PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 1
Strani 34–42

Janez Strnad:

ALI SE ZEMLJA GIBLJE?

Ključne besede: fizika, astronomija, planeti, gibanje, Newtonovi zakoni, Keplerjevi zakoni.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1208-Strnad.pdf

ALI SE ZEMLJA GIBLJE?

Začnimo razmišljati s pomočjo *Keplerjevih zakonov* (glej zapis o Keplerju v Preseku **21**, 136) v *krožnem približku*:

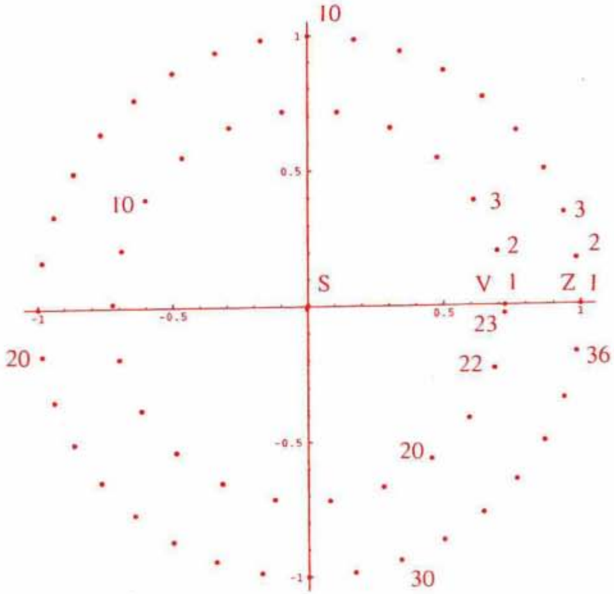
1. Planet se giblje po krogu, v središču katerega miruje Sonce.
2. Planet enakomerno kroži.
3. Kub radija kroga je sorazmeren s kvadratom obhodnega časa planeta.

Pri tem merimo razdalje v oddaljenosti Zemlje od Sonca r_z, to je v astronomskih enotah, in čase v obhodnih časih Zemlje t_z, to je v letih. V razpravo vključimo poleg Sonca in Zemlje še Venero, ki se kot *notranji planet* okoli Sonca giblje v manjši oddaljenosti kot Zemlja. V preglednici astronomskih podatkov preberemo, da je $r_v = 0,723 r_z$ in $t_v = 0,615 t_z$. (Drugi podatek lahko izračunamo iz prvega s tretjim Keplerjevim zakonom $r_z^3/t_z^2 = r_v^3/t_v^2$.) Manjši oddaljenosti planeta od Sonca ustreza manjši obhodni čas.

Ponazorimo gibanje Zemlje in Venere z grafom na osnovi prvega Keplerjevega zakona. Sonce postavimo v izhodišče. Zemlja se giblje okoli Sonca po krogu z radijem r_z. Pri risanju si pomagamo s časovnimi razmiki $t_z/36$. Tolikšen časovni razmik približno ustreza desetim dnem ali premiku Zemlje za $1/36$ kroga, torej loku nad kotom 10°. Po času t_z, to je po 36 časovnih razmikih ali po 365 dneh, se Zemlja vrne v začetno lego. Venera se giblje po krogu z manjšim radijem r_v s krajšim obhodnim časom t_v, tako da se v časovnem razmiku približno desetih dni premakne za $1/36 \cdot 0,615$ kroga, torej za lok nad kotom $16,3^\circ$. Na začetku Venero postavimo na isto stran Sonca kot Zemljo. Venera se vrne v začetno lego po $365 \cdot 0,615$, to je 224,5, dneh. (Graf vsebuje lege le za prvih 22 časovnih razmikov, to je za 220 dni; risba bi postala nepregledna, če bi vrisali še poznejše lege.) Tako opišemo gibanje planetov v *heliocentični sliki*, kjer privzamemo, da miruje Sonce (slika 1).

Ko neposredno opazujemo gibanje Sonca in Venere z Zemlje, pa se nam zdi, da miruje Zemlja. Zasledujmo gibanje Sonca in Venere v *geocentrični sliki*, v kateri miruje v izhodišču Zemlja. Za vsak trenutek vnesemo v graf lego Sonca, Zemlje in Venere s prejšnje risbe, a Zemljo vselej premaknemo v izhodišče (slika 2). Ugotovimo, da Sonce kroži okoli Zemlje po krogu z radijem r_z z obhodnim časom t_z v nasprotni smeri, kot v heliocentrični sliki kroži Zemlja okoli Sonca.

