

Semaforji in barvanje grafov



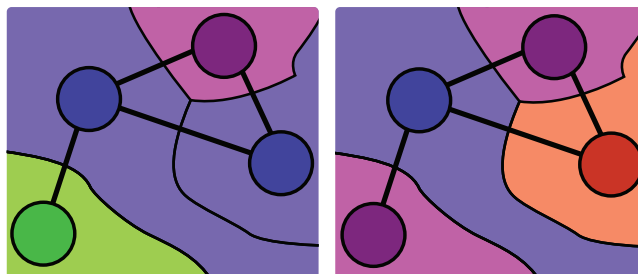
SIMON ČOPAR

→ Namen cestnega omrežja je, da lahko s potjo povežemo poljubni dve lokaciji. To neizbežno vodi v križišča, kjer se poti vozil, namenjenih v različne smeri, morajo sekati. Potrebi po križiščih se lahko izognemo z izrabo tretje dimenzije – z nadvozi. Te uporabimo predvsem pri avtocestah, kjer je pretočnost brez ustavljanja poglobitvenega pomena. Pri drugih cestah, predvsem v naseljih, je to predrago in prostorsko preveč potratno. Tam izkoriščamo nivojska križišča – križišča brez nadvozov in podvozov, kjer lahko varnost zagotovimo s prednostnimi pravili, ki jih morajo vozniki dobro poznati, ali pa s pomočjo semaforja, posebej pri križiščih z visoko pretočnostjo.

Vozniki z vsake ceste v križišču lahko zavijejo v katerokoli smer, česar v nivojskem križišču ne moremo zagotoviti sočasno brez sekanja. Semafor problem križanja poti reši tako, da poti namesto v prostoru razporedi v času. V matematični idealizaciji vsaka stopnja semaforja dovoljuje le poti, ki se med seboj ne križajo. V vseh stopnjah semaforja, preden se cikel ponovi, morajo priti na vrsto vsi, ne glede na to, kam zavijajo.

Kot matematiki se lahko vprašamo, kolikšno je najmanjše število stopenj, ki jih potrebujemo za neko križišče, in koliko različnih kombinacij semafornih stopenj je mogočih. Pred matematično obravnavo moramo problem preoblikovati v bolj čisto in pregledno obliko. Pri tem so bolj kot začetne in končne točke poti pomembne poti same.

Za vsako križišče moramo najprej poiskati vse poti. Pri tem bomo izpustili zavijanje v desno, saj je to



SLIKA 1.

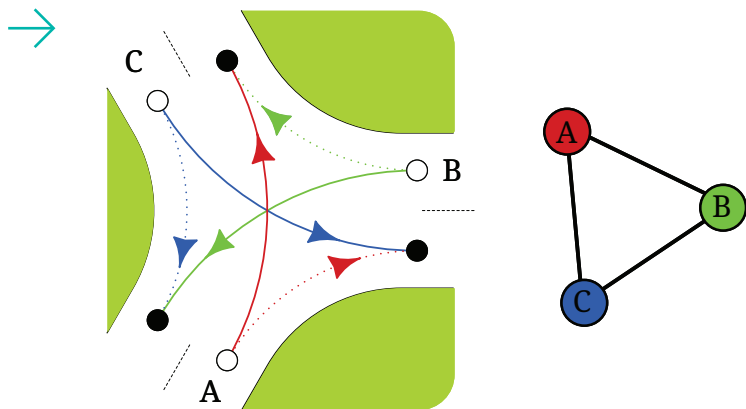
Grafe in zemljevide barvamo tako, da so sosedji različnih barv. Levo: neveljavno barvanje. Desno: veljavno barvanje.

vedno mogoče vsaj takrat, ko je omogočen tudi promet naravnost, ter na splošnem vedno, kadar cesta na desni nima drugih »pritokov«. Za desne zavoje bo zato v semafornem ciklu vedno prostor, ko določimo vse drugo. V nekaterih križiščih ima desni zavoj svoj pas, ki ni odvisen od semaforja. V ZDA je previdno zavijanje v desno dovoljeno celo pri rdeči luči, kar smo v preteklem letu na nekaterih izbranih križiščih dovolili tudi v Sloveniji. Prav tako bomo prepovedali polkrožno obračanje.

