Sistemi linearnih enačb skozi zgodovino

Marjan Jerman

Uvod

Moderno reševanje sistemov linearnih enačb v veliki meri sloni na Gaussovem (1777–1855) članku iz leta 1809, ko je ob opazovanju asteroida Pallas rešil sistem enajstih enačb s šestimi neznankami. Njegovo metodo sta izpopolnila in modernizirala James Joseph Sylvester (1814–1897), ki je leta 1850 uvedel matrike, in Arthur Cayley (1821–1895), ki je matrike povezal s sistemi linearnih enačb.

Bralca na primeru spomnimo, kako danes poteka Gaussova eliminacija. Rešili bomo naslednji sistem linearnih enačb:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 2z + u &= -1\\
x + y + z + 5u &= 5\\
2x + y + z + 5u &= 3\\
x + 2y - 4z + 3u &= 11
\end{aligned}
$$

Postopoma bomo na videz zapleten sistem enačb pretvorili v ekvivalenten, a veliko bolj enostaven in lažje rešljiv sistem. Pri tem bomo izvajali t. i. Gaussove transformacije, ki ohranjajo množico rešitev sistema enačb:

(a) Vrstni red enačb lahko zamenjamo.

(b) Enačbo lahko pomnožimo s številom, ki ni enako 0.

(c) Poljubni enačbi smemo prišteti poljuben večkratnik kake druge enačbe.

Ker se želimo izogniti računanju z ulomki, najprej zamenjajmo vrstni red prve in zadnje enačbe:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 4z + 3u &= 11\\
x + y + z + 5u &= 5\\
2x + y + z + 5u &= 3\\
3x + 2y + 2z + u &= -1
\end{aligned}
$$

Prvo enačbo ohranimo in hkrati uporabimo zato, da z odštevanjem njenih večkratnikov odstranimo spremenljivko x iz ostalih enačb (od druge enačbe odštejemo prvo enačbo, od tretje dvakratnik prve in od četrte trikratnik prve):

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 4z + 3u &= 11\\
-y + 5z + 2u &= -6\\
-3y + 9z - u &= -19\\
-4y + 14z - 8u &= -34
\end{aligned}
$$

Sedaj prepišemo prvo in drugo enačbo ter s pomočjo druge enačbe uničimo spremenljivko y v ostalih enačbah:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 4z + 3u &= 11\\
-y + 5z + 2u &= -6\\
-6z - 7u &= -1\\
-6z - 16u &= -10
\end{aligned}
$$

Na koncu prepišemo prve tri enačbe in se s pomočjo tretje znebimo spremenljivke z v četrti enačbi:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 4z + 3u &= 11\\
-y + 5z + 2u &= -6\\
-6z - 7u &= -1\\
-9u &= -9
\end{aligned}
$$

Sedaj rešujemo enačbe od spodaj navzgor: $u = 1$

$$- 6z - 7u = -1 \Rightarrow -6z = 6 \Rightarrow z = -1$$

- $-y + 5z + 2u = -6 \Rightarrow -y - 5 + 2 = -6 \Rightarrow y = 3$
- $x + 2y - 4z + 3u = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow x = -2$

Postopek je izjemno učinkovit. Tisti, ki jih zanima računalništvo, so morda opazili, da potrebujemo le eno tabelo za shranjevanje koeficientov, ki jih med postopkom zamenjujemo z novimi:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & -19 \\ 0 & -4 & 14 & -8 & -34 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -16 & -10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{bmatrix}.$$

Postopek odkrije tudi bolj neobičajne primere, ko sistem enačb bodisi ni rešljiv ali pa je rešitev več.

Gaussov postopek, recimo, sistem enačb

- $x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 7,$

prevede v sistem

- $x + 2y = 3, \quad 0 = 1,$

ki je očitno protisloven.

Sistem

- $x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 6$

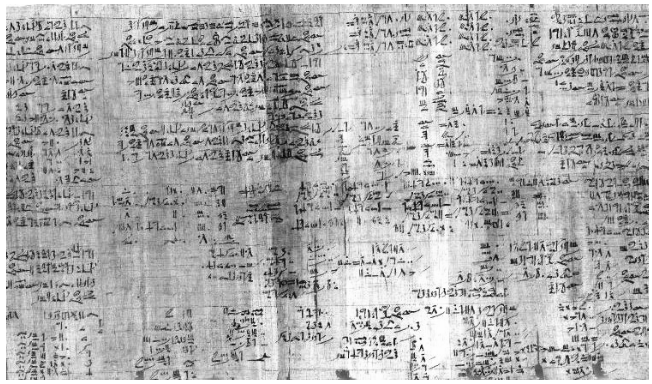
pa prevede na sistem

- $x + 2y = 3, \quad 0 = 0,$

ki ima neskončno rešitev oblike $x = 3 - 2y$.