Gibanje Venere je precej bolj zapleteno. Z grafa je mogoče naravnost razbrati oddaljenost Venere od Zemlje, saj se ta ujema z oddaljenostjo od



Slika 1. Gibanje Zemlje in Venere v heliocentrični sliki. Sonce miruje v izhodišču. Zemlja in Venera krožita okoli njega. Točke kažejo lege planetov v časovnih razmikih po približno desetih dneh. Ob nekaterih od njih je navedena zaporedna številka. Sliko je dobil računalnik s programom *Mathematica*. Enačbe so nakazane na koncu prispevka.

izhodišča. Na začetku je oddaljenost najmanjša in po okoli 58 časovnih razmikih, to je po okoli 580 dneh, je zopet tolikšna. Po polovici tega časa, to je po okoli 290 dneh, pa je oddaljenost največja. Ni težko ugotoviti, da najmanjšo oddaljenost določa razlika $r_Z - r_V$ in največjo vsota $r_Z + r_V$. Venera je v *spodnji konjunkciji* s Soncem, ko je v najmanjši razdalji od Zemlje, med Zemljo in Soncem, in v *zgornji konjunkciji*, ko je v največji razdalji, ko je Sonce med Zemljo in Venero. Čas okoli 580 dni ali 1,6 leta, ki poteče med dvema spodnjima konjunkcijama in v katerem se ponovi Venerina lega glede na Zemljo in Sonce, imenujemo *sinodski obhodni čas* Venere T_V. Za razliko od njega pravimo obhodnemu času okoli Sonca t_V glede na zvezde *siderični obhodni čas*. Po njem se Venera vrne v isto lego v ozvezdju, v katerem smo jo začeli opazovati.

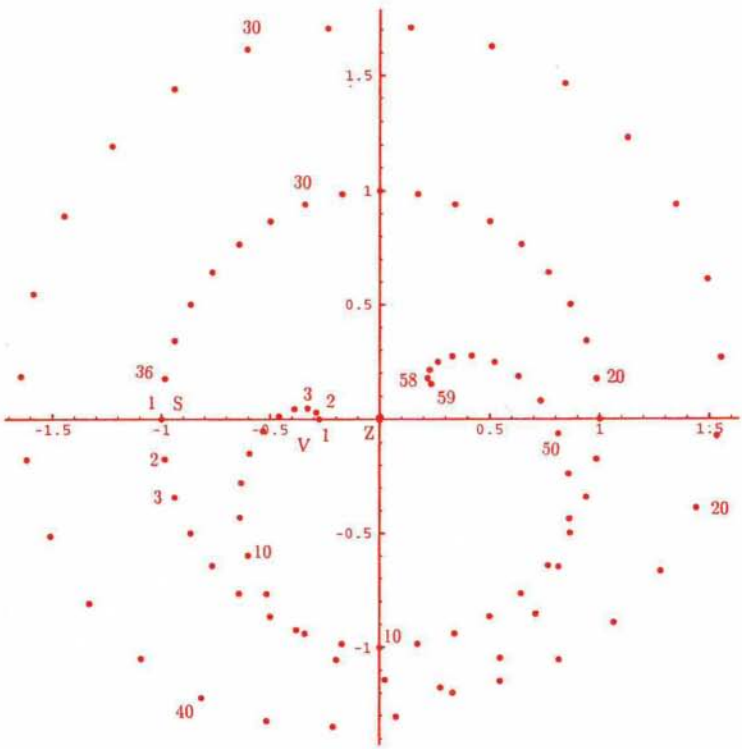
Ali se Zemlja giblje ali ne? Dokler samo opazujemo gibanje, lahko uporabimo heliocentrično sliko, v kateri miruje Sonce, ali geocentrično, v kateri miruje Zemlja. Nobena od obeh ne nasprotuje drugi. Te enakovrednosti slik pa je konec, brž ko gibanje pojasnimo z osnovnimi zakoni mehanike. Pri tem mislimo na *Newtonove zakone*:

1. Telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje drugo telo s silo.

2. Sila je masa krat pospešek.

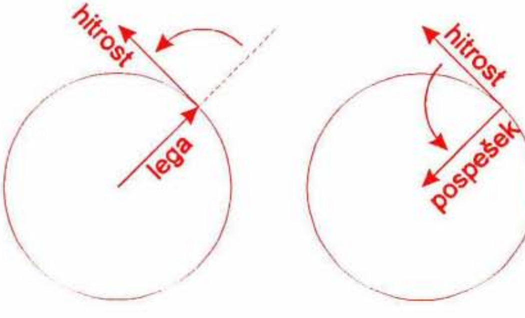
3. Če deluje prvo telo na drugo s silo, deluje drugo na prvo z nasprotno enako silo.

