IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2017
Letnik 64
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

IEA
Researching education, improving learning

TIMSS 2015
20 YEARS OF ACHIEVEMENT TRENDS

IEA TIMSS

TIMSS & PIRLS
International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

PEDAGOŠKI INŠTITUT

Državni izpitni center

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2017, letnik 64, številka 5, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledala Janez Juvan in Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

O TANGENSU, VSOTAH POTENC, EULERJEVIH IN BERNOULLIJEVIH ŠTEVILIH

MATJAŽ KONVALINKA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 05A05, 05A15

Eulerjeva števila so definirana preko alternirajočih permutacij, Bernoullijeva števila pa se enostavno izražajo z Eulerjevimi števili z lihim indeksom. V članku si ogledamo nekatere uporabe teh števil. Pojavljajo se namreč v razvoju tangensa in sekansa v potenčno vrsto, v formuli za vsoto potenc prvih nekaj naravnih števil in v vrednostih funkcije zeta.

ON TANGENT FUNCTION, SUMS OF POWERS, EULER AND BERNOULLI NUMBERS

We define Euler numbers via alternating permutations, and Bernoulli numbers as rational multiples of Euler numbers with an odd index. In this paper, we study some applications of these numbers. They appear as coefficients in the power series expansion of the tangent and secant functions, in the formula for the sum of powers of the first few integers, and in values of the zeta function.

Uvod: trigonometrične funkcije kot potenčne vrste

Predstavljajmo si, da ne vemo nič o trigonometriji, vemo pa dovolj o potenčnih vrstah oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, da jih znamo med seboj seštevati, množiti in členoma odvajati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \qquad \text{[seštevanje istoležnih koeficientov]} \tag{1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \qquad \text{[konvolucijsko množenje]} \tag{2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad \text{[odvajanje po členih]} \tag{3}$$

Tu so a_n koeficienti iz nekega obsega s karakteristiko 0, običajno $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Pri tem lahko na potenčne vrste gledamo kot na dejanske funkcije (se pravi: x, ki je po absolutni vrednosti manjši od *konvergenčnega polmera*, se preslika v limito delnih vsot; v tem primeru so (1)–(3) številske enakosti, ki veljajo na nekem območju) bodisi kot na formalne potenčne vrste (se pravi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je samo drug zapis za zaporedje $(a_n)_{n=0}^{\infty}$; v tem primeru so zgornje enakosti definicije operacij). Prvi način je običajen v analizi, drugi pa v kombinatoriki, obe gledišči pa imata svoje prednosti in slabosti. Za večino snovi, ki sledi, lahko račune formalno utemeljimo bodisi na en bodisi na drug način. V nadaljevanju se v podrobnosti ne bomo spuščali in bomo mirno seštevali, množili in odvajali vse potenčne vrste. Omenimo še, da konvolucijsko množenje uporabljamo tudi za množenje polinomov: na primer, koeficient pri x^3 produkta polinomov $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ in $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ je vsota $a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$.

Najpomembnejša potenčna vrsta je eksponentna funkcija:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots ;$$

tu je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ (preberemo: n fakulteta) in $0! = 1$. Eksponentna funkcija ima lepo lastnost, da je njen odvod enak funkciji sami: res, če je $a_n = 1/n!$, je $(n+1)a_{n+1} = (n+1)/(n+1)! = 1/n! = a_n$.

S pomočjo eksponentne funkcije zlahka definiramo sinus, kosinus, tangens in sekans:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Seveda je tu $i^2 = -1$. Pripomnimo, da kotangens in kosekans nista definirana v točki 0 in ju zato ne moremo razviti v potenčno vrsto okoli 0 (v jeziku formalnih potenčnih vrst bi rekli, da $\sin x$ nima inverza za množenje).

Za sode n velja $(ix)^n = (-ix)^n = (-1)^{n/2}x^n$, za lihe n pa $(ix)^n = -(-ix)^n = (-1)^{(n-1)/2}ix^n$, zato hitro izpeljemo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$$

Marsikatero dejstvo o trigonometričnih funkcijah sledi neposredno iz definicije (na primer $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). V razdelku Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in funkcija zeta bomo uporabili tudi nekaj lastnosti trigonometričnih funkcij, ki ne sledijo na očiten način iz zgornjih razvojev. Pripomnimo, da če na sinus in kosinus gledamo kot na funkciji, sta njuna konvergenčna polmera ∞, torej vrsti konvergirata za vsa realna oziroma kompleksna števila x.

Tri naloge

Videli smo, da imata sinus in kosinus enostaven razvoj v vrsto. Kaj pa tangens in sekans? Zapišimo

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ker je po definiciji

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \operatorname{tg} x &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\
&= a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{a_0}{2})x^2 + (a_3 - \tfrac{a_1}{2})x^3 + (a_4 - \tfrac{a_2}{2} + \tfrac{a_0}{24})x^4 + \cdots \\
&= \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots ,
\end{aligned}$$

lahko izračunamo nekaj začetnih členov: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2 - 1/6 = 1/3$, $a_4 = 0$ itd. Tako dobimo

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \frac{929569x^{15}}{638512875} + \cdots$$

in podobno

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \\ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \frac{50521x^{10}}{3628800} + \frac{540553x^{12}}{95800320} + \frac{199360981x^{14}}{87178291200} + \cdots$$

Takoj vidimo, da ima razvoj tangensa same lihe potence, sekansa pa same sode (to ni presenetljivo, saj je tangens liha funkcija, sekans pa soda). Ni pa očitno, kako bi izrazili posamezne člene v razvoju obeh funkcij. Lahko morda najdemo formulo za n-ti člen? Izkaže se, da preproste formule ni, obstaja pa lepa kombinatorična interpretacija koeficientov: to se pravi, koeficiente lahko izrazimo preko moči določenih množic.

Naloga 1. Poišči formulo za koeficiente v razvoju tangensa in sekansa v vrsto.

Nalogo bomo rešili v razdelku Alternirajoče permutacije in Eulerjeva števila.

Druga naloga je na videz povsem nepovezana s prvo. Verjetno vsi poznamo zgodbo o Carlu Friedrichu Gaussu (1777–1855), ki je kot otrok presenetil svojega učitelja, ko je izredno hitro seštel števila od 1 do 100 in ga tako prikrajšal za okrepčilen dremež med poukom. Gauss naj bi opazil, da lahko najprej seštejemo 1 in 100, potem 2 in 99, potem 3 in 98 itd. V vsakem primeru dobimo 101, vsot je 50, zato je skupna vsota $50 \cdot 101 = 5050$. Za splošen n se podobno ali pa z indukcijo lahko dokaže dobro znana formula

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Prav tako se z indukcijo lahko dokažejo podobne vsote

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
\sum_{j=1}^{n} j^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\
\sum_{j=1}^{n} j^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.
\end{aligned}$$

Videti je, da je vsota $\sum_{j=1}^{n} j^k$ polinom v spremenljivki n, ki se vedno začne s členoma $n^{k+1}/(k+1) + n^k/2$, ni pa očitno, kaj bi bili naslednji členi.

Naloga 2. Poišči formulo za vsoto k-tih potenc naravnih števil od 1 do n.

Nalogo bomo rešili v razdelku Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in vsote potenc.

Tretja naloga je nekoliko podobna drugi: tokrat nas zanimajo vsote negativnih potenc *vseh* naravnih števil od 1 naprej. Iz osnovne analize vemo, da harmonična vrsta

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

divergira, medtem ko vrste

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n}$$

konvergirajo za vse $n > 1$. Zelo znana je prelepa formula

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

velja pa tudi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} &= \frac{\pi^4}{90} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} &= \frac{\pi^6}{945} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^8} &= \frac{\pi^8}{9450}.\end{aligned}$$

Domnevamo lahko, da za $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2n}$ vselej dobimo zmnožek števila π^{2n} in nekega racionalnega števila.

Naloga 3. Poišči vsoto sodih negativnih potenc naravnih števil.

Nalogo bomo rešili v razdelku Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in funkcija zeta.

Izkaže se, da lahko rešitve vseh treh nalog izrazimo preko *Eulerjevih števil* ali z njimi tesno povezanih *Bernoullijevih števil*, ki jih bomo definirali v naslednjem razdelku.

Alternirajoče permutacije in Eulerjeva števila

Permutacija velikosti n je zapis števil $1, \ldots, n$ v nekem vrstnem redu. Primeri permutacij so tako $[1, 2, 3]$, $[4, 1, 3, 2]$, $[9, 8, 1, 2, 5, 7, 10, 6, 3, 4]$. Običajno to zapišemo brez oklepajev in vejic (števila nad 10 v tem primeru damo v oklepaj), torej 123, 4132 in 981257(10)634. Vseh permutacij velikosti n je $n!$; za $n = 3$ so to 123, 132, 213, 231, 312 in 321.

Permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ je *alternirajoča*, če velja $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \ldots$ Število vseh alternirajočih permutacij velikosti n označimo z E_n in imenujemo *Eulerjevo število* (tudi *Eulerjevo cikcak število*). Velja $E_0 = 1$ (prazna permutacija je na prazno alternirajoča), $E_1 = 1$ (edina permutacija velikosti 1 je prav tako na prazno alternirajoča), $E_2 = 1$ (edina alternirajoča permutacija velikosti 2 je 21), $E_3 = 2$ (alternirajoči permutaciji velikosti 3 sta 213 in 312), z računalnikom lahko hitro preverimo še $E_4 = 5$, $E_5 = 16$, $E_6 = 61$, $E_7 = 272$ itd.

Eulerjeva števila se imenujejo po švicarskem matematiku Leonhardu Eulerju (1707–1783). Pripomnimo še, da obstajajo tudi *eulerska števila*, ki tudi štejejo permutacije z neko lastnostjo.

Za Eulerjeva števila ni znana nobena enostavna formula; brez dokaza povejmo, da se lahko izračunajo preko dvojne vsote

$$E_n = i^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-2j)^{n+1} (2i)^{-k} k^{-1},$$

kjer je $i^2 = -1$.

Eulerjeva števila se lahko izračunajo tudi preko precej lepše rekurzivne formule (lema 1), s pomočjo katere lahko dokažemo naš glavni izrek (izrek 2). Ta izrek reši nalogo 1, hkrati pa bo osnova za reševanje nalog 2 in 3.

Lema 1. *Za $n \geq 1$ velja*

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

Dokaz. Če velja $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \pi_4 > \ldots$, rečemo, da je permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ *obratno alternirajoča*. Obratno alternirajoči permutaciji velikosti 3 sta tako 231 in 132. Enostavno je videti, da je alternirajočih in obratno alternirajočih permutacij velikosti n enako mnogo: permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ je alternirajoča natanko tedaj, ko je njen obrat $\pi' = (n+1-\pi_1, \ldots, n+1-\pi_n)$ obratno alternirajoča permutacija. Z drugimi besedami, $2E_{n+1}$ šteje število vseh permutacij velikosti $n+1$, ki so bodisi alternirajoče bodisi obratno alternirajoče.

Po drugi strani pa desna stran šteje vse trojice (S, σ, τ), kjer S označuje podmnožico množice $\{1, \ldots, n\}$ velikosti k, σ obratno alternirajočo permutacijo velikosti k, τ pa obratno alternirajočo permutacijo velikosti $n-k$. Iz take trojice lahko skonstruiramo alternirajočo ali obratno alternirajočo permutacijo π velikosti $n+1$ takole. Na mesto $k+1$ postavimo $n+1$; na mesta $k, k-1, \ldots, 1$ postavimo števila iz S, urejena, kot določa σ, na mesta $k+2, k+3, \ldots, n+1$ pa števila iz $\{1, \ldots, n\} \setminus S$, urejena, kot določa τ. Z drugimi besedami, če je $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$ in $\{1, \ldots, n\} \setminus S = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$, kjer je $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ in $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k}$, potem je

$$\pi = (i_{\sigma_k}, \ldots, i_{\sigma_2}, i_{\sigma_1}, n+1, j_{\tau_1}, j_{\tau_2}, \ldots, j_{\tau_{n-k}}).$$

Za $n = 8$ in trojico $(\{1, 5, 8\}, 132, 25341)$ dobimo denimo 581937462.

Lahko je preveriti, da je π alternirajoča (če je k sodo število) oziroma obratno alternirajoča (če je k liho število) in da je naša preslikava med permutacijami in trojicami zgornje oblike bijektivna. Recimo, alternirajoča permutacija 826174935 je slika trojice $(\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}, 351426, 12)$. ∎

Izrek 2. *Velja*

$$\operatorname{tg} x + \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n.$$

Dokaz. Pišimo $F(x) = \operatorname{tg} x + \sec x = \frac{1+\sin x}{\cos x}$. Potem je $F(0) = 1$ in

$$\begin{aligned} 2F'(x) &= 2\frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2+2\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = F^2(x) + 1. \end{aligned}$$

Trdimo, da isti diferencialni enačbi zadošča tudi desna stran $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$. Ker je $E_0 = 1$, je res $G(0) = 1$. Za vsak $n \geq 1$ pa je koeficient pri x^n v $2G'(x)$ enak $2(n+1)\frac{E_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2E_{n+1}}{n!}$, koeficient pri x^n v $G^2(x) + 1$ pa po konvolucijskem pravilu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{k!} \frac{E_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

Po lemi 1 sta ta dva izraza enaka. Koeficient pri x^0 v $2G'(x)$ je $2E_1 = 2$, v $G^2(x) + 1$ pa $E_0^2 + 1 = 2$.

Ni težko videti, da če dve potenčni vrsti obe ustrezata isti diferencialni enačbi in se ujemata v točki 0, sledi, da morata biti enaki. ■

Razvoj tangensa je potem lihi del, sekansa pa sodi del razvoja iz izreka 2. Zato dobimo

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{in} \qquad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in vsote potenc

Bernoullijeva števila B_n, ki se imenujejo po švicarskem matematiku Jakobu Bernoulliju (1654–1705), so tesno povezana z Eulerjevimi števili z lihimi indeksi. Definirana so takole:

$$B_n = \begin{cases} 1 & : \ n = 0 \\ \frac{1}{2} & : \ n = 1 \\ 0 & : \ n > 1 \text{ liho} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} n E_{n-1}}{2^n(2^n - 1)} & : \ n > 1 \text{ sodo} \end{cases}$$

Tako je denimo

$$B_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2(2^2-1)} = \frac{1}{6}.$$

Zaporedje Bernoullijevih števil se začne

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0,$$

$$\frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}, \ldots$$

Bernoullijeva števila se prav tako pojavijo v razvoju neke pomembne funkcije v potenčno vrsto (lema 3). Za motivacijo poskusimo s pomočjo rodovnih funkcij rešiti nalogo 2, torej izračunati $\sum_{j=1}^n j^k$.