Že zelo stare civilizacije so pri reševanju praktičnih problemov naletele na sisteme linearnih enačb. Poraja se zanimivo vprašanje, kako so jih reševali, če vemo, da niso premogli niti udobnega matematičnega zapisa niti osnovnega znanja linearne algebre. Poglejmo si nekaj najbolj zanimivih utrinkov iz zgodovine matematike.

Egipt



SLIKA 1.
Rhindov papirus je zvitek širine 32 cm in dolžine 536 cm. Na sliki je manjši sredinski kos papirusa.

Večino stare egipčanske matematike poznamo preko dveh papirusov, ki izvirata iz obdobja nekje med 1850 in 1650 let pr. n. št. Tako imenovani *Rhindov papirus* je škotski arheolog Alexander Henry Rhind (1833–1866) kupil v Luxorju, danes pa ga lahko najdete v Britanskem muzeju. Pisar Ahmes je zapisal 84 problemov. Štiriindvajseti se glasi:

Če neki količini dodamo njeno četrtino, dobimo 15. *Kolikšna je ta količina?*

Problem reši s tedaj običajno metodo napačne predpostavke. Najprej poskusi, če je morda 4 ustrezna rešitev. Ker je

- $4 + \frac{4}{4} = 5,$

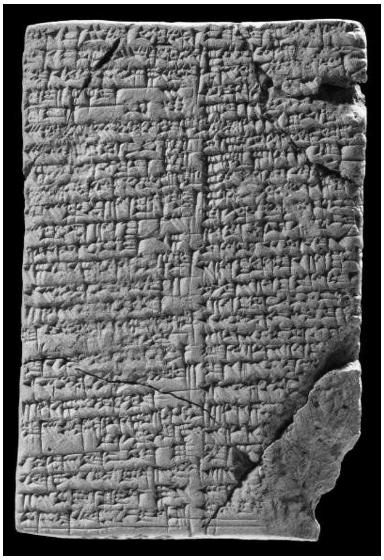
kar je trikrat manj kot želenih 15, napačno rešitev poveča za trikrat in s tem dobi pravo rešitev 12. Res je

- $12 + \frac{12}{4} = 15.$

Radovedni bralci, pomislite, ali lahko takšno sklepanje uporabimo za reševanje bolj zapletenih enačb!

Babilon

O babilonski matematiki vemo veliko več, ker so se dobro ohranili zapisi na glinenih ploščicah. Iz pribli-



SLIKA 2.
Babilonska glinena ploščica VAT8389

žno istega obdobja kot Rhindov papirus izhaja glinena tablica številka 8389, ki jo hranijo v Muzeju antičnega Bližnjega vzhoda v Berlinu. Da bo vsebina tablice lažje razumljiva, najprej navedimo babilonske merske enote: bur in sar sta ploščinski meri, bur = 1800 sar, sar = 36 m^2; kur in sila pa prostorninski meri, kur = 300 sil, sila = liter.

Naloga se glasi takole:

Prvo polje da 4 *kur/bur pšenice drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugega za* 500 *sil. Skupna površina obeh polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je zraslo na posameznem polju?*

V današnjem matematičnem jeziku bi nalogo zapisali kot sistem dveh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + y &= 1800 \\ \tfrac{4\cdot 300}{1800}x - \tfrac{3\cdot 300}{1800}y &= 500 \end{aligned}$$

Babilonci takšnega zapisa niso poznali, prav tako niso poznali Gaussovega postopka eliminacije. Reševanja so se lotili zelo premeteno. Da bo njihova rešitev bolj jasna, jo zapišimo v današnji notaciji.

Najprej so izračunali

$$\frac{x+y}{2} = 900.$$

Nato so uvedli novo spremenljivko

$$z = \frac{x-y}{2}.$$

ki je z velikostima polj povezana z enostavnima zvezama

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 900 + z, \\ y &= \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 900 - z. \end{aligned}$$

S pomočjo nove spremenljivke se druga enačba v sistemu prevede na linearno enačbo

$$\frac{2}{3}(900+z) - \frac{1}{2}(900-z) = 500,$$

ki je ekvivalentna enostavnejši enačbi

$$\frac{7}{6}z = 350.$$

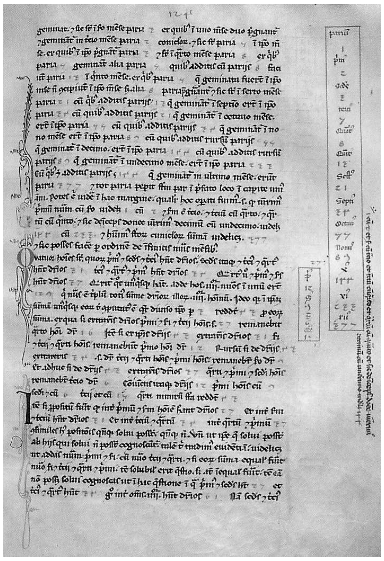
Od tod so dobili $z = 300$, $x = 900 + z = 1200$ in $y = 900 - z = 600$. Tako prvo polje meri 1200 sar, drugo pa 600 sar.

