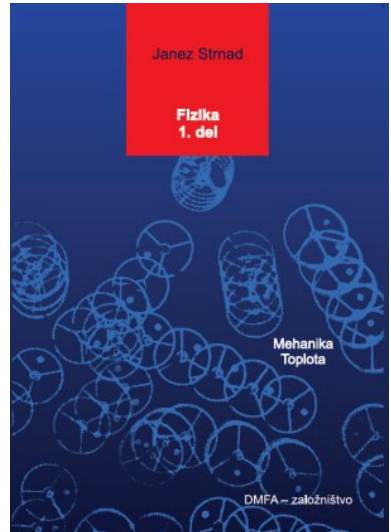
Jurij Kovič

Janez Strnad: Fizika 1. del: Mehanika, toplota, 2. izdaja, DMFA – založništvo, 2017, 344 strani.

Pri založbi DMFA – založništvo je izšla prenovljena izdaja visokošolskega učbenika »Fizika 1«, prvega v nizu štirih učbenikov, ki obsegajo klasično in moderno fiziko. Učbenik je napisal prof. Janez Strnad. Fizika 1 je v prvi vrsti namenjena študentom prvega semestra študijskega programa Fizika. Učbenik je nastal po predavanjih na Fakulteti za matematiko in fiziko. Po drugi svetovni vojni so fiziko na predhodnicah te fakultete v prvem letniku predavali profesor Anton Peterlin, profesor Anton Moljk in profesor Ivan Kuščer. Oblikovali so zasnovo predavanj in zbirko učil. Fizika 1 se naslanja na oboje. Nanjo pa so izdatno vplivali tudi nekateri novejši tuji učbeniki.

Imela je več predhodnic, ki so doživele več izdaj. Prva tiskana izdaja je izšla leta 1977, v kasnejših izdajah pa je bila večkrat preslikana. Pri tem so bile spremembe in popravki minimalni. Ponatisi so postajali vse slabši in dozorel je čas, da se knjigo popolnoma osveži. Zasnova učbenika ostaja povčini enaka starejšim izdajam, spremenjeni so le nekateri odstavki in nekaj besedila je dodanega na novo. Knjiga je razdeljena na dela Mehanika in Toplota, v uvodu pa je dodano poglavje o merjenju in računanju s fizikalnimi količinami. Na koncu je dodan odstavek Mednarodni sistem merških enot SI. Knjiga se konča s seznamom domačih in tujih učnih knjig ter abecednim kazalom. Fiziki 1 se pozna, da je nastala po predavanjih. Na začetku je manj zahtevna kot proti koncu. Nekatere težje ali manj pomembne odstavke na začetku in na koncu zaznamuje zvezdica. V knjigi ni posebnih nalog. Te najdejo bralci v eni od zbirk. Izida učbenika avtor žal ni dočakal, vendar je pripravil besedila namenil svoje zadnje fizične moči z njemu lastnim žarom. Prof. Strnad je bil fiziki in poučevanju fizike iskreno predan in to se kaže tudi v vsebini učbenika.

Učbenik je, kot rečeno, v prvi vrsti namenjen študentom fizike, kot dopolnilno gradivo je primeren za vse druge študente in boljše srednješolce, kot referenčno delo, tudi z jezikovnega vidika, pa ga bomo uporabljali tudi starejši bralci.



Aleš Mohorič

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ FIZIKE

O fizikalnih društvenih izdajah v Obzorniku za matematiko in fiziko že nekaj časa nismo pisali, zato si bomo tokrat ogledali nekaj novejših naslovov v omenjeni zbirki.

V sodelovanju z Oddelkom za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in kasneje Fakultete za matematiko in fiziko je v tej zbirki izšlo že veliko naslovov, tako da danes zaporedno številčenje izdaj v zbirki že presega številko 50. Pri tem seveda niso všteti vsi ponatisi in popravljene izdaje, teh je bilo bistveno več. Vse trenutno razpoložljive knjige v zbirki in cenik izdaj lahko najdemo tudi na spletni strani <http://www.dmfa-zaloznistvo.si/zipf/>.

M. Rosina: JEDRSKA FIZIKA, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 3, DMFA–založništvo, Ljubljana 2016, 240 strani.

Knjiga JEDRSKA FIZIKA je nastajala postopoma kot zapis predavanj za slušatelje 4. letnika. Predavanja so dala splošno izobrazbo o dogajanjih in problemih pri atomskem jedru, obenem pa so rabila kot uvodno predavanje tistim, ki so se posvetili fiziki jedra in osnovnih delcev. Pri izbiri snovi je odločala zlasti nazornost pojavov in njihova pedagoška pripravnost za opis osnovnih konceptov. Poseben pomen je imela (in še vedno ima) **jedrska fizika** kot zgled za razumevanje in uporabo kvantne mehanike, zlasti problema več teles. Razumevanje **jedrske fizike** pa je važno tudi iz praktičnih razlogov, saj na lastnostih jeder in pojavih v jedrih temeljijo mnoga moderna fizikalna merjenja od atomske fizike do medicine ter pridobivanje energije z razcepom urana in z zlitjem težkega vodika.