Označimo z $G_n(x)$ (eksponentno) rodovno funkcijo vsot $\sum_{j=1}^n j^k$ po vseh k, torej

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} j^k \right) \frac{x^k}{k!}.$$

Z zamenjavo vrstnega reda seštevanja dobimo

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k x^k}{k!} \right) = \sum_{j=1}^{n} e^{jx}.$$

To je končna geometrijska vrsta, ki jo seveda znamo sešteti:

$$G_n(x) = e^x \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{xe^x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{nx}-1}{x}.$$

Funkcijo $\frac{e^{nx}-1}{x}$ znamo razviti v vrsto; če razvijemo v vrsto še $\frac{xe^x}{e^x-1}$, s konvolucijsko formulo dobimo formulo za iskano vsoto.

Lema 3. *Velja*

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Dokaz. Lahko je videti, da ima funkcija $\frac{xe^x}{e^x-1}$ razvoj v potenčno vrsto, torej

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

za neko zaporedje $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Naš cilj je dokazati, da je $a_n = B_n$.

Ker se $2^n(2^n-1)B_n$ izraža na preprostejši način preko Eulerjevih števil kot B_n, izračunajmo rodovno funkcijo za $2^n(2^n-1)a_n$. Če zamenjamo x z $2x$, dobimo

$$\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_n\frac{x^n}{n!},$$

zato je

$$\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}-\frac{xe^x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)a_n\frac{x^n}{n!}.$$

Če ponovno zamenjamo x z $2x$, dobimo

$$\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}-\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(2^n-1)a_n\frac{x^n}{n!}.$$

V definiciji Bernoullijevih števil s sodimi indeksi nastopajo Eulerjeva števila z za 1 manjšim indeksom. Zato obe strani zadnje enakosti odvajajmo; nato še odštejmo 1. Na levi z nekaj računanja dobimo

$$\left(\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}-\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}\right)'-1=\frac{4e^{2x}x+e^{4x}-1}{\left(e^{2x}+1\right)^2},$$

na desni pa

$$-1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n(2^n-1)a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Naredimo še nekaj računov s funkcijo

$$\operatorname{tg}x=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Najprej obe strani odvajajmo in pomnožimo z x:

$$\frac{x}{\cos^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Sedaj zadnji enakosti seštejmo in zamenjajmo trigonometrične funkcije z njihovimi definicijami:

$$\frac{4x}{(e^{ix}+e^{-ix})^2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Zamenjamo x z ix in pomnožimo z $-i$:

$$\frac{4x}{(e^x+e^{-x})^2}+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

tu smo na desni upoštevali $-i\cdot i^{2n+1}=-i^{2n+2}=-(-1)^{n+1}=(-1)^n$. Lahko je videti, da se leva stran spet poenostavi v

$$\frac{4e^{2x}x+e^{4x}-1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$$

Iz tega sledi, da je

$$-1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n(2^n-1)a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Koeficienta na levi in desni strani pri x^0 sta $-1+2a_1$ in 0, torej je $a_1=1/2=B_1$. Koeficienta pri x^{2n}, $n\geq 1$, sta $2^{2n+1}(2^{2n+1}-1)a_{2n+1}/(2n)!$ in 0, torej je $a_{2n+1}=0=B_{2n+1}$ za $n\geq 1$. Koeficienta pri x^{2n-1}, $n\geq 1$, sta $2^{2n}(2^{2n}-1)a_{2n}/(2n-1)!$ in $(-1)^{n-1}2nE_{2n-1}/(2n-1)!$, torej je $a_{2n}=(-1)^{n+1}2nE_{2n-1}/(2^{2n}(2^{2n}-1))=B_{2n}$. Ker je tudi $a_0=\lim_{x\to 0}xe^x/(e^x-1)=1=B_0$, smo dokazali, da je $a_n=B_n$ za vse $n\geq 0$. ■

Pripomnimo, da se v literaturi včasih vzame $B_1=-1/2$ namesto $B_1=1/2$. V tem primeru je $\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n/n!=\frac{xe^x}{e^x-1}-x=\frac{x}{e^x-1}$.

Sedaj lahko rešimo tudi nalogo 2.

Izrek 4 (Faulhaberjeva formula). *Za naravni števili n in k velja*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}j^k&=\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}B_ln^{k+1-l}\\&=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\sum_{l=1}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{(-1)^{l+1}\binom{k}{2l-1}E_{2l-1}}{2^{2l}(2^{2l}-1)}n^{k+1-2l}.\end{aligned}$$

Dokaz. Dokazali smo že, da je

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}j^k\right)\frac{x^k}{k!}=\frac{xe^x}{e^x-1}\cdot\frac{e^{nx}-1}{x},$$

torej moramo poiskati koeficient pri x^k na desni strani. Po izreku 3 znamo razviti v vrsto funkcijo $\frac{xe^x}{e^x-1}$, očitno je $\frac{e^{nx}-1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k x^{k-1}}{k!}$, konvolucijsko množenje zato da

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!} \cdot \frac{n^{k+1-l}}{(k+1-l)!} \right) x^k.$$

Koeficient pri x^k na obeh straneh je tako

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k+1}{l} B_l n^{k+1-l},$$

iz česar sledi izrek. ∎

Prvih nekaj členov Faulhaberjeve formule je

$$\sum_{j=1}^{n} j^k =$$
$$\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{\binom{k}{1} \cdot 1}{4 \cdot 3} n^{k-1} - \frac{\binom{k}{3} \cdot 2}{16 \cdot 15} n^{k-3} + \frac{\binom{k}{5} \cdot 16}{64 \cdot 63} n^{k-5} - \frac{\binom{k}{7} \cdot 272}{256 \cdot 255} n^{k-7} + \cdots$$

Za vsak fiksen k so binomski koeficienti v števcu prej ali slej enaki 0, tako da za vsoto res dobimo polinom v n stopnje $k+1$.

Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in funkcija zeta

Ena od uporab rodovnih funkcij je, da lahko z njimi izračunamo asimptotiko členov zaporedja. Naj bo $f(z)$ funkcija, holomorfna (analitična) v okolici točke 0, s Taylorjevim razvojem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Denimo, da ima $f(z)$ pol v točki z_0 in da je to edina singularnost v krogu s središčem v 0 in s polmerom $|z_0| + \epsilon$ za neki $\epsilon > 0$. Z drugimi besedami, obstaja tak najmanjši r (ki mu rečemo stopnja pola), da ima funkcija $f(z)(z-z_0)^r$ odpravljivo singularnost v z_0, konvergenčni radij Taylorjeve vrste te funkcije v točki 0 pa je strogo večji od $|z_0|$. Potem ni težko videti, da je dober približek za koeficient a_n izraz

$$b_n = \frac{(-1)^r c_{-r} n^{r-1}}{(r-1)!\, z_0^{n+r}}, \tag{4}$$

kjer je

$$c_{-r} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^r.$$

Dokaz bomo izpustili, glej na primer [3, Theorem 5.2.1]. Še več, velja

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| \cdot |z_0|^n = 0, \tag{5}$$

torej da razlika med a_n in b_n raste počasneje kot $(1/|z_0|)^n$, ko gre n proti neskončno.

Oglejmo si, kaj nam formula (4) da za funkcijo $f(z) = \operatorname{tg} z + \sec z = \frac{1+\sin z}{\cos z}$. Singularnosti funkcije z so ničle $\cos z$, v katerih je $\sin z \neq -1$. Edina kompleksna števila, ki ustrezajo tema pogojema, so $z = \pi/2 + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. Singularnost, najbližja izhodišču, je tako $\pi/2$, v tej točki ima $f(z)$ pol stopnje $r = 1$,

$$c_{-1} = \lim_{z\to\pi/2} \frac{(1+\sin z)(z-\pi/2)}{\cos z} = \lim_{z\to\pi/2} \frac{(z-\pi/2)\cos z + (1+\sin z)}{-\sin z} = -2,$$

kjer smo uporabili l'Hôpitalovo pravilo. Dobimo približek za koeficiente $f(z)$, ki jih poznamo iz izreka 2:

$$\frac{E_n}{n!} \sim \frac{(-1)^1(-2)n^0}{0!(\pi/2)^{n+1}} = \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}$$

oziroma

$$E_n \sim \frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}.$$

Primerjajmo obe strani za $n = 0, \ldots, 10$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521
$\frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$	1,27	0,81	1,03	1,97	5,019	15,98	61,03	271,96	1385,07	7935,86	50521,28.

Vidimo, da je približek zelo dober, čeprav ni res, kot bi morda kdo sklepal iz teh primerov, da je E_n kar $\frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$, zaokroženo na najbližje celo število: razlike med pravo in približno vrednostjo rastejo, količniki pa konvergirajo proti 1.

Dobimo lahko tudi boljši približek: razlika $f(z) - \frac{c_{-1}}{z-\pi/2} = f(z) - \frac{-2}{z-\pi/2}$ ima odpravljivo singularnost v točki $\pi/2$, tako da je zanjo $-3\pi/2$ singularnost, najbližja izhodišču. Spet velja

$$c_{-1} = \lim_{z\to-3\pi/2} \left(f(z) + \frac{2}{z-\pi/2}\right)(z+3\pi/2) = \lim_{z\to-3\pi/2} f(z)(z+3\pi/2) = -2.$$

Tako lahko odštejemo še funkcije $-2(z+3\pi/2)^{-1}$, $-2(z-5\pi/2)^{-1}$, $-2(z+7\pi/2)^{-1}$ itd. in dobivamo boljše in boljše približke za koeficiente $f(z)$. S pomočjo (5) je lahko dokazati, da konvergirajo proti koeficientom $f(z)$. Z drugimi besedami, dobili smo

$$\frac{E_n}{n!} = \frac{2}{(\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(-3\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(5\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(-7\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(9\pi/2)^{n+1}} + \cdots$$

To je posebno zanimivo, če je n lih. Vstavimo $2n-1$, $n \geq 1$, namesto n:

$$\frac{E_{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots\right). \tag{6}$$

Po drugi strani lahko člene v vsoti

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots$$

(ζ je grška črka zeta) razdelimo na lihe in sode, potem pa pri imenovalcih sodih členov izpostavimo 2^{2n}. Dobimo

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\zeta(2n),$$

iz česar sledi

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n).$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko vrstni red sumandov v konvergentni vrsti s pozitivnimi členi poljubno spreminjamo. Torej nam (6) da

$$\zeta(2n) = \frac{E_{2n-1}\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!} = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}$$

za $n \geq 1$. S tem smo rešili tudi nalogo 3. To pojasni denimo

$$\zeta(4) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{E_3\pi^4}{2\cdot(2^4-1)\cdot(4-1)!} = \frac{2\pi^4}{2\cdot 15\cdot 6} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Končajmo še z nekaj dejstvi o funkciji zeta, ki je definirana kot

$$\zeta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^z} \tag{7}$$

za kompleksna števila $z = x + iy$ z $x > 1$; pri tem je j^z definiran kot $e^{z\cdot\log j}$. Ni težko videti, da je vrsta pri tem pogoju konvergentna, pravkar pa smo izračunali $\zeta(z)$ za soda naravna števila z.

Za liha naravna števila $z > 1$ ni znana nobena formula za $\zeta(z)$. Domneva se, da so π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$ itd. algebraično neodvisna števila, torej da ne obstaja netrivialen polinom v dveh spremenljivkah z racionalnimi koeficienti, ki bi uničil dve izmed njih.

Pač pa velja naslednje: funkcijo ζ, ki smo jo definirali na delu kompleksne ravnine $\{x + iy \colon x > 1\}$, lahko analitično razširimo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Razširjena funkcija, ki jo spet označimo z ζ, ima v 1 pol stopnje 1, poleg tega pa velja

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

za nenegativna cela števila n. Velja torej $\zeta(0) = -B_1 = -\frac{1}{2}$, $\zeta(-2n) = 0$ in $\zeta(1-2n) = \frac{(-1)^n E_{2n-1}}{2^{2n}(2^{2n}-1)}$ za $n = 1, 2, \ldots$

Eulerjeva števila z lihim indeksom se torej pojavljajo ne le v razvoju tangensa v vrsto in v formuli za vsoto prvih n k-tih potenc, temveč tudi pri vrednostih funkcije ζ, in sicer tako pri pozitivnih sodih kot pri negativnih lihih številih.

Formula

$$\zeta(-(2n-1)) = \frac{(-1)^n E_{2n-1}}{2^{2n}(2^{2n}-1)}$$

ima zanimivo interpretacijo. Na primer, za $n = 1$ dobimo $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Če vstavimo $z = -1$ v (7) (česar seveda ne smemo storiti, ker vrsta na desni divergira), torej dobimo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

To je seveda nadvse nenavadno: delne vsote $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ naj bi konvergirale proti $-1/12$. Ta »trditev« (ki jo matematično torej pravilno razumemo v smislu funkcije ζ, glej pa tudi [2] za alternativno razumevanje teh rezultatov) je tako presenetljiva, da si je utrla pot tudi v nematematični svet: v zadnjih letih lahko decembra v centru Ljubljane med drugimi novoletnimi okraski vidimo tudi napis $\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$.