Pripomniti je treba, da je sistematično pridobivanje enostavnejših ekvivalentnih enačb opisal šele Al Khwarizmi (780–850) v svojem delu *Hisab al-jabr w'all-muqabala*. Postopek *al-jabr* v današnjem jeziku dopolni levo in desno stran enačbe tako, da izniči negativne člene, postopek *al-muqabala* pa enačbo uravnoteži, t. j. pokrajša enake vrednosti na obeh straneh enačbe. Radovedni bralec je morda iz nenavadnih arabskih besed razbral, od kod pride beseda algebra.

Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1175–1235) je v svoji knjigi *Liber abaci* zapisal naslednji nenavadni problem o (pozitivnem) premoženju petih mož in nepraznem mošnjičku:

Prvi in drugi mož imata skupaj z mošnjičkom dvakrat več denarja kot ostali trije skupaj. Drugi in tretji imata skupaj z mošnjičkom trikrat več denarja kot ostali trije; tretji in četrti skupaj z mošnjičkom štirikrat več kot ostali; četrti in peti skupaj z mošnjičkom petkrat več kot ostali; peti in prvi skupaj z mošnjičkom šestkrat več kot ostali. Koliko denarja je v mošnjičku?



SLIKA 3.
Stran iz Fibonaccijeve knjige *Liber Abaci* iz leta 1202

Z $x_1, \ldots, x_5$ označimo premoženja posameznih mož, z y pa vsebino mošnjička. Danes bi problem zapisali s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y &= 2(x_3 + x_4 + x_5) \\ x_2 + x_3 + y &= 3(x_1 + x_4 + x_5) \\ x_3 + x_4 + y &= 4(x_1 + x_2 + x_5) \\ x_4 + x_5 + y &= 5(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_5 + x_1 + y &= 6(x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

Tudi z današnjimi metodami bi nas ta sistem petih enačb s šestimi neznankami kar precej namučil. Leonardo pa se je sistema lotil veliko bolj zvito. Opazil je veliko simetrijo v sistemu in vsaki enačbi prištel premoženja mož, ki se nahajajo na desni strani enačbe in hkrati manjkajo na levi. Tako je npr. prvi enačbi prištel na obeh straneh $x_3 + x_4 + x_5$, drugi $x_1 + x_4 + x_5$, ..., zadnji pa $x_2 + x_3 + x_4$. Vsoto $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ označimo z s. S tem sistem enačb prepišemo v obliko:

$$\begin{aligned} s + y &= 3(x_3 + x_4 + x_5) \\ s + y &= 4(x_1 + x_4 + x_5) \\ s + y &= 5(x_1 + x_2 + x_5) \\ s + y &= 6(x_1 + x_2 + x_3) \\ s + y &= 7(x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

Ta sistem je ekvivalenten sistemu:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(s + y) &= x_3 + x_4 + x_5 \\ \tfrac{1}{4}(s + y) &= x_1 + x_4 + x_5 \\ \tfrac{1}{5}(s + y) &= x_1 + x_2 + x_5 \\ \tfrac{1}{6}(s + y) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \tfrac{1}{7}(s + y) &= x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Če seštejemo vse enačbe, se na desni strani premoženje vsakega od mož pojavi natanko trikrat. Tako je

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(s + y) = 3s,$$

$$\frac{459}{420}(s + y) = 3s,$$

torej

$$s + y = \frac{420}{153}s.$$

Premoženje prvega moža dobimo s seštetjem druge in četrte enačbe:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)(s + y) = x_1 + s,$$

$$x_1 = \frac{5}{12}\frac{420}{153}s - s = \frac{22}{153}s.$$

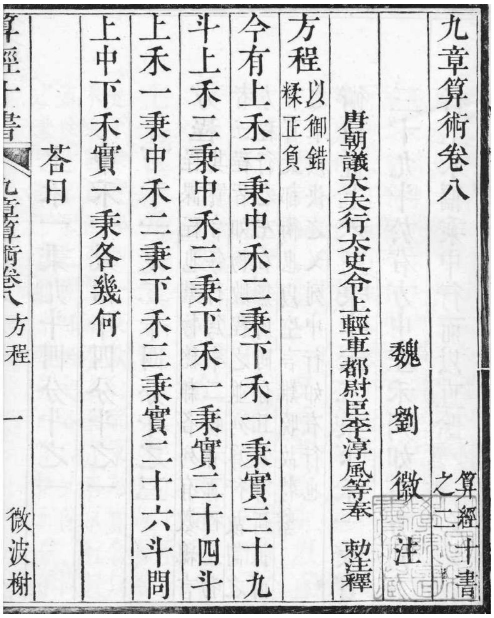
Podobno dobimo premoženje drugega moža s seštetjem tretje in pete enačbe:

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)(s + y) = x_2 + s,$$

$$x_2 = \frac{12}{35}\frac{420}{153}s - s = -\frac{9}{153}s.$$

Ta vrednost pa pomeni, da je drugi mož zadolžen, zato naloga sploh ni rešljiva!

Zaradi spoštovanja zgodovine povejmo, da je Leonardo zadnji del problema rešil malenkost drugače. Ko so se v tretjem sistemu pojavili ulomki, je kar privzel, da je $s + y = 420$. To je storil zato, da se je izognil računanju z ulomki. Število 420 je namreč najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev 3, 4, 5, 6 in 7. Njegov na videz napačen privzetek lahko opravičimo z linearnostjo sistema. Finančno gledano je Leonardo znesek $s + y$ zamenjal v valuto, v kateri je znesek vreden 420 enot.



九章算術卷八　算經十書之二

魏　劉徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　勅注釋

方程以御錯糅正負

今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九

斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗

上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問

上中下禾實一秉各幾何

荅曰

算經十書　九章算術卷八　方程　一　微波榭

SLIKA 4.
Prva naloga osmega poglavja kitajske knjige Devet poglavij matematične umetnosti

Kitajska

Največje presenečenje pa se skriva v kitajski knjigi *Devet poglavij matematične umetnosti*, ki verjetno izvira približno iz let 170–150 pr. n. št.

Prva naloga v osmem poglavju sprašuje takole:

Iz treh snopov najboljše žitarice, dveh snopov slabše in enega snopa najslabše dobimo 39 *skodelic moke; iz dveh snopov najboljše, treh slabše in enega najslabše* 34 *skodelic in iz enega snopa najboljše, dveh slabše in treh najslabše* 26 *skodelic. Koliko skodelic moke dá posamezen snop vsake od žitaric?*

Danes bi nalogo napisali kot sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 39\\
2x + 3y + z &= 34\\
x + 2y + 3z &= 26
\end{aligned}
$$

Kitajci so za zapis števil uporabljali desetiški sistem in bambusove palčke, ki so jih polagali vodoravno ali navpično. Palčke so polagali na nekakšno ploščo, podobno veliki šahovski tabli. V knjigi je zapisana rešitev naloge, ki je sestavljena iz navodil za prestavljanje palčk.

Najprej je predstavljena tabela, ki bi jo z arabskimi števili zapisali takole:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Če pozorno pregledate tabelo, boste opazili, da se v stolpcih od desne proti levi skriva vsebina naloge.

Navodilo pravi, naj se najprej pomnoži vse elemente v drugem stolpcu s prvim elementom tretjega stolpca, potem pa naj se tretji stolpec odšteva od drugega, vse dokler na vrhu drugega stolpca ne dobimo ničle. Tako dobimo novo tabelico:

1	$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$	3
2	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$	1
3	$1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$	1
26	$34 \cdot 3 - 39 \cdot 2 = 24$	39

V jeziku moderne matematike so Kitajci naredili Gaussovo eliminacijo. Mi jo delamo po vrsticah od zgoraj navzdol, oni pa so jo naredili po stolpcih od desne proti levi. Postopek so nadaljevali tako, da so najprej s pomočjo tretjega stolpca uničili zgornji element v prvem stolpcu, na koncu pa še s pomočjo novega drugega stolpca drugi element v novem prvem stolpcu:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & 3\\ \hline
4 & 5 & 2\\ \hline
8 & 1 & 1\\ \hline
39 & 24 & 39\\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & 3\\ \hline
0 & 5 & 2\\ \hline
36 & 1 & 1\\ \hline
99 & 24 & 39\\ \hline
\end{array}
$$

Tako so prišli do tablice, ki predstavlja analogijo našim zgornje trikotnimi matrikam: Iz tablice lahko preberemo, da iz enega snopa najslabše žitarice dobimo $z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$ skodelic moke. Do ostalih dveh donosov so prišli Kitajci podobno kot mi. S pomikanjem proti desni so vsakič dobili vrednost še ene, do sedaj neznane spremenljivke, izražene z znanimi:

- $5y + \frac{11}{4} = 24 \Rightarrow y = \frac{17}{4}$,
- $3x + 2\frac{17}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow x = \frac{37}{4}$.

×××