Knjiga je doživela tri natise (1969, 1977 in 1981), ki so pošli. Zato se je avtorju zdelo vzpodbudno pripraviti novo izdajo, saj se je razumevanje jeder tačas ustalilo in je vredno osnove zakoličiti kot odskočno desko za nove zelo specifične raziskave. Učbenik je kratek, ker je danes odmerjenih jedrski fiziki le malo ur predavanj, za »kodranje možganov« pa sta dandanes zelo primerni tudi hadronska fizika in fizika osnovnih delcev. Ta primanjkljaj v učnem programu pa lahko odlično dopolni koncizen učbenik jedrske fizike, po katerem seže bralec po potrebi.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po ceni 17,00 EUR.

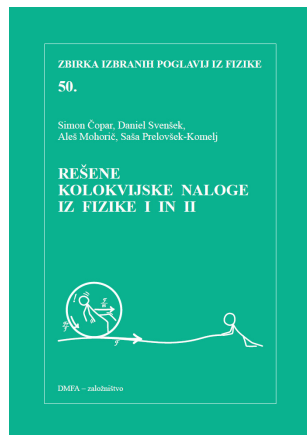


S. Čopar, D. Svenšek, A. Mohorič, S. Prelovšek Komelj: REŠENE KOLOKVIJSKE NALOGE IZ FIZIKE I IN II, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 50, DMFA–založništvo, Ljubljana 2016, 128 strani.

Vsako leto se nova generacija študentov sooča z računskimi nalogami iz fizike, ki so znaten in pomemben del študija fizike v prvem letniku. Študenti jih rešujejo sami ali pa ob pomoči asistentov na vajah. Tako je pred leti že izšla zbirka *B. Majaron, M. Mikuž in A. Ramšak: Kolokvijske naloge iz fizike I*, v kateri so zbrane naloge in številne rešitve, nabor nalog pa iz leta v leto raste in se dopolnjuje.

Zbirka obsega kolokvije in izpite iz obdobja 2008/09–2014/15, ko se je predmet Klasične fizike izvajal v obliki dveh ločenih enosemestrskih predmetov Fizika I in Fizika II, kar se kaže tudi v zgradbi zbirke. Iz obdobja teh sedmih let smo zbrali 58 kolokvijev ali izpitov s skupno 190 nalogami.

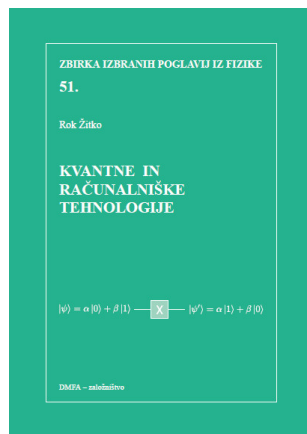
Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po ceni 12,50 EUR.



R. Žitko: KVANTNE IN RAČUNALNIŠKE TEHNOLOGIJE, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 51, DMFA–založništvo, Ljubljana 2017, 224 strani.

Namen učbenika je dodiplomskim študentom naravoslovnih in tehničnih ved z osnovnim znanjem matematike in fizike predstaviti osnove kvantne mehanike in fizike trdnih snovi ter tako omogočiti razumevanje delovanja in izdelave sodobnih in prihajajočih računalniških in komunikacijskih naprav, senzorjev in bodočih kvantnih tehnologij. Nivo obravnave osnovnih pojavov in zakonitosti je dokaj podroben, vendar brez strogih dokazov in dolgih izpeljav. Kljub potrebi po vpeljavi številnih novih matematičnih pojmov, predvsem pri obravnavi kvantne teorije, je poudarek na fizikalnih pojavih in njihovi interpretaciji, manj pa na matematičnem formalizmu.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po ceni 16,00 EUR.



Uredništvo

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 63 (2016)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Obtežena povprečja in paradoks prijateljstva (Brigita Ferčec in Niko Tratnik)	1–9
Običajni in eksotični hadroni (Saša Prelovšek Komelj)	10–17
Borsuk-Ulamov izrek (Katja Kelvišar)	41–52
Gravitacijski valovi (Aleš Mohorič in Andrej Čadež)	53–63
Matrično konveksne množice (Igor Klep)	81–99
Loksodrome na krožnem torusu (Marko Razpet)	121–131
Uporaba Hallovega izreka (Tanja Gologranc)	132–138
Abel-Ruffinijev izrek preko zank in permutacij (Rok Gregorič)	161–174
Verjetnost, da urina kazalca oklepata določen kot (Luka Grahelj)	175–179
Thomas Young in njegov znameniti poskus (Andrej Likar)	180–186
Računanje kvadratnega korena (Marko Razpet)	201–209
Möbiusova zanka in $\int Rac(x, \sqrt{X(x)}) dx$ (Ivan Pucelj)	210–218
O teži in gravitaciji (Jože Rakovec)	219–231

