PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 5
Strani 271–273

Milena Strnad:

KVADRATNA ENAČBA PRI BABILONCIH

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Strnad.pdf

KVADRATNA ENAČBA PRI BABILONCIH

Današnji srednješolec se s kvadratno enačbo seznani v drugem letniku. Do nje pridemo, ko iščemo ničle kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$. Pri tem so a, b in c poljubna realna števila, le koeficient kvadratnega člena a mora biti različen od nič. Po tej poti pridemo do enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Do njenih rešitev se dokopljemo tako, da prva dva člena dopolnimo do popolnega kvadrata in uporabimo enačbo za razcep razlike kvadratov $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$:

$$a(x^2 + bx/a + c/a) = a((x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 + c/a) =$$

$$= a(x + b/2a - \sqrt{b^2 - 4ac}\,/2a)(x + b/2a + \sqrt{b^2 - 4ac}\,/2a) = 0$$

Od tod takoj dobimo dve rešitvi

$$x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \qquad x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

Ti sta realni in različni, če je izraz pod korenom večji od nič, ter realni in enaki, če je izraz pod korenom enak nič.

Ali ni presenetljivo, da so znali kvadratno enačbo rešiti že Babilonci sredi drugega tisočletja pred našim štetjem? To so ugotovili po babilonski klinopisni tablici, ki jo hranijo v Britanskem muzeju. Tablica vsebuje več nalog, ki ustrezajo reševanju kvadratne enačbe.

Razbiranje klinopisnih tablic je zahtevno opravilo, ker so Babilonci uporabljali šestdesetiški številski sistem, ker v zapisih niso ločevali celih mest od ulomkov in ker niso uporabljali matematičnih simbolov. Med številkami so sicer puščali razmike, niso pa poznali znaka, ki bi ustrezal naši decimalni vejici.

Tako število v šestdesetiškem sistemu 1 15 lahko prevedemo v desetiški sistem na dva načina

$$1.60^1 + 15.60^0 = 60 + 15 = 75$$

ali

$$1.60^0 + 13.60^{-1} = 1 + 15/60 = 1\,\tfrac{15}{60}$$

Da bi ločili ti dve možnosti, so sedanji raziskovalci klinopisnih tablic uvedli dvoje ločil, vejico in podpičje. Vejica loči mesti, podpičje pa ima vlogo naše decimalne vejice, na primer:

$$3,15,17 = 3.60^2 + 15.60^1 + 17.60^0 = 11\,717,$$

$$3,15;17 = 3.60^1 + 15.60^0 + 17.60^{-1} = 11\,717/60$$

$$3;15,17 = 3.60^0 + 15.60^{-1} + 17.60^{-2} = 11\,717/3600$$

Če na klinopisni tablici naletimo na zapis 3 15 17, se moramo odločiti za eno izmed teh možnosti. Pogosto je mogoče iz zveze razbrati, katero možnost je imel v mislih davni pisec. Vedno pa to ne uspe, posebno še, ker so nekatere tablice slabo ohranjene.

Kljub temu so strokovnjaki za klinopis na eni izmed tablic iz Britanskega muzeja razbrali pravilo za reševanje kvadratnih enačb. Pravilo je navedeno ob geometrijskem zgledu: "Odvzemi stranico od ploščine kvadrata, pa dobiš 14, 30." Po naše bi to zapisali kot $x^2 - x = 870$, saj je 14, 30 enako $14.60^1 + 30.60^0 = 840 + 30 = 870$.

Sledimo babilonskemu navodilu: "Vzemi koeficient 1 (pri stranici kvadrata), razdeli 1 na dva dela. Del 0; 30 pomnoži samega s seboj. Dobiš 0;15. To dodaj številu 14, 30. Število 14, 30; 15 je ploščina kvadrata s stranico 29; 30. Temu prištej 0; 30. Tako dobiš iskano stranico kvadrata 30."

Za bralce, ki bi si želeli utrditi znanje v reševanju kvadratnih enačb, navedimo še nekaj nalog s klinopisne tablice:

$$x^2 + x = 0;45$$
$$x^2 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{3}x = 1;20$$
$$x^2 - \tfrac{1}{3}x^2 + x = 4,46;40$$
$$x^2 + x + \tfrac{1}{3} = 0;55$$
$$11x^2 + 7x = 6;15$$

Rešijo jih lahko po babilonskem navodilu, ali pretvorijo število iz šestdesetiškega sistema v desetiški in računajo po naše. Vsebinski del prvotnih nalog je že prelit v naš algebrski zapis enačb, medtem ko so na desni po naše zapisana števila v šestdesetiškem številskem sistemu.

Prelijmo babilonsko navodilo v preglednejši zapis z enačbami. Levo so števila zapisana v šestdesetiškem, desno pa v našem, desetiškem sistemu.

$x^2 - x = 14,30$	$x^2 - x - 870 = 0$
$1 = 0;30 + 0;30$	$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$0;30 \times 0;30 = 0;15$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$0;15 + 14,30 = 14,30;15$	$\frac{1}{4} + 870 = 870\frac{1}{4}$
$29;30 \times 29;30 = 14,30;15$	$29\frac{1}{2} \times 29\frac{1}{2} = 870\frac{1}{4}$
$29,30 + 0,30 = 30$	$29\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 30$

Ali ni to rešitev naše enačbe za $a = 1$ in $c < 0$ in $b < 0$:

$$x_1 = \frac{1}{2} |b| + \sqrt{(\frac{1}{2} b)^2 + |c|}$$

Za babilonskega računarja je bilo reševanje kvadratne enačbe zahtevna naloga. Zapomniti si je moral vse korake na pamet, ne da bi poznal njihovo ozadje. Našim učencem je precej laže. Pravila, zapisanega s simboli, jim ni težko izpeljati, četudi bi ga pozabili. Iz tega tudi izhaja, da poučevanje samo z zgledi naredi matematiko še težjo. Res pa je, da se je ta način poučevanja uporabljal na nekaterih področjih matematike vse do našega stoletja.

Milena Strnad