Na internetu (npr. [4]) pa je mogoče najti tudi utemeljitve, kot je naslednja. Označimo

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \\ S_1 &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots \end{aligned}$$

Potem je

$$\begin{aligned} 2S_1 &= 1-1+1-1+\cdots \\ &\qquad +1-1+1-\cdots = 1, \end{aligned}$$

se pravi $S_1 = 1/2$. Podobno je

$$\begin{aligned} 2S_2 &= 1-2+3-4+\cdots \\ &\qquad +1-2+3-\cdots = 1-1+1-1+\cdots = S_1 = 1/2, \end{aligned}$$

torej $S_2 = 1/4$. Torej je

$$\begin{aligned} S_0 - S_2 &= 1+2+3+4+\cdots \\ &\qquad -1+2-3+4-\cdots = 4+8+12+16+\cdots = 4S_0. \end{aligned}$$

Iz tega dobimo $3S_0 = -S_2$ in $S_0 = -S_2/3 = -1/12$.

Taka izpeljava seveda ni matematično korektna, ker računamo z divergentnimi vsotami, nam pa vseeno daje neko intuitivno predstavo, zakaj je vrednost $\zeta(-1)$ ravno $-\frac{1}{12}$.

Na koncu omenimo še najpomembnejšo domnevo v zvezi s funkcijo ζ (mnogi jo imajo celo za najpomembnejši nerešeni matematični problem). Povedali smo že, da so soda negativna števila ničle funkcije ζ, rečemo jim *trivialne ničle*. Slavna *Riemannova hipoteza* pravi, da imajo vse netrivialne ničle funkcije ζ realni del enak $1/2$. Domnevo je postavil nemški matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njena pomembnost pa je (med drugim) v tem, da je njena rešitev tesno povezana s porazdelitvijo praštevil.

Omenimo, da so Eulerjeva in Bernoullijeva števila standardna tema v preštevalni kombinatoriki in pomemben zgled uporabe rodovnih funkcij; odlična referenca je [1]. Za asimptotiko koeficientov rodovnih funkcij je dober osnovni vir [3].

LITERATURA

[1] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[2] T. Tao, *The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation*, dostopno na `tinyurl.com/j869xct`, ogled 25. 8. 2017.

[3] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, 3rd ed., A K Peters, Ltd., Wellesley, 2006.

[4] Numberphile, *Astounding:* $1+2+3+4+5+\cdots = -1/12$, dostopno na `tinyurl.com/pekgb6o`, ogled 25. 8. 2017.

KAJ NAM O MATEMATIČNEM ZNANJU MATURANTOV SPOROČA RAZISKAVA TIMSS ADVANCED?

BARBARA JAPELJ PAVEŠIĆ[1] IN GAŠPER CANKAR[2]

[1]Pedagoški inštitut
[2]Državni izpitni center

Math. Subj. Class. (2010): 97D10, 97D60, 97C40; 62-07: Data analysis

Mednarodna objava rezultatov primerjalne raziskave znanja preduniverzitetne matematike je prinesla nekatere pomembne nove informacije o poučevanju matematike pri nas. Najpomembnejše je, da je znanje maturantov, ki se odločajo za maturo iz matematike na višji ravni, zraslo in je relativno visoko. V prispevku prikazujemo rezultate prvih nacionalnih analiz. Rezultate raziskave smo povezali z rezultati iz preteklih merjenj znanja matematike med srednješolci: iz sploh prvega sodelovanja Slovenije v mednarodni primerjavi leta 1989 in iz treh merjenj trendov v letih 1995, 2008 in 2015. Neodvisno izmerjene dosežke TIMSS Advanced smo primerjali z rezultati nacionalne mature. Iskali smo razlago, zakaj so razlike v dosežkih med spoloma v obeh merjenjih različne, čeprav sta preizkusa po vsebini in kognitivni strukturi zelo podobna. Ugotovili smo, da varianco v dosežkih dijakov v veliki meri pojasnijo spol, izbira ravni mature, izbira fizike za maturitetni predmet in naklonjenost do učenja matematike. Rezultate primerjamo z rezultati podobne analize pred osmimi leti.

WHAT DOES TIMSS ADVANCED SAY ABOUT MATHEMATICS KNOWLEDGE OF SLOVENE SECONDARY SCHOOL STUDENTS

The international report of the results of large scale assessments of pre-university mathematics has brought some important new information on mathematics teaching in Slovenia. Most importantly, the knowledge of students who choose the higher level of the national mathematics examination has grown and is relatively high. The paper presents results of the first national analysis. We compare the results of the study with the results from previous assessments: from the first participation of Slovenia in the international comparative study in 1989 and from three studies of trends in the years 1995, 2008 and 2015. The independently measured achievements of TIMSS Advanced were linked with the results of the national matura examination. We tried to find the explanation for differences in achievements by gender that are different in both measurements, even though the content and cognitive structure of the tests are very similar. The important factors which explain achievement variance were found to be students' gender, the choice of the national exam difficulty level, the choice of physics for the optional subject at the national examination, and how much students like to learn mathematics.

Uvod

Slovenija je med leti 1988 in 2016 sodelovala v mednarodnih raziskavah združenja IEA (International Association for the Evaluation of Educational

Achievement) iz znanja matematike in naravoslovja med učenci osnovne šole in dijaki v programih srednjih šol, ki dopuščajo vstop v univerzitetni študij. Države članice, ki so se ob vstopu zavezale k razvoju raziskovanja izobraževanja, v IEA zastopajo skupine raziskovalcev iz raziskovalnih inštitutov, univerz ali ministrstev. Združenje IEA so pred skoraj šestdesetimi leti ustanovili raziskovalci izobraževanja na sestanku Unesca, ko so ugotovili, da bi lahko države veliko lažje izboljševale izobraževalne sisteme, če bi se lahko učile o učinkovitih rešitvah druga od druge. Ker so za to potrebovale primerljive podatke o sistemih, so zasnovale mednarodne primerjalne študije znanja in okoliščin učenja. V začetku so bila izvedena posamična merjenja znanja, od leta 1995 pa IEA izvaja največjo mednarodno raziskavo trendov šolskega matematičnega in naravoslovnega znanja, TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), na štiri leta med osnovnošolci in na okoli osem let med srednješolci. V letih 1995, 2008 in 2015 je tudi Slovenija sodelovala v raziskavi znanja matematike in fizike med dijaki zahtevnejših programov matematike in fizike v zadnjem letu pred vstopom na univerzo, TIMSS Advanced, ves čas pa tudi v raziskavah osnovnošolskega znanja. V prispevku bomo predstavili pomembnejša sporočila raziskave med srednješolci za slovensko matematično izobraževanje, ki smo jih iz podatkov izluščili po mednarodni objavi rezultatov zadnjega merjenja v letu 2016 [5, 6].

Kaj je raziskava merila in kako?

Mednarodna raziskava TIMSS Advanced tradicionalno meri skupno znanje matematike, znanje posameznih velikih vsebinskih poglavij matematike, algebre, analize in geometrije, ter ločeno tri kognitivne ravni znanja, poznavanje dejstev in postopkov, uporabo znanja ter matematično sklepanje. V merjenje vključi vnaprej natančno določene populacije dijakov zahtevnejših programov matematike v zaključnih letnikih srednje šole. Raziskava se vsakič začne s skupnim oblikovanjem načrta o merjenju znanja in dejavnikov ter zapisom načrtov, vsebine in namena primerjav v publikaciji Izhodišča raziskave TIMSS Advanced [5]. Sodelujoče države se skupaj dogovorijo o vsebinah preizkusa. Ker je namen IEA raziskav merjenje šolskega znanja, vsebine za preizkuse določijo iz primerljivih analiz učnih načrtov. V preizkuse znanja so vključene le vsebine, ki so pomemben del preduniverzitetnega matematičnega izobraževanja v vseh sodelujočih državah. Nekatera klasična poglavja matematike, kot so kombinatorika, verjetnost in statistika ter uporaba polarnega koordinatnega sistema, v letu 2015 niso bila zajeta, ker jih v več državah ne učijo na preduniverzitetni ravni. V seznamu ni bilo nobenega poglavja, ki se ga slovenski dijaki programa splošne gimnazije ne bi imeli priložnosti naučiti v šoli. Naloge preizkusa znanja nato sledijo seznamu vsebin ter hkrati trem kognitivnim kategorijam znanja.

Vsebinska izhodišča preizkusa TIMSS Advanced 2015

Algebra

Izrazi in operacije: računanje z eksponentnimi, logaritemskimi, polinomskimi, racionalnimi izrazi in koreni ter s kompleksnimi števili; izračunavanje vrednosti algebrskih izrazov (npr. eksponentnih, logaritemskih, polinomskih, racionalnih in korenskih); določiti n-ti člen aritmetičnega in geometrijskega zaporedja ter vsoto končne in neskončne vrste.

Enačbe in neenačbe: rešiti linearne in kvadratne enačbe in neenačbe, kakor tudi sistem linearnih enačb in neenačb; rešiti eksponentne, logaritemske, polinomske, racionalne in enačbe s koreni; uporabiti enačbe in neenačbe za reševanje problemskih nalog.

Funkcije: interpretirati, primerjati in zapisati ekvivalentne predstavitve funkcij, tudi sestavljenih, v obliki urejenih parov, preglednic, grafov, formul ali besedila; prepoznati in ločiti temeljne lastnosti eksponentnih, logaritemskih, polinomskih, racionalnih in korenskih funkcij.

Analiza

Limite: določiti limite funkcij, tudi racionalnih; prepoznati in opisati pogoje za zveznost in odvedljivost funkcij.

Odvodi: odvajati polinomske, eksponentne, logaritemske, trigonometrične, racionalne, korenske in sestavljene funkcije ter odvajati produkte in kvociente funkcij; uporabiti odvode za reševanje problemskih nalog iz optimizacije in hitrosti sprememb; uporabiti prve in druge odvode za določanje naklona tangente ter iskanje ekstremov in prevojev polinomskih in racionalnih funkcij; uporabiti prvi in drugi odvod za skiciranje in opisovanje grafa funkcije.

Integrali: integrirati polinomske, eksponentne, trigonometrične in enostavne racionalne funkcije; izračunati vrednosti določenih integralov in uporabiti integriranje pri računanju ploščin in prostornin.

Geometrija

Nekoordinatna in koordinatna geometrija: uporabiti nekoordinatno geometrijo za reševanje problemskih nalog v dveh in treh dimenzijah; uporabiti koordinatno geometrijo za reševanje problemskih nalog v dveh dimenzijah; uporabiti lastnosti vektorjev, njihovih vsot in razlik pri reševanju problemov.

Trigonometrija: uporabiti trigonometrijo pri reševanju nalog s trikotniki; prepoznati, interpretirati in narisati grafe sinusnih in kosinusnih funkcij in funkcije tangens; rešiti problemske naloge, ki vključujejo trigonometrične funkcije.

Preverjanje je potekalo ob koncu aprila in v začetku maja 2015, da je kar najmanj motilo izvajanje mature. Šole so bile vnaprej seznanjene z vsebinskimi izhodišči raziskave in so dijakom večinoma prilagodile obravnavo snovi. Pri interpretaciji rezultatov pa je primerno upoštevati, da nekatere vsebine še niso bile utrjene. Učitelji so za vsako snov sporočili, ali so jo njihovi dijaki obravnavali že pred zadnjim letnikom, v 4. letniku ali pa so jo pri pouku pravkar uvedli in še ne utrdili.[1] Učitelji 23 odstotkov slovenskih dijakov so zapisali, da še niso dokončali obravnave uporabe odvoda za določanje prevojnih točk. 26 odstotkov dijakov pri pouku še ni dokončalo obravnave integriranja funkcij in 17 odstotkov se jih še ni naučilo uporabiti odvodov za reševanje problemov (ekstremalne naloge). Dokončano obravnavo drugih vsebin so potrdili učitelji več kot 95 odstotkov dijakov. V drugih državah, še posebej v Franciji, so sodelujoči dijaki pred testiranjem celovito obdelali manj snovi kot v Sloveniji.

TIMSS Advanced meri dosežke dijakov s šestimi različnimi pisnimi preizkusi, v katere je bilo leta 2015 porazdeljenih 115 nalog. Vsak dijak reši le po en preizkus. Naloge TIMSS Advanced 2015 so enakomerno, v tretjinskih deležih, pokrivale omenjene tri vsebine (algebro, analizo in geometrijo) in tri kognitivna področja (poznavanje dejstev in postopkov, uporaba znanja in matematično sklepanje).

Naloge sestavljajo učitelji matematike iz vseh sodelujočih držav na skupnem delovnem sestanku. Že ob sestavljanju vsako nalogo enolično umestijo v vsebinsko in kognitivno kategorijo. Mednarodna komisija za naloge izvede recenzijo. Vse države jih nato prevedejo, prilagodijo v svoj jezik in preizkusijo med dijaki. Za vsako izvedbo raziskave je treba na novo napisati okoli polovico nalog, druga polovica pa se prevzame iz prejšnje izvedbe raziskave. Po vsakem zaključku merjenja znanja polovica nalog ostane prikritih, da se lahko v enaki obliki prihodnjič ponovijo. V letu 2015 so bile naloge razdeljene v devet skupin ali poglavij in štiri od teh so po izvedbi raziskave postale javno dostopne [4].

Velika večina nalog v raziskavah TIMSS preveri le znanje enega določenega koncepta. Rešitve dijakov so ocenjene z nič ali eno točko. Največ je nalog izbirnega tipa, kjer dijak dobi eno točko za pravilno izbran odgovor med štirimi ali petimi možnostmi. Del nalog je odprtega tipa, pri katerih dijaki sami zapišejo svojo rešitev in odgovor. Med temi je nekaj večstopenjskih (leta 2015 jih je bilo 18), da zaporedoma preverijo dva povezana koncepta in dijakovo sposobnost reševanja obsežnejših problemov. Te naloge dijakom prinesejo 0 točk za napačno rešitev, 1 točko za pravilno rešitev

[1] Podatki vseh držav o obravnavi snovi so objavljeni v dokumentu: TA15_MAT_TeacherAlmanac, dostopnem na `timssandpirls.bc.edu/timss2015/advanced-international-database/downloads/TA15\_Almanacs.zip`

enega dela ali izkazano znanje enega koncepta ali 2 točki za popolno rešitev. Točk ni bilo mogoče deliti. V mednarodni podatkovni bazi se za vsakega dijaka in vsako nalogo[2] ohrani tudi podatek o vrsti dijakove rešitve, tudi če je napačna (npr. računska pot, tipična napaka) in se uporabi za primerjalne analize napačnih rešitev ali nerazumevanja konceptov.