Vozniki vemo, da je največji izziv zavijanje v levo, saj s tem sekamo pot nasproti vozečim vozilom. V praksi semaforji pogosto nimajo posebne stopnje za zavijanje v levo, ampak vozniki čakajo v sredini križišča, da se jim pot sprostí. Za našo analizo bo bolj ugodno, da ta primer idealiziramo kot sosledje dveh stopenj – prvo za vožnjo naravnost in drugo za zavijanje v levo. Tako bodo vse naše semaforne stopnje resnično brez sekanja poti.

Naslednji korak je, da poiščemo vse pare poti, ki se križajo. Če se poti križata, vemo, da se morata pojaviti v različnih stopnjah semafornega cikla. Množico poti in križajočih se parov bomo predstavili matematično kot graf – množico vozlišč (poti) in pove-





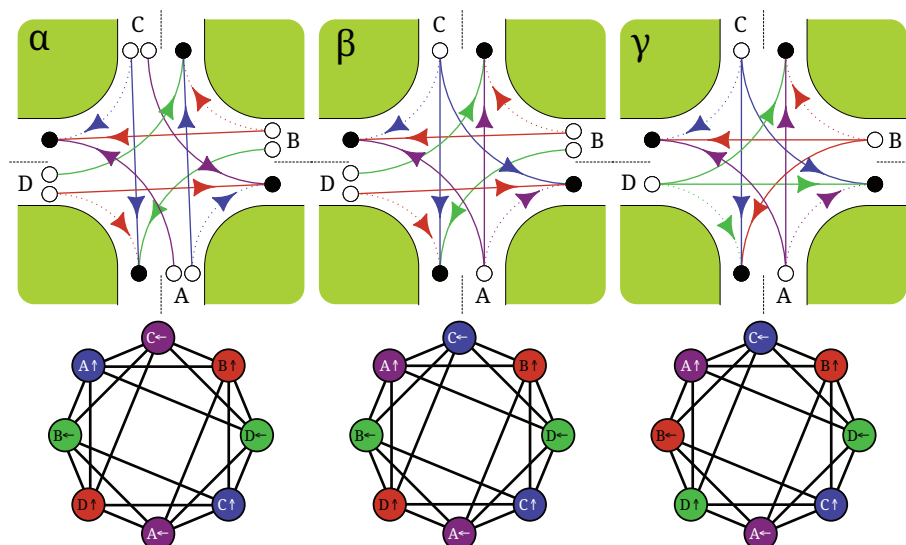
SLIKA 2.

Križišče treh cest in pripadajoči graf. Puščice istih barv pomenijo poti, ki imajo hkrati zeleno luč. Te barve ustrezajo barvam vozlišč grafa.

zav (prepovedanih parov poti). Vsako križišče lahko predstavimo torej kot neusmerjen graf, pri čemer je pogoj, da vozlišča, ki so med seboj povezana, ne smejo biti v isti stopnji semafornega cikla. To prepoznamo kot znano vprašanje iz teorije grafov: z najmanj koliko barvami lahko pobarvamo graf (ali zemljevid), da sta dve sosednji vozlišči (državi) vedno različnih barv (glej sliko 1). Še več, vsako različno barvanje grafa pripada drugačnemu semafornemu ciklu, permutacija barv pa ustreza menjavi vrstnega reda stopenj cikla.

