

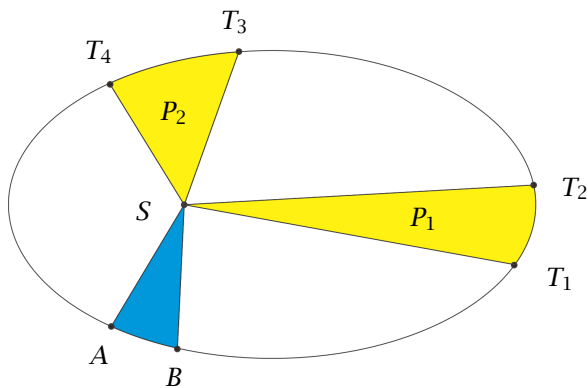
Kako je Isaac Newton dokazal drugi Keplerjev zakon?



ROBERT HAUKO IN SIMON ŠPACAPAN

→ Svoja prva dva zakona o gibanju planetov je Johannes Kepler postavil leta 1609 na podlagi podatkov o gibanju planetov okoli Sonca, pri tem pa je uporabil podatke, ki jih je nekaj desetletji pred njim zbral Tycho Brahe. V prvem zakonu pove, da se planeti gibljejo okrog Sonca po elipsah, Sonce pa se nahaja v enem od gorišč elipse. Drugi Keplerjev zakon, imenovan tudi *izrek o ploščinski hitrosti*, pa se glasi tako:

Daljica, ki povezuje planet in Sonce, opiše enake ploščine v enakih časih.



SLIKA 1.

Ploščina modrega območja je sorazmerna s časom potovanja od A do B.

Na zgornji sliki je Sonce označeno s S in se nahaja v gorišču elipse, po kateri se giblje planet. Ker sta ploščini P_1 in P_2 enaki, je po Keplerjevem zakonu čas, v katerem planet opravi pot od točke T_1 do T_2 ,

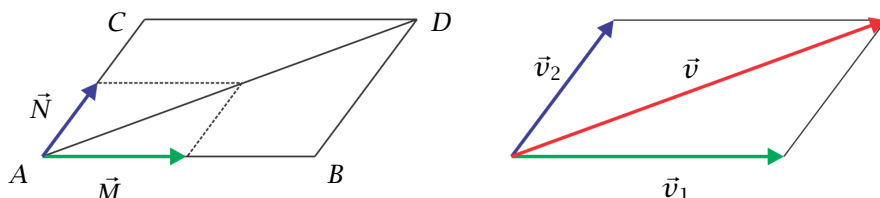
enak času, v katerem opravi pot od T_3 do T_4 . Keplerjev zakon lahko z drugimi besedami izrazimo tudi tako:

Čas gibanja planeta od točke A do točke B je sorazmeren s ploščino območja omejenega z daljicama SA, SB in delom elipse od A do B (v smeri gibanja).

Planeti se torej gibljejo hitreje, ko so bližje Soncu in počasneje, ko so dlje stran. Kepler zakona, ki ga je postavil na podlagi podatkov, ni znal dokazati ali matematično argumentirati — to je storil kakšnih sedem desetletij kasneje Newton. V tem članku se bomo sprehodili po Newtonovih stopinjah ter predstavili korake in matematične argumente, s katerimi je utemeljil Keplerjev zakon. Newton je izpeljavo, ki ji bomo sledili tudi mi, zapisal v knjigi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ki velja za enega največjih dosežkov v fiziki in znanosti nasplošno in v kateri med drugim tudi izpelje gravitacijski zakon, s katerim natančno opiše gibanje planetov v Sončnem sistemu.

Omeniti je treba, da je bila edina Newtonova predpostavka, iz katere je izpeljal Keplerjev zakon, da na telo deluje sila proti nepremični točki v prostoru. Pri tem pa velikost te sile in tirnica, po kateri se giblje telo, nista znani, in kot bomo videli v nadaljevanju, tudi nista pomembni. *Propositio I. Theorema I.*, v katerem je zapisan Keplerjev zakon¹, torej velja za vsakršno gibanje telesa, na katerega deluje sila proti nepremični točki v prostoru. V izpeljavi bomo tudi videli, da je vsako takšno gibanje telesa ravninsko.

¹*Propositio I. Theorema I.* se pojavi na začetku drugega poglavja prve knjige *Principie* in se glasi tako: Ploščine, ki jih gibajoča telesa opišejo z radiji, ki jih narišemo k nepremičnemu središču sile, ležijo v isti nepremični ravnini, in so sorazmerne s časi, v katerih so opisane.



SLIKA 2.

Razlaga Newtonove trditve.

Pa pojdimo po Newtonovih stopinjah! Preden se poglobimo v Newtonovo izpeljavo, bomo navedli trditev, ki jo Newton uporabi v njej.²

Če na telo delujeta dve sili, potem telo opravi pot po diagonali paralelograma v enakem času, kot bi opravilo pot po stranicah tega paralelograma, če bi ti dve sili delovali na telo ločeno.