Poleg deležev pravilnih rešitev je iz rezultatov raziskave mogoče dobiti tudi druge informacije. Ob nalogah, ki so bile uporabljene v več zaporednih raziskavah, lahko spremljamo spreminjanje uspešnosti dijakov pri istih konceptih. Ob nekaterih nalogah, ki so bile uporabljene v letih 1995, 2008 in 2015, bomo prikazali spreminjanje uspešnosti slovenskih dijakov v primerjavi z nekaterimi drugimi državami.

Kaj kažejo rešitve nalog?

Ruska federacija je sodelovala v vseh treh merjenjih z zelo specializirano populacijo dijakov programa intenzivne matematike (šest ur ali več pouka matematike na teden), v letu 2015 pa s splošno maturitetno populacijo, ki je po obsegu pouka matematike primerljiva s slovenskimi maturanti. Francija je sodelovala leta 1995, ko je dosegla med vsemi državami najvišji rezultat, in leta 2015, ko je znanje dijakov tako padlo, da se je uvrstila med države s podpovprečnim rezultatom. Italija je sodelovala v vseh treh raziskavah in nikoli ni dosegla zelo visokih dosežkov, čeprav njihova gimnazija traja pet let. ZDA so sodelovale v letih 1995 in 2015. V zadnjem merjenju so ameriški dijaki reševali naloge in odgovarjali na vprašanja zelo podobno kot slovenski. Švedska je sodelovala v vseh treh merjenjih. Med vsemi državami je doživela najmočnejši padec znanja med 1995 in 2008, potem pa ji je do leta 2015 uspelo svoje rezultate izrazito popraviti. Trendi dosežkov za vse države so prikazani v preglednici 2.

V nadaljevanju prikazujemo podrobnejše podatke o reševanju petih primerov klasičnih matematičnih nalog, ki so se na preizkusih v letih 1995, 2008 in 2015 ponovile in katerih rezultati opozarjajo na potrebo po posebni pozornosti slovenskih učiteljev pri pouku.

V Sloveniji smo primerjali reševanje med dijaki, odločenimi za višjo in osnovno raven maturitetnega izpita iz matematike. Med vsemi maturanti splošne mature je bila leta 2008 in 2015 na višjo raven izpita iz matematike prijavljena približno četrtina dijakov. Učni načrt matematike za obe skupini je enak, razlikujejo se samo zahtevani standardi znanja za maturo. Temu je prilagojena tudi priprava dijakov na maturo.

[2] Datoteke z rezultati nalog so ločene po državah in od datotek z odgovori dijakov, učiteljev ali ravnateljev na vprašalnike. Dosegljivo na `timssandpirls.bc.edu/timss2015/advanced-international-database/downloads/TA15_SPSSData.zip`

Primer 1: Naloga iz algebre, racionalizacija izraza, uvrščena med poznavanje dejstev

MA13011

Če je $x > 0, y > 0$ in $x \neq y$, potem je $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ enako:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$ Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x-y}$ Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2-y^2}$

Deleži odgovorov v Sloveniji, 2015

	A*	B	C	D	E
Osnovna raven mature	47,4	14,3	7,7	24,8	3,9
Višja raven mature	77,8	9,0	1,8	6,5	3,2

Deleži pravilnih odgovorov med dijaki v sodelujočih državah

Leto raziskave	Francija	Italija	Ruska federacija	Ruska federacija 6 ur+	Švedska	ZDA	Slovenija	Osnovna raven mature	Višja raven mature
1995	79,4	55,0		78,9	52,4	44,6	62,7		
2008		61,6		82,2	22,6		59,6	55,9	78,7
2015	43,8	57,7	57,6	77,1	20,4	42,2	55,1	47,4	77,8

Dijaki višje ravni matematike v Sloveniji so glede na druge vrstnike to nalogo leta 2015 dobro reševali. V povprečju so dosegli enak rezultat kot dijaki intenzivne matematike iz Ruske federacije in boljšega kot dijaki drugih držav. Slovenski dijaki osnovne ravni so nalogo rešili veliko slabše, samo malo bolje kot Francozi in slabše kot leta 2008.

Ob razmeroma slabih splošnih rezultatih pri tako elementarni nalogi bi se v Sloveniji (in tudi drugod) najbrž morali zamisliti in več pozornosti posvetiti razumevanju in vadbi osnovnega računanja z ulomki. Natančnejša vsebinska analiza rezultatov pri tej nalogi pokaže ne samo, da tako osnovno nalogo zna rešiti le slaba polovica teh dijakov, temveč tudi to, da jih je kar četrtina izbrala ZELO napačno rešitev D.

Primer 2: Naloga iz kompleksnih števil, uvrščena med poznavanje dejstev

Pri tej nalogi je treba opozoriti na izrazito slab uspeh naših dijakov in na veliko poslabšanje v zadnjih letih v večini držav, tudi pri nas. Leta 2015 so slovenski dijaki višje ravni (8 % populacije) nalogo rešili enako dobro kot veliko večja skupina slovenskih dijakov v letu 1995 (74 % populacije). Slovenski dijaki osnovne ravni so najpogosteje ločeno izračunali tretji potenci realnega in imaginarnega dela števila. Dosežek je slabši, kot bi pričakovali glede na učni načrt, ki med cilji poglavja o učenju kompleksnih števil navaja »množenje kompleksnih števil« in med priporočili pravi, da je »pou-

MA13012

Če je $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, potem je z^3 enak:

(A) 0 (B) 1 (C) i

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$ (E) $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$

Deleži odgovorov v Sloveniji, 2015

	A	B	C*	D	E
Osnovna raven mature	4,2	9,9	14,9	38,2	25,7
Višja raven mature	1,8	3,2	40,7	18,5	28,5

Deleži pravilnih odgovorov med dijaki v sodelujočih državah

Leto raziskave	Francija	Italija	Ruska federacija	Ruska federacija 6 ur+	Švedska	ZDA	Slovenija	Osnovna raven mature	Višja raven mature
1995	59,1	18,6		55,9	46,2	24,1	40,3		
2008		24,0		65,2	40,2		23,4	19,3	42,1
2015	36,7	23,8	35,1	47,6	30,7	25,1	21,5	14,9	40,7

darek na računskih operacijah s kompleksnimi števili«. Obenem je potenciranje in množenje kompleksnih števil običajno vključeno v maturitetni izpit na osnovni ravni.

Primer 3: Naloga izračuna odvoda sestavljene eksponentne funkcije, uvrščena med poznavanje dejstev

MA13015

Funkcija f je podana z $f(x) = e^{x^2}$.

Njen odvod $f'(x)$ je enak

(A) e^{x^2} (B) e^{2x} (C) $2xe^{x^2}$

(D) $e^{x^2} + 2x$ (E) $2e^{2x^3}$

Deleži odgovorov v Sloveniji, 2015

	A	B	C*	D	E
Osnovna raven mature	20,7	14,7	36,0	22,7	4,5
Višja raven mature	8,7	7,4	68,6	11,1	2,5

Deleži pravilnih odgovorov med dijaki v sodelujočih državah

Leto raziskave	Francija	Italija	Ruska federacija	Ruska federacija 6 ur+	Švedska	ZDA	Slovenija	Osnovna raven mature	Višja raven mature
1995	92,5	62,5		73,7	57,7	32,6	55,6		
2008		68,1		73,3	52,0		48,1	43,4	70,8
2015	79,8	61,7	61,8	68,9	48,3	70,7	44,2	36,0	68,6

Odvod sestavljene eksponentne funkcije so znali najbolje izračunati v Franciji, najslabše pa naši dijaki, ki kažejo tudi največje padanje znanja od leta 1995 dalje. Razlika v uspehu med slovenskimi dijaki osnovne in višje maturitetne ravni je zelo velika. Rezultati so v nasprotju s smernicami učnega načrta, kjer je med učnimi cilji za obe ravni navedeno, da dijaki »odvajajo elementarne funkcije in kompozitum funkcij«. Slabi rezultati opozarjajo, da tudi te vsebine potrebujejo več pozornosti pri pouku.

Primer 4: Prepoznavanje enačbe pravokotnice na premico, uvrščena med uporabo znanja

MA13017

Katera od naslednjih premic je pravokotna na premico $6x + 2y = 4$ in gre skozi točko $(-6, 5)$?

(A) $3x - y = -23$ (B) $3x - 7 = 13$

(C) $3x - 9y = 9$ (D) $x - 3y = -7$

(E) $x - 3y = -21$

Deleži odgovorov v Sloveniji, 2015

	A	B	C	D	E*
Osnovna raven mature	20,1	7,9	14,6	10,1	39,7
Višja raven mature	9,0	2,1	4,8	12,0	69,1

Deleži pravilnih odgovorov med dijaki v sodelujočih državah

Leto raziskave	Francija	Italija	Ruska federacija	Ruska federacija 6 ur+	Švedska	ZDA	Slovenija	Osnovna raven mature	Višja raven mature
1995	51,6	43,2		42,5	39,8	36,7	51,4		
2008		44,6		48,6	23,3		46,6	39,3	78,5
2015	25,7	40,1	36,5	45,2	18,7	49,7	46,5	39,7	69,1

V primerjavi z drugimi kažejo naši dijaki relativno dobro razumevanje tega koncepta, še posebej dijaki višje ravni, ki so močno prehiteli vse druge, tudi precej bolj specializirane ruske dijake. Zanimivo pa je, da so se rezultati naših dijakov osnovne maturitetne ravni od testiranja v letu 2008 ohranili oziroma celo rahlo izboljšali, med dijaki višje ravni pa je znanje nekoliko upadlo.

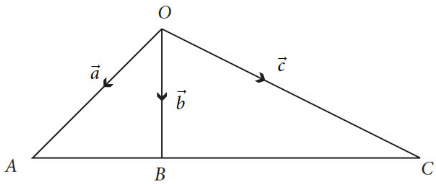
Primer 5: Naloga z vektorji v trikotniku, iz geometrije, uvrščena v uporabo znanja

Pri nalogah z vektorji se naši dijaki tradicionalno dobro obnesejo. Zanimivo je, da se je pri tej nalogi rezultat v Sloveniji od preizkusa leta 2008 celo izboljšal. Naši dijaki so se najpogosteje zmotili, ker so vektor od A do B prepoznali kot vsoto in ne kot razliko med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Od leta 2008 je pri reševanju preizkusov TIMSS (skladno z globalnimi trendi) dovoljena uporaba simbolnih in grafičnih kalkulatorjev. Vendar so naloge še naprej sestavljene tako, da kalkulator ne olajša reševanja. Dijaki so opozorjeni, da morajo pri rešitvah s pomočjo kalkulatorjev primerno navesti razmisleke (algoritem reševanja oz. ukaze) in vmesne rezultate, rešitve pa so posebej označene, da so sledljive. Pri raziskavi 2015 so kalkulatorje uporabljali predvsem skandinavski dijaki in analiza rešitev je pokazala, da uporaba kalkulatorjev ni zagotavljala boljšega uspeha.

MA13020

Točka B leži na daljici AC.



Če je $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, potem je $\vec{c}$ enak

Ⓐ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ Ⓑ $15\vec{b} - 10\vec{a}$ Ⓒ $3\vec{b} - 2\vec{a}$

Ⓓ $10\vec{a} - 15\vec{b}$ Ⓔ $2\vec{a} - 3\vec{b}$

Deleži odgovorov v Sloveniji, 2015

	A	B	C*	D	E
Osnovna raven mature	18,1	14,8	37,7	9,1	9,9
Višja raven mature	10,4	10,1	56,7	3,2	9,2

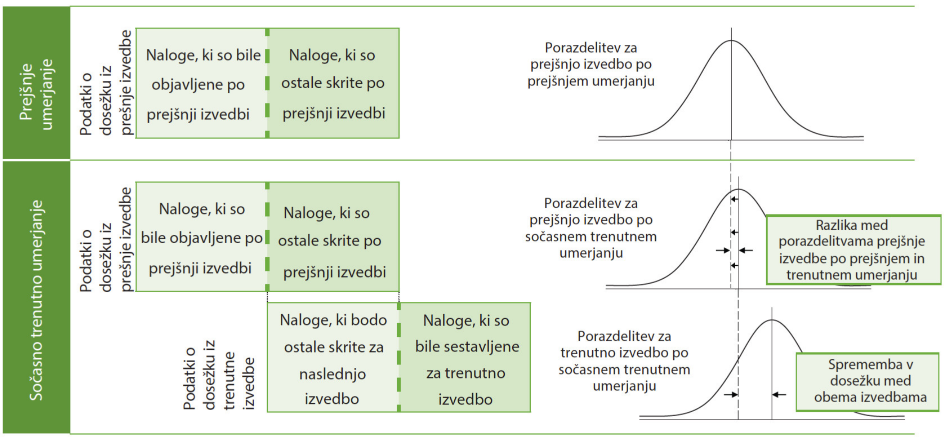
Deleži pravilnih odgovorov med dijaki v sodelujočih državah

Leto raziskave	Francija	Italija	Ruska federacija	Ruska federacija 6 ur+	Švedska	ZDA	Slovenija	Osnovna raven mature	Višja raven mature
1995	38,9	24,1		53,1	17,2	27,6	47,0		
2008		23,2		62,2	18,9		36,8	32,9	54,2
2015	48,2	17,9	45,4	55,8	18,8	30,1	42,1	37,7	56,7

O metodah izračunavanja predstavljenih TIMSS dosežkov

Raziskava TIMSS je izjemno kompleksna in vanjo so vključeni različni modeli ter statistične metode. Na ta način raziskava TIMSS zagotavlja široko bazo zanimivih statističnih podatkov, ki jih je ob primerni poglobitvi mogoče dobiti in analizirati na različne načine. Najodmevnejši so rezultati dosežkov na lestvicah, ki ponujajo tako primerjavo med državami kot tudi časovne trende glede na zaporedne raziskave (1995, 2008, 2015). Za izračun dosežkov iz osnovnih dijaških rešitev nalog se uporabljajo zahtevni statistični modeli, ki omogočajo sledljivost in primerjavo znanja dijakov kljub različnim okoliščinam v vsaki izvedbi raziskave: naloge v zaporednih TIMSS raziskavah so le deloma enake, sodelujoče populacije dijakov se razlikujejo med državami, razlike so v nacionalnih učnih načrtih, organizaciji šolskih sistemov in nacionalnih prevodih preizkusov znanja. Vse skupaj v vsebinskem in tehničnem pogledu ustvarja navidezno različne pogoje za reševanje. Končno izračunavanje primerljivosti in dosežkov je računsko zelo zahteven proces, ki upošteva in preseže razlike, da so končni dosežki vsakega dijaka primerljivi med državami in med časovno zaporednimi izvedbami merjenja znanja. Izračun dosežkov izvedejo psihometriki pod vodstvom Mednarodnega centra raziskave TIMSS (TIMSS and PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College).