Šola — School

Matematične sposobnosti pri otrocih: nekaj vrojenega, nekaj pridobljenega, a vedno lahko vir zadovoljstva (Tina Bregant)	18–24
--	-------

Intervju — Interview

Pogovor s profesorjem Josipom Grasselijem (Damjan Kobal)	100–113
--	---------

Vesti — News

V spomin profesorju Janezu Strnadu (Aleš Mohorič)	25–27
V spomin profesorju Jožetu Grasseliju (Milan Hladnik)	28–29
Profesor Mitja Rosina – osemdesetletnik (Zvonko Trontelj in Bojan Golli)	30–33
Obvestilo (Matej Brešar)	33
Vabilo (Matej Brešar)	33
Strokovni seminar Delo z matematično nadarjenimi učenci (Lara Kozarski)	34–37
V spomin profesorici Snegulki Detoni (Neformalna zveza slovenskih fizičark)	64–65

7. evropski kongres matematike v Nemčiji (Boštjan Kuzman)	66–69
FMF seminar za učitelje matematike (Hanka Lebič)	70–71
Srečanje evropskih matematičark v Berlinu (Marjeta Kramar Fijavž) ..	114–115
Triindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega)	139–143
Strokovno srečanje in 68. občni zbor DMFA (Nada Razpet in Janez Krušič)	144–148
Bojana Dvoržak, prejemnica priznanja DMFA Slovenije (Nada Razpet)	149
Matematične novice (Peter Legiša)	150–154
Bojan Mohar je prejemnik Eulerjeve medalje (Sandi Klavžar)	187–188
Izredni, 69. občni zbor DMFA (Nada Razpet in Janez Krušič)	188–189
Letno kazalo	240–XXIII

Nove knjige — New books

Miklós Bóna, A walk Through Combinatorics (Jurij Kovič)	38–III
Bor Plestenjak, Razširjen uvod v numerične metode (Jernej Kozak)	72–75
Marius Overholt: A Course in Analytic Number Theory (Jurij Kovič) .	76–VII
Carlo Rovelli, Sedem kratkih lekcij iz fizike (Alojz Kodre)	116–117
Ibrahim Aganović, Krešimir Veselić, Matematičke metode i modeli (Jure Kališnik)	117–118
Leo Corry, A Brief History of Numbers (Jurij Kovič)	118–XI
Stephen G. Krantz, Mathematical Publishing (Jurij Kovič)	155–159
W. S. Anglick, J. Lambek, The Heritage of Thales (Jurij Kovič)	160–XV
Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving (Jurij Kovič)	190–192
Lee C. F. Sallows, Geometric Magic Squares, A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers (Nada Razpet) ...	193–196
Barry Mazur in William Stein, Prime numbers and the Riemann hypothesis (Aleksander Simonič)	197–199
Janez Strnad, Mala zgodovina Dopplerjevega pojava (Aleš Mohorič)	200–XIX
William Byers, How Mathematicians Think (Jurij Kovič)	232–236
Janez Strnad: Fizika 1. del: Mehanika, toplota (Aleš Mohorič)	237
Zbirka izbranih poglavij iz fizike (uredništvo)	238–239

<http://www.obzornik.si/>

VSEBINA

Članki	Strani
Računanje kvadratnega korena (Marko Razpet)	201–209
Möbiusova zanka in $\int Rac(x, \sqrt{X(x)}) dx$ (Ivan Pucelj)	210–218
O teži in gravitaciji (Jože Rakovec)	219–231
Nove knjige	
William Byers, How Mathematicians Think (Jurij Kovič)	232–236
Janez Strnad: Fizika 1. del: Mehanika, toplota (Aleš Mohorič)	237
Zbirka izbranih poglavij iz fizike (uredništvo)	238–239
Vesti	
Letno kazalo	240–XXIII

CONTENTS

Articles	Pages
Square root computing (Marko Razpet)	201–209
Möbius loop and $\int Rac(x, \sqrt{X(x)}) dx$ (Ivan Pucelj)	210–218
On gravity and gravitation (Jože Rakovec)	219–231
New books	232–239
News	240–XXIII

Na naslovnici: Odmiki višin globalnega geodia EGM2008 (Earth Gravitational Model) od rotacijskega elipsoida, kot jih je v prostorski ločljivosti 2,5 kotne minute izračunala skupina iz U. S. National Geospatial – Intelligence Agency (NGA). Rdeča barva pomeni odmike navzgor (do +90 m), modra pa odmike navzdol (do –110 m). Iz http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_gis.html, (glej članek na straneh 218–230).