S *silo* opišemo delovanje telesa na telo in v njej vidimo vzrok za spremembo hitrosti.



Slika 2. Gibanja Sonca in Venere v geocentrični sliki. Zemlja miruje v izhodišču, Sonce kroži okoli nje, Venera pa se giblje bolj zapleteno. Graf lahko sestavimo iz grafa na sliki 1 tako, da ob vsakem časovnem razmiku premaknemo Zemljo v izhodišče, ali ga damo izračunati računalniku. Točke ustrezajo po času točkam na sliki 1.

V drugem zakonu se pojavi pospešek, zato je treba poiskati pospešek teles v našem primeru. Najprej pribijmo, da je enakomerno kroženje pospešeno gibanje. Velikost hitrosti telesa se sicer ne spreminja, a spreminja se njena smer. Pri risanju prvega grafa smo ugotovili, da se planet giblje pravokotno na zveznico s Soncem. Hitrost, ki jo vpeljemo kot spremembo lege, to je premik telesa, deljeno z ustreznim časovnim razmikom, je tangentna na zveznico planeta in Sonca. Pospešek vpeljemo kot spremembo hitrosti deljeno z ustreznim časovnim razmikom. Kot dobimo pospešek iz hitrosti, dobimo hitrost iz lege. Puščico, ki določa lego, moramo zasukati za pravi kot, da dobimo puščico, ki kaže smer hitrosti. Puščico, ki določa hitrost, moramo zasukati za pravi kot, da dobimo puščico, ki določa pospešek (slika 3). Pospešek Zemlje in Venere je potemtakem v vsaki legi planeta usmerjen proti Soncu. Sonce miruje in njegova hitrost in pospešek sta enaka nič. Pospeške, ki smo jih ugotovili v heliocentrični sliki, je mogoče uskladiti z Newtonovimi zakoni. Pospešek planeta namreč povzroča privlačna sila Sonca na planet - *gravitacija* - v smeri od planeta proti Soncu.



Slika 3. Pri enakomernem kroženju dobimo iz hitrosti pospešek, kot dobimo iz lege hitrost. Puščice kažejo krajevni vektor, vektor hitrosti in vektor pospeška. Enačbe so nakazane na koncu prispevka. Puščice so enako dolge, če izberemo $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

V geocentrični sliki smo lego telesa dobili tako, da smo za vsak trenutek od lege telesa v heliocentrični sliki odšteli lego Zemlje. S tem dosežemo, da Zemlja miruje v izhodišču. Tudi pospešek telesa v geocentrični sliki dobimo s podobnim prijemom: od pospeška telesa v heliocentrični sliki odštejemo pospešek Zemlje. V geocentrični sliki je pospešek Zemlje enak nič. V tej sliki je pospešek Sonca enak negativnemu pospešku Zemlje v heliocentrični sliki, se pravi, da kaže proti Zemlji. V geocentrični sliki je pospešek Venere zapleten: sestavljata ga dva dela - pospešek proti Soncu in negativni pospešek Zemlje v heliocentrični sliki. Prvi del kaže proti Soncu, drugi od Zemlje proti Soncu. V geocentrični sliki zagotovo ne velja drugi Newtonov zakon ne za Sonce ne za Zemljo in ne za Venero. Glede Newtonovih zakonov zato geocentrična slika ni enakovredna heliocentrični. Newtonovi zakoni veljajo v koordinatnem sistemu, ki ga uporabimo v heliocentrični sliki, ne veljajo pa v koordinatnem sistemu, ki ga uporabimo v geocentrični.