Postopek je v osnovi sestavljen iz izračuna dosežka za vsakega sodelujočega dijaka in nato določanja lestvice (z linearnimi transformacijami) tako, da je primerljiva z lestvicami iz preteklih raziskav. Čeprav v zaporednih izvedbah sodelujejo različne države, postopek zagotovi primerljivost mednarodne lestvice za nazaj. Določanje lestvice dosežkov je predstavljeno v tehničnem poročilu [8], shematsko pa prikazano na sliki 1. Lestvice dosežkov so vedno umerjene tako, da je mednarodno povprečje med dijaki enako 500 točk, standardni odklon pa 100 točk.



Slika 1. Prikaz določanja lestvice dosežkov za izračune trendov.

Za uporabnika podatkov je pomembno, da so lestvice iste vrste rezultatov primerljive med državami in med leti (npr. matematični dosežki ali dosežki iz algebre). Med seboj pa niso primerljivi dosežki z različnih lestvic (npr. dosežki iz algebre z dosežki iz sklepanja v isti državi). Raziskava od vseh nacionalnih merjenj znanja odstopa po tem, da dosežki vsakega dijaka niso eno število, pač pa pet verjetnostnih vrednosti (angl. plausible values). V statističnih računih je treba upoštevati teh pet vrednosti in še dejstvo, da dijaki niso popolnoma naključne osebe, pač pa izbrani iz naključnih, vendar različno velikih šol in razredov. Za delo s podatki so zato na spletni strani objavljenih rezultatov (`Timss2015.org,internationaldatabases`) na voljo obširna navodila in dostop do statističnih orodij (IDB Analyzer, ki požene ustrezne kombinacije ukazov v SPSS). Za uporabnike brez SPSS so na voljo tudi specialne knjižnice v R, trenutno Bifie in Intsvy.

Kaj kažejo trendi v znanju matematike v Sloveniji?

Slovenija je prvič izpeljala mednarodno primerljivo merjenje znanja leta 1989. To je bila raziskava znanja matematike SIMS (Second International

Mathematics Study[3]). Med dijaki naravoslovno-matematičnih (Slovenija NM) in drugih srednjih šol sistema usmerjenega izobraževanja (Slovenija Ne-NM) je bilo znanje matematike izmerjeno na popolnoma enak način kot v petnajstih drugih državah med letoma 1980–1982. Pod vodstvom mednarodnega centra raziskave TIMSS smo dopolnili mednarodno bazo podatkov s slovenskimi meritvami. Mednarodnim povprečnim deležem pravilnih odgovorov za skupine nalog iz posameznih poglavij matematike smo dodali podatke za naše dijake, ločeno za dijake naravoslovno-matematičnega usmerjenega izobraževanja in dijake drugih smeri (preglednica 1, [3]).

Država/sistem	Množice in relacije	Številski sistemi	Algebra	Geometrija	Analiza	Verjetnost in statistika	Skupno	Prikaz skupnega deleža pravilnih odgovorov
Hong Kong	79,5	77,7	78,3	65,1	71,2	72,6	72,7	
Japonska	78,6	68,3	77,8	60,0	66,1	70,0	68,2	
Anglija	61,4	59,4	66,0	51,4	57,5	63,7	58,6	
Finska	77,1	56,7	68,8	47,9	54,6	57,6	57,5	
Švedska	58,8	62,1	59,9	48,5	51,1	63,9	54,9	
Slovenija NM	69,1	51,0	60,3	40,9	53,0	50,2	53,0	
Nova Zelandija	71,8	50,6	56,6	42,9	48,2	57,9	50,8	
Belgija Fl.	71,5	47,8	61,3	42,4	45,7	43,1	49,5	
Ontario	69,1	46,6	56,7	41,5	45,5	46,1	48,2	
Izrael	51,2	46,1	60,4	34,6	45,0	35,6	45,7	
Belgija Fr.	66,0	44,0	55,3	37,7	42,9	42,1	45,5	
Škotska	50,4	39,0	47,9	41,8	31,6	45,6	39,7	
ZDA	53,0	40,3	42,6	32,6	28,3	40,9	35,6	
Brit. Kolumbija	47,8	43,1	46,9	30,1	21,0	38,4	33,4	
Tajska	52,1	33,0	38,3	29,8	26,4	34,1	32,1	
Madžarska	35,2	27,9	44,9	30,2	25,8	28,7	31,3	
Slovenija Ne-NM	44,2	31,0	40,2	23,8	29,0	33,3	30,9	

Preglednica 1. Rezultati Druge mednarodne raziskave matematike, SIMS, v zadnjem letniku srednje šole, 1989.

Slovenski dijaki naravoslovno-matematične usmeritve so s povprečnim matematičnim rezultatom dosegli 6. mesto med petnajstimi drugimi državami. Dosegli so 5. mesto v analizi, 6. mesto v nalogah iz množic in številskih sistemov, 7. mesto iz algebre in verjetnosti ter 10. mesto v geometriji. Povprečni rezultat slovenskih dijakov, ki niso bili v naravoslovno-matematičnih usmeritvah, je bil pričakovano nižji in najnižji med povprečji dijakov iz drugih držav. Ker je raziskava od dijakov zbrala še množico podatkov o učenju in odnosu do znanja, je bila nacionalna primerjava pomembna za kritično analizo usmerjenega izobraževanja.

[3]Podatki o osnovni izvedbi raziskave SIMS 1980–1982 so dostopni na: `ips.gu.se/english/research/research_databases/compeat/Before_1995/SIMS`

Na prvih dveh mestih sta izstopala Hong Kong in Japonska. Sledile so jim Anglija, Finska in Švedska. Azijske države so še vedno v vrhu vseh mednarodnih primerjav iz znanja matematike, Anglija pa je od takrat doživela padanje znanja matematike med svojimi dijaki in učenci do leta 2011. Od objave rezultatov TIMSS 2011 za osnovno šolo Anglija sedaj intenzivno izboljšuje svoje matematično izobraževanje, tudi z različnimi vzpodbudami za dvig motivacije za učenje matematike v družbi na splošno (znani so npr. novi matematični muzeji). Finska pri nas še vedno velja za uspešno, ker je med drugim med državami OECD pri petnajstletnikih dosegla najboljši rezultat v raziskavi Pisa iz matematičnih kompetenc med petnajstletniki leta 2003 in iz naravoslovnih kompetenc leta 2006. Po prvem uspehu v raziskavi Pisa nekaj časa v TIMSS ni sodelovala in ko se je leta 2011 vrnila v TIMSS, med osnovnošolci ni dosegla najvišjih mest. V matematiki so jih v Pisi 2012 prehiteli Azijci, padli pa so tudi finski naravoslovni dosežki v Pisi 2015. Švedska v letih 1995–2011 kaže močno padanje matematičnega znanja, ki je bilo še večje v osnovni šoli. Po objavi TIMSS 2011 so se lotili temeljite prenove matematičnega izobraževanja (predvsem z dodatnim sistematičnim izobraževanjem učiteljev) in že v letu 2015 zaznali občutno izboljšanje na vseh ravneh. Njihova izkušnja je skladna s splošno ugotovitvijo TIMSS 2015, da je dobra izobraženost učiteljev in stalno dopolnjevanje njihovega znanja ključno za doseganje odličnosti v poučevanju matematike. Na žalost se v Sloveniji dodatno izobraževanje za učitelje izrazito zmanjšuje, še posebej na osnovnošolski ravni vse od leta 2012, ko je bila naša država še zgled drugim po obsegu ponudbe in številu vključenih učiteljev.

Slovenija je vključno z raziskavo 2015 sodelovala v šestih raziskavah matematike in naravoslovja v osnovni šoli in štirih raziskavah matematike in fizike v srednji šoli. V preglednici 2 so prikazani dosežki maturantov izbranih držav za vse izvedbe raziskave TIMSS v srednji šoli.

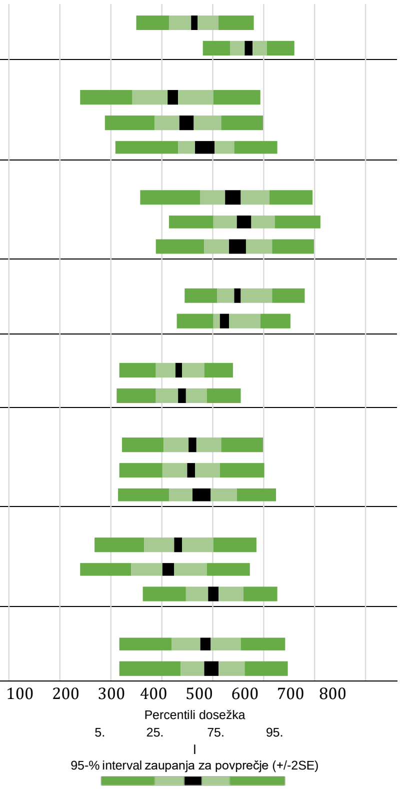
Pri osnovnošolcih gre za obvezno šolanje celotne populacije, zato rezultati osnovnošolcev kažejo nacionalna povprečja. Pri populacijah srednješolcev pa govorimo o indeksu (odstotku) pokritja populacije vseh ustrezno starih mladostnikov v državi. Slednje je še posebej zanimivo v luči primerjav zahtevnih matematičnih programov (natančen opis programov in populacij je na spletni strani `Timss2015.org`).

Skupna ugotovitev raziskave TIMSS Advanced med srednješolci v letu 2015 je, da je znanje matematike v zadnjih dvajsetih letih padlo v večini držav. Edina država, ki je dosegla višje dosežke vsaj v zadnjem obdobju, je Švedska. Vendar tudi njihovi sedanji dosežki še vedno zaostajajo za rezultatom iz leta 1995. V letih 2008 in 2015 so bili najuspešnejši dijaki intenzivnega programa matematike iz Ruske federacije, ki pa jih je v populaciji manj kot 2 odstotka in so torej zelo specializirana skupina. Sledijo jim slovenski dijaki višje ravni mature, ki so po povprečnem dosežku v letu 2015

Države	Indeks* pokritja populacije	Povprečni dosežek	Razlika med leti 2008	Razlika med leti 1995
Francija				
2015	21,5%	463 (3,1)		-107 ↓
1995	19,9%	569 (3,9)		
Italija				
2015	24,5%	422 (5,3)	-27 ↓	-61 ↓
2008	19,7%	449 (7,2)		-34 ↓
1995	14,1%	483 (9,8)		
Ruska federacija 6 ur+				
2015	1,9%	540 (7,8)	-21 ↓	-9
2008	1,4%	561 (7,0)		12
1995	2,0%	549 (8,2)		
Slovenija, višja raven mature				
2015	8,2%	549 (3,4)	26 ↑	
2008	10,1%	523 (5,1)		
Slovenija, osnovna raven mature				
2015	26,2%	433 (3,3)	-6	
2008	30,3%	439 (3,8)		
Slovenija, povprečje				
2015	34,4%	460 (3,4)	2	-18
2008	40,5%	457 (4,3)		-20 ↓
1995	75,4%	478 (9,3)		
Švedska				
2015	14,1%	431 (4,0)	19 ↑	-71 ↓
2008	12,8%	412 (5,6)		-89 ↓
1995	16,2%	502 (5,2)		
ZDA				
2015	11,4%	485 (5,2)		-12
1995	6,4%	497 (7,4)		

↓ Rezultati so se poslabšali.
↑ Rezultati so se izboljšali.

Porazdelitev matematičnega dosežka



Preglednica 2. Trendi 1995–2015 v dosežkih maturantov v izbranih državah.

enaki ruskim vrstnikom. V resnici je znanje slovenskih dijakov višje ravni mature boljše, saj imajo relativno visok indeks pokritja populacije, ki je veliko večji od ruskega. Najvišje znanje matematike med vsemi primerjavami so izkazali francoski dijaki v letu 1995. Na žalost se je do leta 2015 njihov dosežek izrazito poslabšal. Francoski raziskovalci verjamejo, da je razlog za slabo znanje matematike tudi to, da sodelujoči dijaki v svoj program matematike niso izbrani kot posebej uspešni v matematiki, pač pa po svojih študijskih željah. Pokazalo se je, da so ti francoski dijaki po nameravanem vpisu na naravoslovne, tehniške in matematične programe precej podobni slovenskim dijakom višje ravni.

Leta 1995 je Slovenija sodelovala v raziskavi z dijaki, ki so predstavljali kar 75 odstotkov populacije vseh enako starih mladostnikov v naši državi. V tej luči je splošni padec znanja bolj zaskrbljujoč. Po uvedbi poklicne mature leta 2003 je pri nas v zahtevnejšem programu gimnazijske matematike še vedno več kot 30 odstotkov populacije, kar je precej več kot v večini drugih primerljivih držav. Vendar srednješolski program zahtevnejše matematike pri nas ni pogoj za vpis v naravoslovne, matematične in tehniške univerzitetne študije, kakor je v večini drugih držav. Iz podatkov raziskave TIMSS je viden tudi upad vpisa na gimnazije pri nas, od več kot 40 odstotkov vpisanih v splošni gimnazijski program v letu 2008 na 33 odstotkov splošnih gimnazijcev v letu 2015.