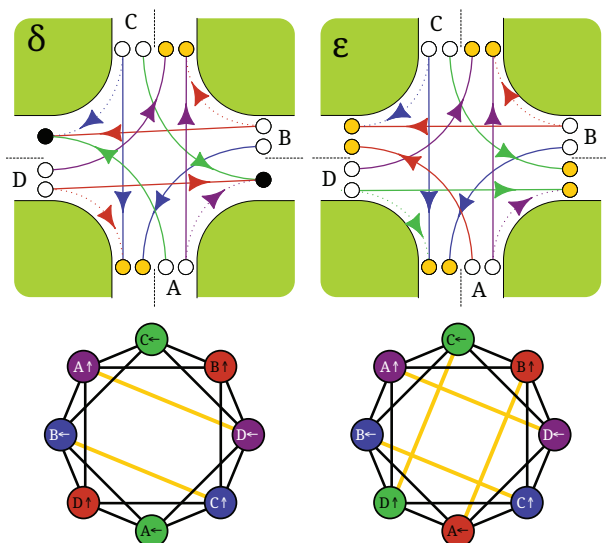
Pri določanju, katere poti se sekajo, moramo sprejeti še nekaj odločitev. Kadar se poti križata v sredini križišča, gre vsekakor za prepovedano kombinacijo. Če se sekata na začetku, pa to pomeni zavijanje z iste vstopne ceste. To ne predstavlja nevarnosti za trk, je pa problematično, če imata dva zaporedna avtomobila namen zavijati v smereh, ki *nimata* hkrati zelene luči. V teh primerih moramo imeti več vstopnih pasov in torej širšo cesto. Če se poti sekata v končni točki, imamo drugačen problem – če v isti izhodni pas *hkrati* vstopajo vozila z različnih smeri, imamo nevarnost trka. Razrešitev te nevarnosti lahko prepustimo previdnosti voznikov, ali pa jim dodelimo več izstopnih pasov, kar spet zahteva širšo cesto. Ta presečišča lahko tudi enostavno prepovemo in dobimo bolj stroge pogoje za veljavne semaforne stopnje.

Najenostavnejši primer je križišče treh cest na sliki 2, katerega pripadajoči graf je kar trikotnik. Tega lahko pobarvamo le na en način, in to s tremi barvami. Raje se posvetimo bolj zanimivemu primeru križišča štirih cest, najprej za primer, ko prepovemo sekanje v končni točki. Pripadajoči graf lahko pobarvamo s štirimi barvami, torej potrebujemo štiri stopnje semafornega cikla. Slika 3 prikazuje vse tri možne semaforne cikle s pripadajočimi pobarvanimi grafi. Semaforni cikel α je najbolj tipičen: najprej imamo vožnjo naravnost v smereh vzhod-zahod, sledi zavijanje v levo z istih cest, potem pa isto ponovimo še za smeri sever-jug. Ta semaforni cikel za-



SLIKA 3.

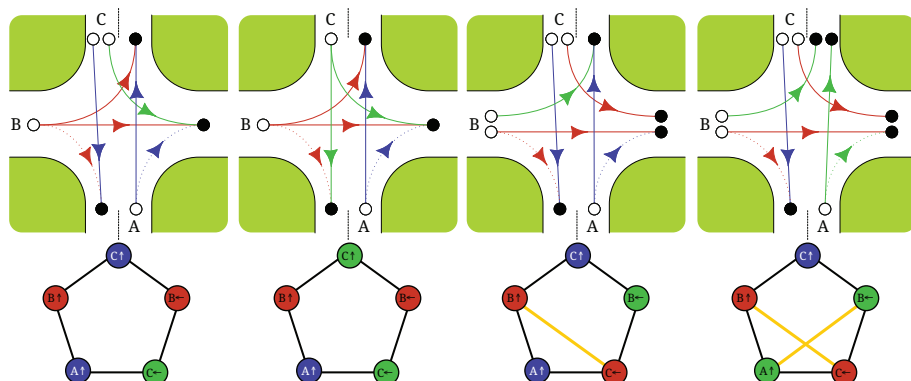
Graf za križišče štirih cest lahko pobarvamo na tri načine. Vozlišča istih barv predstavljajo hkratno zeleno luč, in na grafu niso povezana.



SLIKA 4.