Včasih slišimo pripombo, da drugi Newtonov zakon vsebuje prvega in je prvi odveč. Zares je pri sili nič pospešek enak nič in se telo giblje premo enakomerno ali miruje. V našem primeru pa vidimo, da je prvi zakon potreben. Z njim preskusimo, ali imamo opraviti s koordinatnim sistemom, v katerem moremo uporabiti drugi Newtonov zakon, ali ne. Drugi Newtonov zakon velja le, če koordinatni sistem ni pospešen. Njegovo izhodišče se ne sme gibati pospešeno (in koordinatni osi se ne smeta vrteti). Takemu koordinatnemu sistemu pravimo, da je *inercialen*. Koordinatni sistem v heliocentrični sliki je inercialen, koordinatni sistem v geocentrični pa ni, je pospešen, ker smo izhodišču naložili pospešek Zemlje.

Geocentrična slika nas privede do misli, da je mogoče razširiti drugi Newtonov zakon tako, da velja tudi v neinercialnem koordinatnem sistemu. Drugi zakon se v inercialnem koordinatnem sistemu glasi: sila drugih teles na opazovano telo da z maso pomnoženi pospešek opazovanega telesa. Dodajmo na desni strani pospešek telesa v neinercialnem sistemu, na levi strani pa silo, ki izvira od pospeška sistema. Tej sili pravimo *sistemska sila*. Od sil, s katerimi merimo delovanje telesa na telo, se razločuje po tem, da ne moremo navesti, od katerega telesa izvira. Preskusimo prirejeni Newtonov zakon v pospešenem koordinatnem sistemu v geocentrični sliki: na levi se dodatno pojavi z maso telesa pomnoženi negativni pospešek Zemlje, na desni strani pa prav tolikšna sistemska sila. Sila Sonca na Zemljo v heliocentrični sliki je usmerjena proti Soncu v središču kroga, je *centripetalna*; sistemska sila na Sonce v geocentrični sliki je usmerjena od središča kroga, *je centrifugalna*.

Zdaj povejmo še nekaj o poenostavitvah in približkih. Tretji Newtonov zakon - zakon o vzajemnem učinku - zahteva, da delujeta Zemlja in Venera na Sonce, če deluje Sonce na njiju. V razpravo moramo vključiti še druge planete. Sonce se zaradi njihovih sil giblje pospešeno. Zaradi zelo velike mase Sonca v primeri z maso planetov, pa je pospešek Sonca zelo majhen v primeri s pospeški planetov. Izhodišče koordinatnega sistema bi morali postaviti v težišče Osončja, če bi hoteli biti natančni. Vendar bi bil tudi to približek, čeprav boljši, ker se težišče giblje s še manjšim pospeškom vsaj zaradi kroženja Galaksije.

Tako kot Sonce deluje na planet z gravitacijo, deluje tudi planet na drugi planet z gravitacijo. Sila planeta na planet pa je tako majhna, da jo lahko najprej opustimo in upoštevamo naknadno kot majhno motnjo, če zelo natančno obravnavamo gibanje planetov.

Zaradi obeh navedenih spoznanj prvi Keplerjev zakon velja samo približno, ker ne upošteva gibanja Sonca in sil drugih planetov na opazovani planet. Prvi Keplerjev zakon govori še o elipsi in ne o krogu kot naš približek. Vendar je za Venero in Zemljo krožni približek zelo dober. Njuna pot se zelo malo razlikuje od kroga: velika polos elipse je pri Zemlji za 14 stotisočin, pri Veneri pa samo za 2 stotisočini večja od male.

Na mestu je še nekaj zgodovinskih pripomb. Spočetka so astronomi stavili na geocentrično sliko, saj so zgolj opisovali gibanje planetov in Sonca. Na nebu se jim je zdelo mogoče samo enakomerno kroženje, ker lahko traja v nedogled. Samo posamezni astronomi, na primer Aristarh s Samosa v 3. stoletju pred našim štetjem, so pomislili na možnost, da v središču Vesolja ne miruje Zemlja, ampak Sonce. Aristarh je ocenil, da je oddaljenost Zemlje od Sonca precej večja od oddaljenosti Lune od Zemlje in je Sonce večje od Zemlje (glej Presek **15**, 22). Ali ni bolj naravno, da manjše telo kroži okoli večjega? Vendar ne on ne njegovi maloštevilni somišljeniki niso mogli omajati geocentrične slike.