Razveseljivo je, da v primerjavah z drugimi državami zelo dobri slovenski dijaki višje ravni mature posebej izstopajo v znanju algebre, ki vsaj v ZDA velja za najelitnejše področje (preglednica 3).

Države/sistemi	Algebra		Analiza		Geometrija	
Francija	469	(2,9)	466	(3,2)	441	(3,7)
Italija	414	(5,1)	433	(5,2)	413	(5,7)
Ruska federacija 6ur+	556	(9,0)	513	(8,0)	560	(8,4)
Ruska federacija	495	(6,3)	459	(5,9)	500	(5,8)
Slovenija, višja raven m.	558	(3,0)	532	(3,7)	532	(3,7)
Slovenija, nižja raven m.	448	(3,5)	408	(4,5)	425	(3,9)
Slovenija	474	(3,5)	437	(4,4)	456	(4,0)
Švedska	422	(4,1)	438	(3,9)	430	(3,7)
ZDA	478	(5,0)	504	(6,0)	455	(5,7)

Preglednica 3. Dosežki iz posameznih poglavij matematike, TIMSS Advanced 2015.

Razlike v znanju matematike v Sloveniji

Eno glavnih sporočil rezultatov mednarodnega merjenja znanja matematike so velike razlike med spoloma. V nobeni državi dekleta ne prekašajo fantov, v precej državah pa so bili fantje bolj uspešni od deklet. Razlike med srednješolci so še posebej zaskrbljujoče vpričo dejstva, da je na ravni osnovne šole precej drugače. V nekaterih državah (tudi v Sloveniji) razlik v dosežkih med spoloma sploh ni, ponekod so dekleta celo uspešnejša.

V Sloveniji so razlike v dosežkih med spoloma v srednji šoli precejšnje. Analiza razlik med spoloma v Sloveniji skupaj s primerjavo dosežkov na maturi pa nam postavlja nekatera težka vprašanja o poučevanju matematike.

V raziskavi TIMSS so fantje v povprečju dosegli kar za 27 točk višji rezultat od deklet (preglednica 4). To je v nasprotju s šolskimi ocenami, ki se nagibajo v korist dekletom pri pouku in na maturi.

Rezultati mature v točkovnih ocenah so bili v letu 2015 za približno 0,5 točke (od 8 točk) višji pri dekletih. Natančen pogled pove, da so bila dekleta uspešnejša od fantov le v skupini osnovne ravni mature (preglednica 5). V

Država	% fantov	Povprečni matematični dosežek Dekleta	(s.n.)	Fantje	(s.n.)	Razlika	(s.n.)
Slovenija, višja raven mature	45	538	(3,4)	562	(5,5)	24*	(3,3)
Portugalska	49	481	(3,0)	483	(3,1)	2	(3,6)
ZDA	51	470	(5,3)	500	(6,4)	30*	(5,8)
Slovenija	40	449	(3,5)	476	(4,9)	27*	(4,7)
Slovenija, osnovna raven mature	39	424	(4,0)	447	(4,7)	23*	(5,2)

*Razlika je statistično značilna.

Preglednica 4. Razlike v matematičnih dosežkih TIMSS Advanced 2015 med spoloma.

	Fantje		Dekleta		Razlika
	Povprečna ocena	SD	Povprečna ocena	SD	Fantje - dekleta
Osnovna raven mature	3,28	0,98	3,84	0,68	- 0,56*
Višja raven mature	6,02	1,60	6,11	1,39	- 0,09
Skupaj	4,08	1,72	4,64	1,47	-0,56*

*Razlika je statistično značilna.

Preglednica 5. Maturitetna ocena iz matematike po spolu in ravni mature.

povprečju so dekleta v primerjavi s fanti pridobila več točk in s tem višjo oceno pri ustnem delu izpita.

V sodelovanju med nacionalnim centrom raziskave TIMSS in Državnim izpitnim centrom smo na ustrezen način izračunali zanimive korelacije med rezultati obeh merjenj znanja. Na podoben način kot v sodelovanju ob TIMSS 2008 [2] smo izračunali korelacije med dosežki TIMSS Advanced, rezultati mature in zaključnimi šolskimi ocenami.

Če primerjamo vsebine obeh preizkusov znanja (Izhodišča TIMSS Advanced [6] in Katalog za maturo), ugotovimo, da bi med rezultati mature in preizkusa TIMSS upravičeno pričakovali zelo korelirane rezultate. Oba sta merila znanje s področja istih vsebin in enako določenih kognitivnih ravni znanja. V povprečju rezultati tudi so primerno korelirani, korelacija med dosežki TIMSS Advanced in pisnim delom mature je visoka, med TIMSS Advanced in ustnim delom mature pa nizka. Pri primerjavi rezultatov med spoloma pa opazimo zanimivo anomalijo (preglednica 6).

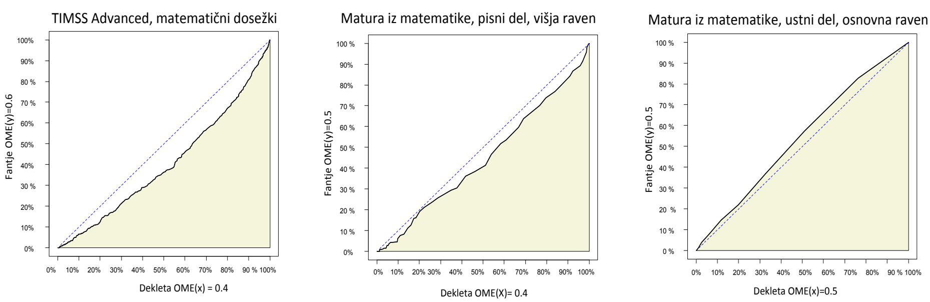
Pričakovano je najvišja korelacija med ocenami na maturi in šolskimi ocenami. Nepričakovano so dosežki TIMSS Advanced najbolj povezani s šolskimi ocenami, edinim merjenjem, ki ni zunanje. Zelo nizka je korelacija med dosežki TIMSS Advanced in ocenami ustnega dela maturitetnega izpita, najverjetneje tudi zato, ker se ustni dosežki dijakov med seboj zelo malo razlikujejo.

Korelirani dosežki	Dekleta	Razlika*	Fantje
Matura, osnovna raven, pisni del + TIMSS	0,56	=	0,57
Matura, višja raven, pisni del + TIMSS	0,59	>	0,56
Matura, osnovna raven, ustni del + TIMSS	0,27	>	0,24
Matura, višja raven, ustni del + TIMSS	0,23	<	0,26
Končne ocene na maturi, osnovna raven (1-5) + TIMSS	0,56	=	0,56
Končna ocena na maturi, višja ravenl (1-8) + TIMSS	0,58	>	0,55
Šolske ocene (1-5) + TIMSS	0,61	<	0,65
Šolske ocene (1-5) + končne ocene na maturi	0,66	<	0,76

*Vse korelacije so statistično značilne.

Preglednica 6. Korelacije med dosežki TIMSS Advanced, maturitetnimi in šolskimi ocenami iz matematike po spolu.

Ker korelacije ne pokažejo sistematičnih razlik med obema rezultatoma na lestvici možnih točk, opazujemo še absolutne dosežke v obeh preizkusih. Grafi ordinalne dominantnosti na sliki 2 primerjajo skupini fantov in deklet glede na njihov dosežek in nazorno pokažejo večji uspeh fantov v pisnem TIMSS Advanced preizkusu in pisni maturi ter večji uspeh deklet v ustnem delu mature. Če bi bili skupini izenačeni, bi črta potekala po diagonali, tako pa kaže dominantnost ene oziroma druge skupine [1]. Prikazana problematičnost ocenjevanja na ustnem izpitu na maturi je sicer že prepoznan problem tudi pri drugih maturitetnih predmetih [9].

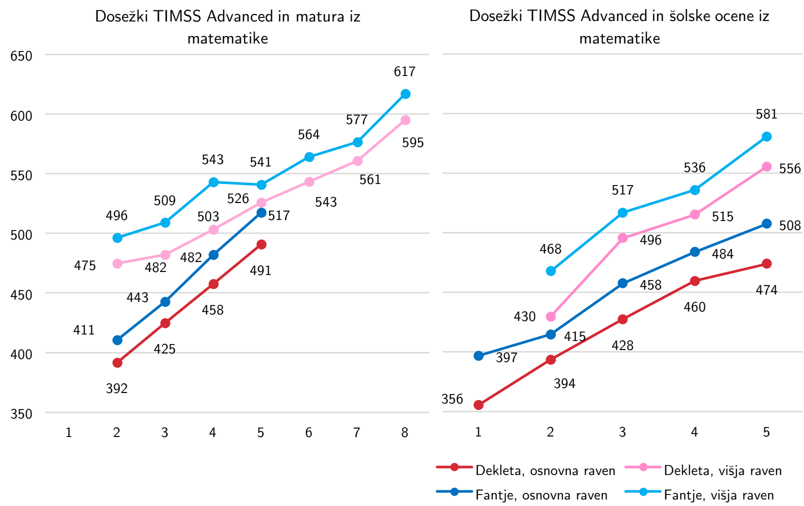


Slika 2. Delež deklet v odvisnosti od deleža fantov, ki so dosegli posamezno število točk na preizkusu TIMSS, pisnem in ustnem maturitetnem preizkusu.

TIMSS Advanced dosežki naraščajo z ocenami fantov in deklet obeh ravni mature (slika 3).

Prikazani dosežki na sliki 3 opozarjajo na dvoje:

1. V raziskavi TIMSS so fantje ob enaki oceni na maturi ali v šoli kot dekleta pokazali višje znanje.
2. Dijaki, ki so na raziskavi TIMSS pokazali enako znanje, so bili v šoli in na maturi ocenjeni z višjo oceno, če so bili dijaki osnovne ravni mature, in z nižjo oceno, če so bili dijaki višje ravni mature.



Slika 3. Dosežki TIMSS Advanced glede na maturitetno in šolsko oceno.

Med enako ocenjenimi dijaki v šoli in na maturi so fantje vedno dosegli višji TIMSS dosežek kot dekleta. Fantje višje ravni mature z maturitetno oceno 5 so v TIMSS pokazali skoraj enako znanje kot dekleta z oceno 6. Skoraj enak dosežek TIMSS imajo fantje z maturitetno oceno 6 kot dekleta z oceno 7. Podobno velja za razlike med osnovno in višjo ravnjo mature. Pri istem dosežku TIMSS so dijaki višje ravni mature iz matematike na maturi in v šoli dobili nižjo oceno kot dijaki osnovne ravni. Enako velja za dijakinje.

Da dijaki z enakim povprečnim znanjem matematike na osnovni ravni mature dobijo višjo oceno kot na višji ravni, ali dekleta višjo oceno kot fantje, prav gotovo nista zaželena rezultata mature. Za višje ocene deklet na ustnem delu mature je lahko več razlogov. Višje ocene deklet na ustni maturi bi lažje razumeli, če bi lahko z dodatno nacionalno raziskavo ugotovili, kateri izmed treh vrst razlogov prevladujejo: ali so dekleta na ustni maturi relativno bolje ocenjena za enako znanje kot fantje morda tudi zato, ker imajo učitelji o njih vnaprej ustvarjeno bolj pozitivno mnenje; ali so dekleta na ustni maturi relativno bolje ocenjena, ker so se bolj temeljito pripravila za ustni izpit iz mature, čeprav matematiko slabše razumejo; ali so dekleta na ustni maturi relativno bolje ocenjena zato, ker svoje znanje bolje demonstrirajo ustno, pisni preizkusi pa tega ne zaznajo? Dejstvo, da pri enakem znanju dobiš višjo oceno na osnovni ravni maturitetnega izpita, zelo verjetno vpliva tudi na manjše zanimanje za maturo na višji ravni, kar je še eden od rezultatov TIMSS raziskave. Od leta 2008 do 2015 se je delež dijakov višje ravni v populaciji zmanjšal z 10 % na 8 % (preglednica 2), zato je nadaljnje raziskovanje problema ocenjevanja na maturi nujno.

Katerih matematičnih sposobnosti matura ne opazi?

Iz primerjav sklepamo, da matura ne prepoznava določenega znanja, ki ga je zaznal TIMSS Advanced med fanti. Primerjava dosežkov med vsebinskimi področji pokaže za več kot 20 točk (pri mednarodnem povprečju 500) višje znanje fantov od deklet v skupini dijakov višje ravni mature, in sicer iz vseh treh vsebin, algebre, analize in geometrije. Med dijaki osnovne ravni imajo fantje višje dosežke pri analizi in geometriji, ne pa pri algebri. Zanimive so razlike med spoloma glede na kognitivne ravni.

V preglednici 7 so povprečni dosežki pri nalogah treh kognitivnih ravni glede na spol in maturitetno oceno. Jasno se vidi, da so razlike med spoloma najvišje na področju sklepanja. Razlike v dosežkih TIMSS Advanced iz znanja dejstev in uporabe znanja niso statistično značilne med dijaki višje ravni mature (z ocenami 6, 7 in 8). V dosežkih iz sklepanja pa so vsi fantje prehiteli enako ocenjena dekleta. Fantje z nižjimi maturitetnimi ocenami (5 ali manj) so v TIMSS Advanced torej dosegli višji rezultat od deklet na vseh treh kognitivnih ravneh.

Maturi-tetna ocena	Povprečni dosežek - sklepanje				Raz-lika	Povprečni dosežek – uporaba znanja				Raz-lika	Povprečni dosežek – znanje dejstev				Raz-lika
	Fantje	(s.n.)	Dek-leta	(s.n.)		Fantje	(s.n.)	Dek-leta	(s.n.)		Fantje	(s.n.)	Dek-leta	(s.n.)	
8	617	(9,2)	585	(8,6)	33*	623	(7,9)	602	(11,0)	21	621	(8,6)	604	(7,2)	17
7	570	(7,6)	544	(7,4)	26*	581	(8,8)	567	(5,5)	14	579	(9,9)	573	(6,5)	6
6	555	(13,1)	521	(6,3)	34*	569	(11,9)	551	(8,9)	19	568	(9,7)	551	(5,5)	17
5	514	(8,0)	481	(5,9)	33*	533	(7,0)	509	(4,9)	23	531	(6,9)	510	(4,8)	21*
4	475	(5,6)	439	(5,0)	37*	493	(5,8)	469	(3,9)	24*	491	(8,2)	468	(3,2)	23*
3	433	(6,2)	407	(6,1)	26*	452	(5,2)	435	(4,3)	16*	450	(7,4)	431	(4,6)	19*
2	402	(8,3)	373	(8,6)	29*	420	(6,9)	402	(6,6)	18*	420	(7,8)	402	(5,1)	18*

*Razlika je statistično značilna.