Križišče s štirimi cestami z dovoljenim hkratnim zavijanjem v isto smer.

teva ločen pas za zavijanje v levo. Pri manjših križiščih to ni rešeno z ločeno stopnjo semaforja, ampak vozniki le počakajo v križišču. Cikel γ je najenostavnejši, saj za vsako cesto odpremo zavijanje v vse smeri, medtem ko na preostalih treh cestah čakajo. Ta ne zahteva niti dodatnih pasov niti čakanja v križišču, je pa redko v rabi, saj je v praksi ena cesta prednostna in je zavijanja v levo malo. V teh primerih ima cikel α večji pretok, sploh če je dovolj prostora za čakanje v sredini križišča. Cikel β je kombinacija obeh ciklov – naravnost in levo v smereh vzhod-zahod, posamični cesti v smereh jug in sever.



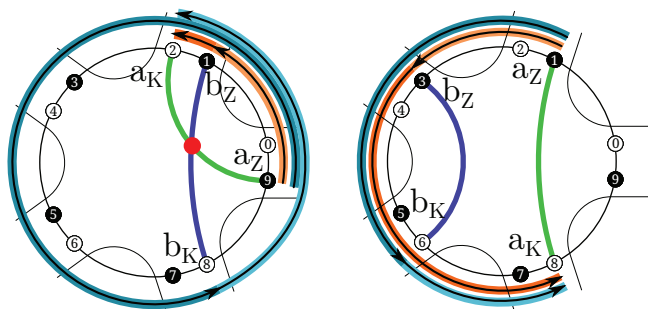
SLIKA 5.

Križišče običajne ceste (sever-jug) in enosmernega izvoza z avtoceste z zahoda in nazaj na avtocesto proti vzhodu.

Če dovolimo tudi sekanje v končni točki, dobimo še dva dodatna cikla, prikazana na sliki 4. V primeru δ pride do hkratnega zavijanja na cesti sever in jug, v primeru ϵ pa v vse štiri izhodne ceste. Na grafu so z rumeno označene povezave, ki pripadajo sekanju v končni točki.

Še zanimivejši problem je križišče običajne ceste in avtocestnih priključkov, kjer je ena izmed enosmernih cest samo vstopna, druga pa samo izstopna. V tem primeru je možnih poti pet, dobljeni graf, ki je kar cikličnen, pa lahko pobarvamo z le tremi barvami, in to na štiri možne načine, prikazane na sliki 5. Opazimo pa, da se prva dva načina razlikujeta le v barvi $C \uparrow$ – to pomeni, da lahko ta dva cikla združimo in pustimo zeleno luč $C \uparrow$ v dveh stopnjah cikla, in povečamo pretočnost križišča. Podobno velja za preostala dva načina – v tem primeru smer $A \uparrow$ lahko pobarvamo z dvema barvama, ne da bi prišlo do presečišč. V resnici imamo torej le dve možnosti.

Kako pa računsko, brez risanja, ugotovimo, ali se dve poti sekata? V ta namen si bomo mislili, da vse vstopne in izstopne točke v križišče ležijo na krožnici in jih oštevilčili s števili od 0 do $n - 1$ v smeri urnega kazalca. a_Z in a_K naj bosta začetni in končni indeks prve poti, b_Z in b_K pa začetni in končni indeks druge. Zdaj potujmo zgolj v smeri urnega kazalca, in poskusimo na poti od a_Z do a_K obiskati eno izmed krajišč poti b , kot na sliki 6. Če sta obe krajišči b vmes ali obe zunaj intervala med a_Z in a_K , potem bomo opisali enak kot za obe krajišči b : bodisi bomo šli direktno od a_Z do a_K in s tem že srečali obe krajišči, ali pa bomo morali enkrat naokrog, da pobereimo obe krajišči. V tem primeru se poti ne sekata. Če pa je med a_Z in a_K le eno krajišče b , se poti sekata. V tem primeru sta opisana kota različna.



SLIKA 6.