Stari astronomi so vedeli, da z enim samim kroženjem ni mogoče opisati gibanja planeta, ki ga opazujemo. Zato so sestavili več kroženj in trdili, da planet enakomerno kroži po krogu, *epiciklu*, katerega središče enakomerno kroži okoli Sonca po drugem krogu, *deferentu*. S tem dobro pojasnimo geocentrično sliko v krožnem približku. Aleksandrijski astronom Klavdij Ptolemej iz 2. stoletja je povzel izpopolnjeno geocentrično sliko. Dodatnih zamisli pa v krožnem približku ni treba razčlenjevati. Omenimo samo to, da je med drugim Zemljo premaknil malo iz središča drugega kroga. S tem je pojasnil, zakaj od pomladanskega enakonočja do jesenskega preteče dobrih sedem dni več kot od jesenskega do pomladanskega. Tedaj so lego planetov merili na okoli šestino stopinje natančno, to je na tretjino kota, pod katerim vidimo premer Lune. V letih so se nakopičile razlike med napovedanimi in izmerjenimi legami planetov, ki jih je Ptolemej kar spregledal. Zaradi tega so ga nekateri današnji astronomi obdolžili goljufije. Vendar gre najbrž za to, da se je občutek za natančno kvantitativno gledanje le počasi razvijal. Aristarh je ravnal s podatki še precej slabše kot Ptolemej.

Poljskemu astronomu Nikolaju Koperniku je presedala zapletena Ptolemejeva geocentrična slika. Leta 1543 jo je v knjigi *O kroženju nebesnih teles* poskusil poenostaviti s kroženjem planetov okoli Sonca v heliocentrični sliki. To mu je samo delno uspelo, ker je moral obdržati še nekaj Ptolemejevih dodatkov. Danski astronom Tycho Brahe je leta 1583 predložil svojo vmesno sliko: Sonce kroži okoli Zemlje, drugi planeti pa krožijo okoli Sonca. Poleg tega je Brahe na šestdesetino stopinje, to je desetkrat natančneje kot Ptolemej, opazoval gibanje Sonca, Lune in planetov, posebno Marsa. Nemški astronom Johannes Kepler je na osnovi teh podatkov po skrbnem računanju leta 1609 objavil svoja prva zakona:

1. Planet se giblje po elipsi, v gorišču katere je Sonce.
2. Zveznica od Sonca do planeta pokrije v enakih časih enake ploščine.

Do njiju je přišel, ker - precej drugače kot Ptolemej - ni bil pripravljen spregledati razlike okoli osmine stopinje med napovedano in izmerjeno lego.

Za heliocentrično sliko se je močno zavzel Galileo Galilei, ki je prvi opazoval nebo z daljnogledom. Pri tem je med drugim odkril, da Venera kaže podobne mene kot Luna. Po tem je sklepal, da se Zemlja giblje okoli Sonca. Leta 1632 je izšla knjiga, v kateri je primerjal prednosti in slabosti heliocentrične in geocentrične slike in se dokaj nedvoumno odločil za prvo. Tega pa ne bi smel narediti. Cerkev ga je obtožila in moral je svoje trditve o gibanju Zemlje preklicati. Tedaj naj bi zamrmral "Vseeno se giblje". Šele pred dvema letoma so ga uradno rehabilitirali.

Vendar Galilei ni navedel prepričljivih razlogov za vrtenje Zemlje okoli osi in kroženje okoli Sonca. Mislil je, da dvojno gibanje Zemlje najprepričljiveje podpirata plima in oseka. Nastali naj bi, ker se v različnih točkah na Zemlji različno sestavita pospešek zaradi vrtenja in pospešek zaradi kroženja. Glede tega se je motil. Venerine mene pa je tudi mogoče pojasniti v Brahejevi sliki. Pojasniti jih je mogoče tudi v naši geocentrični sliki, saj smo rekli, da pri opisovanju gibanja ne zaostaja za heliocentrično. Toda Ptolemej je predvidel zgolj možnost, da je radij Venerinega epicikla manjši od radija deferenta in leži ves epicikel znotraj sončne poti. Po tem Venere ne bi mogli videti polne ali blizu ščipa, kar pa ne drži.