Preglednica 7. Razlike med dosežki TIMSS Advanced na kognitivnih področjih po maturitetni oceni in spolu.

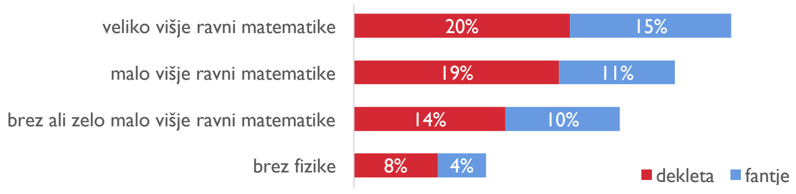
Rezultati nakazujejo, da matura na višji ravni izmeri in še primerljivo nagradi podobno matematično znanje dejstev in uporabo znanja med dekleti in fanti kot TIMSS Advanced. V enakem obsegu kot v preizkusu TIMSS Advanced pa matura najverjetneje ne prepozna znanja najvišje kognitivne ravni, sklepanja. Matura iz matematike na osnovni ravni pa najverjetneje ne prepozna dela matematičnega znanja vseh treh kognitivnih ravni, ki so ga pokazali fantje pri reševanju sicer dokaj zahtevnih nalog TIMSS Advanced.

Kakšne so razlike med šolami?

V letu 2015 je bil vzorec sodelujočih dijakov v raziskavi TIMSS zasnovan tako, da bi lahko pravilno izmerili razlike med dijaki, ki se odločajo za osnovno in višjo raven matematike na maturi. Glede na načrtovane maturitetne predmete dijakov so bile srednje šole s programom splošne gimnazije razdeljene v štiri skupine:

1. Veliko višje ravni mature iz matematike: šole z maturanti (tudi iz fizike), kjer je bil delež kandidatov za višjo raven mature iz matematike višji od 25 %.
2. Malo višje ravni mature iz matematike: šole z maturanti (tudi iz fizike), kjer je bil delež kandidatov za višjo raven mature iz matematike nižji od 25 %.
3. Zelo malo ali brez višje ravni mature iz matematike: šole z maturanti (tudi iz fizike), kjer ni nihče ali so le posamezniki izbrali matematiko na višji ravni.
4. Brez fizike: šole brez maturantov iz fizike.

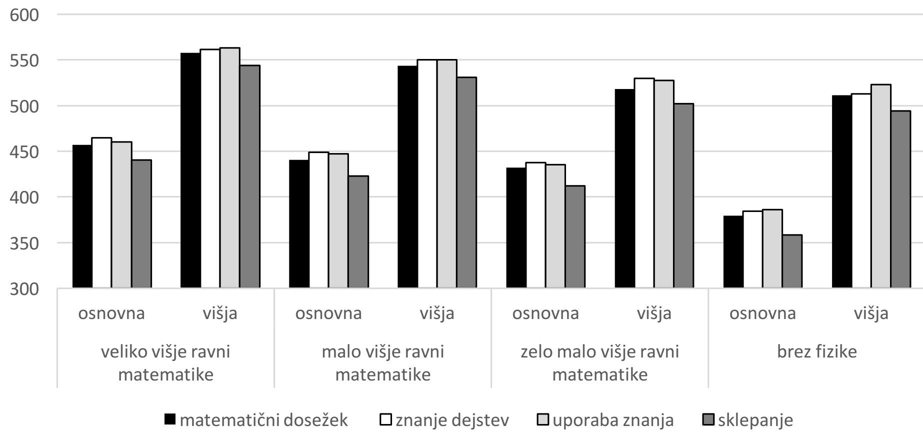
Deleže dijakov in dijakinj glede na celo populacijo splošnih maturantov v posameznih skupinah prikazuje slika 4. Med vsemi maturanti je petina deklet v šolah z veliko višje ravni matematike, vendar pa je petina fantov v šolah, kjer se za višjo raven mature iz matematike odloča malo vpisanih ali pa le posamezniki. V šolah brez fizike je dvakrat toliko deklet kot fantov.



Slika 4. Porazdelitev deklet in fantov po skupinah šol (vzorec).

Rezultati primerjave v znanju pokažejo velike razlike v dosežkih TIMSS med skupinami (preglednica 8). Dosežki padajo od šol z več prijavljenimi na višjo raven mature do šol z manj prijavljenimi na višjo raven mature, med dijaki na osnovni ali dijaki na višji ravni mature. Tudi na šolah z zelo malo prijavljenimi na višjo raven mature so dijaki, ki pa so imeli namen maturo opraviti na višji ravni, na preizkusu TIMSS pokazali veliko višje znanje od dijakov na osnovni ravni. Če upoštevamo, da na teh šolah večinoma prevladuje pouk za osnovne standarde znanja na maturi in ti dijaki nimajo vedno enako intenzivne priprave za višjo raven mature kot na šolah z velikimi razredi kandidatov za višjo raven, je to dober rezultat.

Analize so pokazale, da so v Sloveniji dosežki dijakov pri matematiki močno povezani s štirimi dejavniki: izbiro ravni mature iz matematike, izbiro fizike za maturitetni predmet, spolom in naklonjenostjo do učenja matematike. Z ustreznimi statističnimi modeli je mogoče s temi štirimi



Skupina	% dija-kov	raven mature	% dijakov v skupini	Mate-matični dosežek	s. n.	znanje dejstev	s. n.	uporaba znanja	s. n.	Skle-panje	s. n.
brez fizike	12	osnovna	96	379,60	9,19	384,04	7,89	386,16	9,00	358,07	9,67
		višja	4	511,16	24,30	512,82	31,56	522,98	30,44	494,30	34,91
zelo malo višje ravni m.	25	osnovna	89	431,94	10,29	437,67	10,70	435,05	10,87	412,22	11,79
		višja	11	518,43	10,83	529,71	15,70	527,65	13,49	501,86	14,53
malo višje ravni m.	29	osnovna	79	440,64	4,00	448,60	3,90	447,18	3,44	422,74	4,23
		višja	21	543,34	6,77	550,06	8,07	550,28	7,87	531,14	7,68
veliko višje ravni m.	34	osnovna	58	456,90	3,53	464,47	4,01	460,33	5,53	440,22	4,36
		višja	42	557,57	3,71	561,67	4,77	563,11	4,86	543,82	5,48

Preglednica 8. Skupni uspeh in uspehi na posameznih kognitivnih področjih med skupinami šol in dijaki, ki so izbrali osnovno ali višjo raven mature.

dejavniki pojasniti velik del variabilnosti dosežkov posameznikov in skupin. Podobno je bilo že z raziskavo TIMSS leta 2008, le da se je vpliv posameznih dejavnikov spremenil. Od leta 2008 do leta 2015 opazimo povečanje vpliva »spola« in »ravni mature«, vpliv »naklonjenosti do učenja matematike« pa se je zmanjšal.

Večji pomen spola in ravni mature ter manjši pomen naklonjenosti do matematike v letu 2015 kažejo, da je za dijakovo visoko znanje matematike najpomembnejša izbira višje ravni mature, medtem ko večje veselje do učenja matematike ni tako pomembno. Več matematike se naučijo dijaki, ki izberejo višjo raven mature v primerjavi z dijaki na osnovni ravni, ki imajo do matematike sicer iskreno veselje. Slovenija med drugimi državami (tako v raziskavi TIMSS kot PISA) sicer izstopa s skoraj najnižjim veseljem dijakov do naravoslovnih predmetov in matematike. Kakor kažejo rezultati primerjav v osnovni šoli, je Slovenija z nasprotjem med nenaklonjenostjo učenju matematike in hkrati z relativno visokimi dosežki slovenskih dijakov podobna azijskim državam, za katere je tradicionalno značilna najnižja stopnja veselja z učenjem in obenem najvišji dosežki.

Zaključek

Raziskava TIMSS je obsežna in kompleksna in takšna so tudi njena sporočila. Skupaj je bilo izmerjenih in zabeleženih več sto podatkov za vsakega dijaka in s tem posredno tudi za vsakega učitelja in šolo. V analizi razlik znanja med dijaki smo se osredotočili na povezanost uspešnosti s spolom, na značilnosti nalog preizkusa, na ocenjevanje v šoli in na naklonjenost dijakov do matematike.

V primerjavah se je pokazalo, da učiteljeve ocene matematičnega znanja pri pouku izkazujejo relativno dobro povezanost z neodvisnimi mednarodnimi ocenami znanja, medtem ko so tako ocene pri pouku kot maturitetne ocene (glede na iste dosežke TIMSS) boljše pri dekletih kot pri fantih. V okviru mature pa je ocenjevanje ustnega dela z vidika razlik med spoloma najbolj problematično.

Pri nas običajno težavnost naloge narašča s kognitivno zahtevnostjo. V raziskavi TIMSS pa so naloge sestavljene tako, da je težavnost neodvisna od kognitivnih ravni. Nekatere naloge preverjajo sklepanje in niso težke, druge preverjajo poznavanje dejstev in so tako težke, da jih reši le majhen del dijakov. S TIMSS Advanced 2015 smo zato izmerili znanje sklepanja tudi med srednje in manj uspešnimi dijaki. Fantje so sposobnost sklepanja izkazali v večjem obsegu kot dekleta. Ker pri maturi ne merimo rezultatov po vsebinah in kognitivnih ravneh, tudi ne vemo, ali so dekleta pri maturi morda pokazala več znanja od fantov iz vsebin, ki jih TIMSS ne meri, na primer iz verjetnosti.

Med letoma 2008 in 2015 je stopil v veljavo prenovljeni učni načrt za gimnazije, ki vzpodbuja učitelje k avtonomni določitvi zaporedja obravnave snovi. Obenem so bolj jasno zapisani cilji in vsebine, ki so izbirni in se jih dijaki učijo po presoji učiteljev. Ob zadnji raziskavi TIMSS 2015 so učitelji poročali, da si prizadevajo za poučevanje, ki bi pri dijakih doseglo večje znanje višjih kognitivnih ravni, česar v prejšnjih študijah nismo zaznali. Kljub relativno dobrim dosežkom ne smemo spregledati vse večje razlike med znanjem dijakov obeh ravni mature. Ob opazovanju trendov je treba upoštevati še, da so maturanti, ki so sodelovali v raziskavi leta 2015, opravili devetletno šolo, medtem ko so bili dijaki, ki so sodelovali v TIMSS 2008, zadnja generacija stare osemletne osnovne šole.

Iz povezav med dosežki in odgovori dijakov in učiteljev na spremljevalne vprašalnike je mogoče pridobiti še veliko drugih zanimivih informacij. Na primer to, da se večina slovenskih dijakov z dobrim uspehom iz matematike (običajno na višjem nivoju mature) odloča za študij in zaposlitve s področja matematike, naravoslovja in tehnike.

Podatki raziskave so javno dostopni in veseli bomo, če bodo deležni uporabe. Še posebej si želimo uporabe, ki bi preko zanimivih nadaljnjih ugotovitev pripomogla k boljšemu pouku in celovitejšem znanju matematike. Ogromne mednarodne podatkovne baze so dober vir podatkov pri učenju in razvijanju statistične metodologije. Od junija 2017 so vsi podatki zbrani na javnem spletišču ILSA Gateway (`www.ilsa-gateway.org/`). Trenuten trend je razvoj knjižnic za paket R, s katerimi bi lahko najmodernejše statistične analize opravili tudi za izobraževalne podatke z vsemi njihovimi značilnostmi in omejitvami. Podatki so za nas najbrž zanimivi tudi zato, ker podobnih ne bo več. Slovenija je namreč po letu 2016 prekinila sodelovanje v TIMSS.

LITERATURA

[1] D. Bamber, *The area above the ordinal dominance graph and the area below the receiver operating characteristic graph*, Journal of Mathematical Psychology **12**(4) (1975), 387–415.

[2] G. Cankar in B. Japelj Pavešič, *Dosežki TIMSS in ocene matematike na maturi*, Sodobna pedagogika **2/2010** (2010), 118–140.

[3] B. Japelj in C. Velkovrh (ur.), *Testne naloge Druge mednarodne raziskave znanja matematike* (SIMS – Second International Mathematics Study), Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana, 1992.

[4] B. Japelj Pavešić in K. Svetlik, *Znanje preduniverzitetne matematike in fizike v Sloveniji in po svetu*, Izsledki raziskave TIMSS 2015, zvezek I, Pedagoški inštitut, Ljubljana, 2016; dostopno na `timsspei.splet.arnes.si/files/2017/06/13-TA15-preduniverzitetna.pdf` (geslo timssslo15), ogled 14. 11. 2017.

[5] B. Japelj Pavešić, K. Svetlik, A. Kozina in M. Rožman, *Znanje matematike in fizike med maturanti v Sloveniji in po svetu*, Pedagoški inštitut, Ljubljana, 2009; dostopno na `www.pei.si/Sifranti/InternationalProject.aspx?id=14`, ogled 14. 11. 2017.

[6] I. V. S. Mullis in M. O. Martin (ur.), *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks*, TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Boston, 2014; dostopno na `timssandpirls.bc.edu/timss2015-advanced/frameworks.html`, ogled 14. 11. 2017.