Prepoznavanje presečišč s pomočjo cikličnega sprehoda. Levo: sprehoda 9-1-2 in 9-8-2 sta različno dolga, torej se poti sekata. Desno: sprehoda 3-1-8 in 3-6-8 sta enako dolga, torej se poti ne sekata.

Če z $\text{mod}(x, n)$ pišemo pozitivni ostanek x po deljenju z n , potem se poti ne sekata, če in samo če velja enačba

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \text{mod}(b_Z - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_Z, n) = \\ & = \text{mod}(b_K - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_K, n). \end{aligned}$$

To pa je nekaj, kar računalnik lahko preveri brez znanja geometrije.

Videli smo, da s pomočjo teorije grafov lahko sistematično opišemo možne semaforne cikle in izberemo tistega, ki najbolje ustreza naši situaciji. Tovrstno analizo lahko naredimo za poljubno križišče, na primer za križišče petih cest, pri čemer ugotovimo, da imamo 32 možnih 5-stopenjskih semafornih ciklov, če prepovemo zavijanje na isti izhodni pas. Tako kompleksna križišča so nepraktična in za voznike nepregledna, predvsem pa imajo nizko pretočnost. V takih primerih raje uporabimo dve zaporedni križišči, najraje pa kar krožišče. Krožišča nimajo težav s križanjem poti, še vedno pa imamo poti, ki se zlivajo v isti vozni pas – vozila se vključujejo na pas, po katerem z leve lahko prihaja vozilo, ki je že v krožišču.

Bralce vabim, da med čakanjem pri rdeči luči opazujejo, katera različica semafornega cikla velja, kako se razvrščajo v pasove, in kako se razrešujejo zavoji, ki jih semafor mogoče ne regulira ločeno. S tem bo tudi čakanje mogoče postalo nekoliko manj nadležno.

× × ×

Tri lastnosti števila 2023

↓↓↓

MARKO RAZPET



1. Število 2023 je petkrat pohlevno, ker se ga da izraziti na pet načinov kot vsoto nekaj zaporednih naravnih števil, denimo $x, x+1, \dots, x+n-1$. Pri tem sta števili x in n naravni. Veljati mora torej relacija

$$\blacksquare \quad x + (x+1) + \dots + (x+n-1) = 2023.$$

Vsoto na levi strani znamo poenostaviti, tako da dobimo

$$\blacksquare \quad \frac{n(x + (x+n-1))}{2} = 2023$$

oziroma

$$\blacksquare \quad n(2x + n - 1) = 2 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Desno stran te relacije lahko zapišemo na pet načinov kot produkt dveh faktorjev: $2 \cdot (7 \cdot 17^2)$, $14 \cdot 17^2$, $34 \cdot (7 \cdot 17)$, $17 \cdot (14 \cdot 17)$, $7 \cdot (2 \cdot 17^2)$. Zato lahko izberemo $n = 2$, $2x + n - 1 = 7 \cdot 17^2$ in dobimo $x = 1011$. Podobno sledi za $n = 14$, $2x + n - 1 = 17^2$ še $x = 138$ itd. To pomeni, da veljajo zapisi

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 2023 = 1011 + 1012 = 138 + 139 + \dots + 151 \\ & = 43 + 44 + \dots + 76 \\ & = 111 + 112 + \dots + 127 \\ & = 286 + 287 + \dots + 292. \end{aligned}$$

2. Število 2023 je kongruentno, kar pomeni, da obstaja pravokoten trikotnik, ki ima za stranice racionalna števila in ploščino 2023.

Ker je $2023 = 7 \cdot 17^2$, je dovolj pokazati, da je 7 kongruentno število. Ni vsako naravno število kongruentno. Najmanjše kongruentno število je 5, kar je vedel že Fibonacci.

Pravokotne trikotnike, ki imajo za stranice a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) naravna števila, to je pitagorejske trikotnike, znamo poiskati s formulami

$$\blacksquare \quad a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2.$$