Za nadaljnji razvoj fizike so bila pomembna Galilejeva odkritja v mehaniki in Keplerjeva spoznanja o gibanju planetov. Iz njih so zrasli osnovni zakoni mehanike in gravitacijski zakon, ki jih je objavil Isaac Newton leta 1687. Pozneje so prišli na dan tudi pojavi, ki so neposredno podpirali misel o gibanju Zemlje. Leta 1728 je James Bradley z dolgim daljnogledom natančno opazoval lego zvezde blizu zenita. Slika zvezde je opisala v enem letu majhno elipso, ki je nastala zaradi seštevanja hitrosti Zemlje pri gibanju okoli Sonca in hitrosti svetlobe. Leta 1838 so prvič izmerili *paralakso* kake zvezde, to je polovico njenega navideznega premika proti ozadju bolj oddaljenih zvezd zaradi gibanja Zemlje okoli Sonca. Predvsem zaradi tega, ker v njegovem času še ni bilo mogoče izmeriti paralakse, je Brahe odklonil misel o gibanju Zemlje. Leta 1851 je Jean Foucault v pariškem Panteonu opazoval nihanje dolgega nihala. Navpična ravnina, v kateri je nihalo nihalo, se je zaradi vrtenja Zemlje zasukala za poln kot v 31 urah in 3/4 (Presek **18**, 80).

Kopernikova in Galilejeva zasluga je bila, da je prevladal novi pogled na svet. Zemlja ni središče Vesolja in človek ni odlikovano bitje, ki bi mu bila narava podrejena, ampak samo njen del. Pozneje so ugotovili še to, da Sonce ni v središču Galaksije, da je Galaksija ena izmed številnih galaksij in da Vesolje sploh nima središča.

Na koncu dodajmo še nekaj preprostih računov za tiste, ki jih veseli računanje.

	heliocentrična slika	geocentrična slika
Sonce	$(x_s, y_s) = (0, 0)$	$(x'_s, y'_s) = (-x_z, -y_z)$
Zemlja	$(x_z, y_z) = (r_z \cos(2\pi t/t_z), r_z \sin(2\pi t/t_z))$	$(x'_z, y'_z) = (0, 0)$
Venera	$(x_v, y_v) = (r_v \cos(2\pi t/t_v), r_v \sin(2\pi t/t_v))$	$(x'_v, y'_v) = (x_v - x_z, y_v - y_z)$.

Kvadrat oddaljenosti Venere od Zemlje

$$d^2(t) = (x_v - x_z)^2 + (y_v - y_z)^2 = x_v'^2 + y_v'^2 = r_v^2 + r_z^2 - 2r_v r_z \cos 2\pi(t/t_v - t/t_z).$$

Najmanjšo vrednost $d^2(T_v) = (r_z - r_v)^2$ doseže v času T_v in največjo $d^2(\frac{1}{2}T_v) = (r_z + r_v)^2$ v času $\frac{1}{2}T_v$. Kosinus je enak 1, ko je kot enak 2π, in enak -1, ko je kot enak π. Po tem ugotovimo, da je $T_v = t_v t_z/(t_z - t_v)$, in dobimo za Venero sinodski obhodni čas $T_v = 0,615$ leta$/(1 - 0,615) = 1,60$ leta.

Za enakomerno kroženje sta koordinati, komponenti hitrosti in komponenti pospeška določeni takole (slika 3):

$$(x, y) = r(\cos\omega t, \sin\omega t), \qquad (v_x, v_y) = \omega r(-\sin\omega t, \cos\omega t),$$
$$(a_x, a_y) = -\omega^2 r(\cos\omega t, \sin\omega t) = -\omega^2(x, y).$$

Pri tem je $\omega = 2\pi/t_o$ kotna hitrost in t_o obhodni čas.

Za planet velja drugi Newtonov zakon $(F_x, F_y) = m(a_x, a_y)$. Vanj vstavimo velikost privlačne sile po Newtonovem gravitacijskem zakonu $F = \kappa m m_s / r^2$ in dobimo:

$$-\kappa \frac{m m_s}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = -m\omega^2(x, y).$$

Pri tem je m masa planeta, m_s masa Sonca in $\kappa = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kgs^2}$ gravitacijska konstanta. Iz enačbe sledi tretji Keplerjev zakon v našem približku $\omega^2 r^3 = = 4\pi^2 r^3 / t_o^2 = \kappa m_s$. Količina na desni strani je za vse planete Osončja enaka. Iz zapisane enačbe lahko izračunamo na primer s podatkoma za Zemljo $t_o = 1$ leto $= 3{,}17 \cdot 10^7$ s in $r = 150$ milijonov km $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m maso Sonca: $m_s = 4\pi^2 r^3 / \kappa t^2 = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Janez Strnad