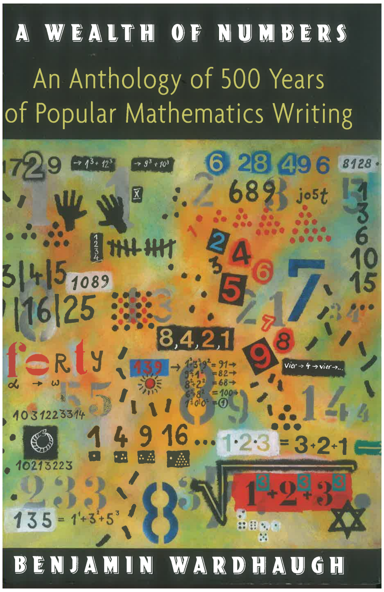
[7] I. V. S. Mullis, M. O. Martin, P. Foy in M. Hooper, *TIMSS Advanced 2015 International Results in Advanced Mathematics and Physics*, TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Boston, 2016; dostopno na `timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/advanced/`, ogled 14. 11. 2017.

[8] TIMSS & PIRLS International Study Center, TIMSS Advanced 2015 Achievement Scaling Methodology, v M. O. Martin, I. V. S. Mullis in M. Hooper (ur.), *Methods and Procedures in TIMSS Advanced 2015*, TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Boston, 2016, od 12.1. do 12.12.; dostopno na `timssandpirls.bc.edu/publications/timss/2015-a-methods/chapter-12.html`, ogled 14. 11. 2017.

[9] D. Zupanc, M. Bren in G. Cankar, *Interno ocenjevanje pri slovenski maturi*, Šolsko polje **23**(3/4) (2012), 113–137; dostopno na `www.pei.si/Sifranti/StaticPage.aspx?id=128`, ogled 14. 11. 2017.

NOVE KNJIGE

Benjamin Wardhaugh, A Wealth of Numbers: An Anthology of 500 Years of Popular Mathematical Writing, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 2012, 370 strani.



Avtor, ki ga bralci Obzornika poznajo že po knjigi *How to read historical mathematics*, je tokrat zbral reprezentativna matematična besedila, ki so jih napisali znani pisci o matematiki v obdobju zadnjih 500 let oziroma po Gutenbergovi iznajdbi tiska. V tem obdobju se je, kot pravi, pojavila in izginila cela vrsta žanrov, tipičnih (v določenem času in okolju priljubljenih) načinov pisanja o matematiki. Ta besedila so bila namenjena različnim matematičnim občinstvom, pojavljala so se v različnih družbenih kontekstih, osvetljevala so različne vidike uporabe matematike in načina razmišljanja o njej.

Enajst poglavij te knjige z nekaj več kot 100 odlomki iz v svojem času znamenitih ali vsaj znanih matematičnih knjig tako pripoveduje nekoliko drugačno zgodbo o zgodovini matematike, kot jo sicer poznamo iz knjig, ki govore o razvoju matematičnih idej. Nekatera poglavja (1, 3, 5 in 7) obravnavajo razvedrilno matematiko: igre in uganke, popularizacije in zabavne zgodbe. Druga (2, 4, 6 in 8) prikazujejo matematiko v učilnici in v različnih uporabah. Poglavji 9 in 10 sta bolj refleksivni, govorita o tem, *kako* naj bi se matematiko učilo in poučevalo, ter *zakaj.* Zadnje, 11 poglavje, pa obravnava avtorju najljubšo tematiko: matematiko v povezavi z literaturo.

Kot pravi Wardhaugh, je bilo zanj najtežje iz obilice besedil o matematiki, namenjenih širšemu občinstvu (torej ne prvenstveno matematikom) sestaviti čim bolj raznoliko antologijo, v kateri bodo uravnoteženo zastopana tako dela, ki pripadajo »glavnemu toku«, kot tudi bolj ekscentrična dela. Tako se, po avtorjevih besedah, v knjigi izmenjavajo slavna in obskurna besedila, elegantna in čudna. Za tiste bralce, ki bi si želeli še več podobnega čtiva, priporoča dve antologiji, za kateri pravi, da sta med najboljšimi: Jacqueline Stedall, *Mathematics emerging: a sourcebook 1540–1900* (Oxford, 2008), ter Marcia Ascher, *Mathematics elsewhere: an exploration of ideas across cultures* (Princeton, 2002).

Fokus te antologije matematičnih besedil je torej za matematično knjigo precej nenavaden: bralec ima namreč priložnost *kritično primerjati* ne samo *matematične vsebine*, ki jih obravnavajo posamezni pisci, temveč tudi njihov *slog pisanja*. Tako v tej antologiji najdemo številna slavna imena, ki jih sicer poznamo iz zgodovine matematike, nismo pa še nikoli dejansko prebrali nobenega odlomka njihovih izvirnih besedil!

Vsak v antologijo vključeni pisec je na kratko predstavljen, na kratko je okarakterizirano tudi delo, iz katerega je vzet izbrani odlomek, omenjeno je npr. kolikokrat je bilo izdano, kateri publiki je bilo namenjeno in kakšne vrste pristop k matematiki je avtor uporabljal.

Tako je npr. Humfrey Baker v svojem delu *The well-spring of sciences* iz leta 1564 (zadnja izdaja iz leta 1670 je bila preprosto imenovana *Baker's Arithmetick*) bralce osupljal s preprostimi aritmetičnimi triki določanja števil, podvrženih določenim transformacijam. Tako je npr. rezultate meta treh kock x, y, z »skril« v trimestno število $100x + 10y + z + 250$, od koder jih je bilo seveda mogoče zlahka rekonstruirati.

Podobno je Jacques Ozanam (1640–1717) že leta 1708 v knjigi *Profitable and delightful problems*, poleg raznih geometrijskih konstrukcij ter matematičnih ugank in trikov, predstavil tudi znani problem prelivanja vina iz posode z 8 pinti s pomočjo praznih posod s po 3 in 5 pinti tako, da na koncu dobiš v eni posodi 4 pinte.

Henry Ernest Dudeney (1857–1930) je v svojem klasičnem delu s področja razvedrilne matematike *Amusements in mathematics* iz leta 1917 podal samo probleme (z ilustracijami), a brez rešitev. Med njimi najdemo npr. probleme, s koliko najmanj nepretrganimi potezami (brez dviga svinčnika s papirja) lahko narišemo določene geometrijske vzorce. Najdemo tudi primere grafov, v katerih je treba poiskati hamiltonski ali pa Eulerjev obhod.

Avtor je v knjigo (z dovoljenjem) uvrstil tudi nekaj znanih iger (Sprouts, Nought and Crosses, Femto, Nim) s spletne strani `nrich.maths.org`, za katero pravi, da je eden izmed najbolj priljubljenih spletnih virov za matematične aktivnosti najrazličnejših vrst.

Drugo poglavje, posvečeno prehodu od aritmetike k algebri, avtor začne z ugotovitvijo, da aritmetika nikoli ni premogla svojega Evklida oziroma dela, ki bi po pomembnosti bilo primerljivo z njegovimi *Elementi*. Med pisci, ki so po odkritju tiska dolgo časa dominirali na tem področju, je najprej omenjen Robert Recorde (1512–1558), eden prvih avtorjev matematičnih učbenikov v angleškem jeziku. V nekoliko dolgoveznem dialogu med učiteljem in učencem je opisano, kako se sešteva in odšteva, npr.: *Če imam npr. 160 knjig v latinskem jeziku in 150 v grškem jeziku in bi rad vedel, koliko jih je skupaj, moram napisati ti dve števili eno nad drugo, večje zgoraj, tako da je prva števka enega pod prvo števko drugega, druga pod drugo, in tako dalje ...*

Thomas Masterson je v svoji knjigi *First booke of arithmeticke* iz leta 1592, namenjeni bolj »nobel« občinstvu (angl. »*aimed at rather more gentlemanly readers*«), zagovarjal stališče (Wardhaugh mu pravi kar »reklamni slogan«), da je aritmetika »*zelo potrebna vsakemu človeku*«. Nato podrobno opiše, kako se množita dve števili, na primeru množenja števil 784378 in 987.

John Tapp (1575–1631) v svoji knjigi *The path to knowledge* iz leta 1621 posnema dialoški slog Roberta Recorda, le da pri njem (namesto učitelja in učenca) nastopata junaka »Theodore« in »Junius«, ki se s skupnimi močmi prebijata skozi osnovna pravila računanja z ulomki, kot v primeru krajšanja ulomkov: $\frac{544}{612} = \frac{272}{306} = \frac{136}{153} = \frac{8}{9}$.

Decimalne ulomke, ki jih je vpeljal zgodaj v 17. stoletju nizozemski inženir Simon Stevin, je v svoji knjigi iz 1695, posvečeni predvsem trgovski matematiki, opisal Edward Hatton takole: »*Decimalni ulomek se od vulgarnega*[1] *razlikuje v tem: da je imenovalec decimalnega ulomka bodisi 10, ali neka potenca 10, npr. 100, 1000, 10000 itd.*«

»Pravilo treh« za računanje četrte količine $d = \frac{cb}{a}$ iz razmerja $a : b = c : d$ ima po avtorjevih besedah številne praktične uporabe, zavzema pa vmesni položaj med numerično specifičnostjo aritmetike in abstrakcijo ter generalizacijo algebre. To pravilo najprej spoznamo v odlomku Wardhaugha Thomsona iz 1771, ki v zvezi z njim niza razna opažanja, kot npr. da je produkt skrajnih členov sorazmerja enak produktu notranjih členov: $ad = bc$, nato pa je opevano še v 40 verzih izpod peresa Nathana Withyja iz leta 1792: »*The Golden rule has always been/ composed of numbers three. /these stated right will find a fourth,/shall in proportion be ... by it ten thousand things are done/ ten thousand different ways,/ and he that learns it perfectly/ will merit fame and praise.*«.

V knjigi najdemo tudi odlomke iz slavnih del, kot je npr. *Newton for the ladies* Francesca Algarottija iz leta 1739: »*Sir Isaac Newton, sem nadaljeval, je osnoval svojo shemo v geometriji, ki jo lahko imenujemo njegova domovina. Najprej je pokazal, da če telo v gibanju privlači točka, bodisi premična bodisi negibna, bo opisalo okrog te točke enake ploščine v enakih časih, in v splošnem, da bodo ploščine sorazmerne časom; in nasprotno, če telo opiše okrog premične ali negibne točke ploščine sorazmerne časom, ga bo privlačila ta točka.*«

O zgodovini diferencialnega računa in Newtonovih odkritjih je izredno zanimivo in filozofsko poglobljeno pisal tudi njegov navdušeni zagovornik

[1] To presenetljivo slabšalno poimenovanje ulomkov z drugačnimi, nedesetiškimi imenovalci naj bi bralce odvrnilo od njihove uporabe? Samo ugibamo lahko, kaj bi na to »cenzuriranje imenovalcev« rekli stari Egipčani, ki so vse ulomke, razen $\frac{2}{3}$, izražali kot vsote ulomkov $\frac{1}{n}$, torej so v bistvu »cenzurirali števce«, različne od 1. Zgodovina se ponavlja.

Voltaire (1694–1778) v treh izmed svojih 24 *Letters concerning the English nation* iz leta 1733, ki ga včasih imenujejo tudi prvo delo razsvetljenstva: »*Labirint in brezno neskončnosti je prav tako nova smer, ki jo je ubral sir Isaac Newton, in dolgujemo mu ključ, s pomočjo katerega lahko sledimo njenim različnim vijuganjem.*«

V knjigi, katere naslov bi lahko prevedli kot *Bogastvo števil*, najdemo tudi modernejša besedila, npr. Carl Boyer v knjigi *A history of Mathematics* iz leta 1968, ki je postavila visoke standarde za vse nadaljnje zgodovinarje matematike, pripoveduje o Eulerju kot o utelešenju analize.

Med odlomki bolj znanih avtorjev je treba omeniti vsaj še W. W. Rouse Balla (1850–1925), ki je v znamenitem delu *Mathematical recreations and problems of past and present times* iz leta 1892, nekakšni zgodovini razvedrilne matematike, poleg sofisticiranih poročil o znamenitih antičnih problemih *podvojitve kocke*, *tretjinjenja kota* in *kvadrature kroga* med drugim pogosto predstavil različne možne rešitve istega problema. Omenja tudi argument (ne pa dokaz!), ki naj bi po njegovem mnenju govoril v prid (kazal na pravilnost) slavnega *Izreka štirih barv* (ki pa je ostal nedokazan še skoraj sto let!).

Obilica in pestrost prispevkov v knjigi je resnično fascinantna: v njej najdemo npr. še poročila o različnih matematičnih in astronomskih instrumentih, sončnih urah, pa eseje o pomembnosti matematike ter modernega znanstvenega raziskovanja izpod peresa Josepha Glanvilla iz leta 1664: *Geometrija, ki je tako temeljno koristna znanost, da brez nje ne moremo v nobeni dobri meri razumeti zgradbe vsevednega arhitekta v kompoziciji velikega sveta, in nas samih. »Theos geometrei« (»Bog geometrizira«) je bil izvrsten Platonov izrek; in vesolje je treba spoznati z umetnostjo, s katero je bilo ustvarjeno.*[2] Wardhaughu je vsekakor uspelo sestaviti izvrsten izbor besedil o matematiki, namenjenih širšemu občinstvu. Podobno, zagotovo nič manj zanimivo in matematično tehtno, antologijo matematičnih besedil in matematičnih piscev bi bilo dobro narediti tudi v našem prostoru iz besedil slovenskih matematikov (preteklih stoletij in vse do danes). Skrajni čas je namreč, da se naučimo promovirati najboljše v naši matematiki tako, kot to počnejo t. i. veliki narodi, med drugim tudi s pisanjem privlačnih knjig za širše občinstvo (in njihovim kasnejšim prevajanjem v druge jezike). Svetovljanstvo namreč ni hlapčevsko klanjanje vsemu tujemu, ampak pomeni tudi kleno spoštovanje lastne znanosti, kulture in jezika, na kar pripadnike t. i. malih narodov nikoli ni odveč znova in znova spominjati.

Jurij Kovič

[2] Vsi samostalniki v tem stavku so, podobno kot zgoraj pri Algarottiju in Voltairu, v izvirniku pisani z veliko začetnico. To se nam danes zdi nenavadno, starinsko, poleg tega pa je skregano s pravopisom.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2017
Letnik 64, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Logotipi raziskave TIMSS in nekaterih organizacij, povezanih s to raziskavo: IEA, Boston College, Pedagoški inštitut in Državni izpitni center. Glej članek na straneh 136–157.