Če telo miruje v točki A in nanj deluje (za kratek trenutek) zgolj sila $\vec{M}$, se telo giblje premo enakomerno po daljici AB in v danem času prispe do točke B . Podobno, če na telo deluje zgolj sila $\vec{N}$, se telo giblje premo enakomerno po daljici AC , ter v enakem času prispe do točke C . Ko pa na telo delujeta obe sili hkrati, se telo premo enakomerno giblje po diagonali AD in v enakem času prispe do točke D (slika 2, levo). Z drugimi besedami, vsota hitrosti $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ je hitrost $\vec{v}$ (slika 2, desno). Trditev velja tudi za sile, premike, pospeške itd. in predstavlja osnovo seštevanja vektorskih količin.

Sedaj pa pojdimo k dokazovanju Keplerjevega zakona. Naj bo S (nepremična) točka v prostoru, in naj sila vselej deluje v smeri proti tej točki. Telo se na začetku nahaja v točki A . Časovni interval, v katerem bomo opazovali gibanje telesa, razdelimo na enake dele in predpostavimo, da v prvem delu časa telo opravi pot od točke A do točke B , ob tem zane-marimo delovanje sile in upoštevamo zgolj njegovo premo enakomerno gibanje po daljici AB (slika 3).³ Ko se telo nahaja v točki B , bi ob odsotnosti vsakršne sile, nadaljevalo pot po daljici Bc , ki je po dolžini enaka daljici AB (tukaj Newton upošteva, da so časovni intervali enako dolgi).

Vendar v točki B predpostavimo, da sila deluje z velikim sunkom in telesu doda konstantno hitrost v smeri vektorja $\vec{BS}$. Če uporabimo trditev, ki smo jo navedli zgoraj, in upoštevamo inertno hitrost telesa v smeri vektorja $\vec{BC}$, ter hitrost v smeri vektorja $\vec{BS}$ ugotovimo, da se telo začne gibati po diagonali paralelograma $BcCV$ in na koncu drugega časovnega obdobja prispe do točke C . Tako smo dobili geometrijsko konstrukcijo, za katero velja naslednje:

- Trikotnik BCS leži v isti ravnini kot trikotnik ABS .
- Ploščina trikotnika BcS je enaka ploščini trikotnika ABS .
- Ploščina trikotnika BcS je enaka ploščini trikotnika BCS .

Zgornje trditve lahko hitro razmislimo tako: ker daljici Bc in BV ležita v isti ravnini kot trikotnik ABS sledi, da paralelogram $BcCV$ leži v isti ravnini kot trikotnik ABS , in zato tudi BCS leži v isti ravnini kot trikotnik ABS (s tem smo dokazali prvo točko). Trikotnika BcS in ABS imata isto višino in osnovnici enakih dolžin, torej imata enaki ploščini (to dokazuje drugo točko). Podobno velja, da imata trikotnika BcS in BCS isto višino, saj je BV vzporedna s cC , in ker imata skupno osnovnico SB , sledi, da imata enako ploščino (s tem smo dokazali tretjo točko).

Iz treh zgornjih lastnosti sledi dvojje: prvič, gibanje telesa (v prvih dveh časovnih intervalih) je ravninsko, saj daljici AB in BC ležita v isti ravnini, in drugič, ploščini trikotnikov ABS in BCS sta enaki. S tem smo torej razmislili, da sta ploščini območij, ki ju opiše daljica, ki povezuje pot, po kateri se giblje telo s točko S , v prvem in drugem časovnem intervalu enaki.

Opazimo, da so zgornje ugotovitve neodvisne od dolžine daljice BV in torej veljajo ne glede na to, kako veliko hitrost v smeri vektorja $\vec{BS}$ dodamo telesu v točki B , oziroma so neodvisne od velikosti sile, ki deluje proti točki S .

²Trditev je zapisana v Corollarium I, na začetku *Principie*, in se pojavi neposredno po zapisu treh Newtonovih zakonov. Trditev navajamo skladno z Newtonovo dikcijo.

³Spomnimo se, da (po 1. Newtonovem zakonu) telo, na katerega ne deluje nobena sila, bodisi miruje ali pa se giblje premo enakomerno.



Postopek ponovimo na vseh delih časovnega intervala: v točki C predpostavimo, da sunek sile deluje proti točki S in doda telesu hitrost v smeri vektorja $\vec{CS}$ ter ga tako preusmeri iz svoje inertne smeri Cd v smeri po daljici CD proti točki D . Tudi tukaj konstrukcijo naredimo tako, da je $|Cd| = |BC|$, in z analognimi argumenti kot zgoraj pridemo do sklepa, da je ploščina trikotnika CDS enaka ploščini trikotnika BCS , ki pa je enaka ploščini trikotnika ABS .

Tako vidimo, da je ploščina območja, ki ga opiše daljica, ki povezuje pot telesa s točko S , sorazmerna s številom trikotnikov, ki jih to območje vsebuje. Ker pa je število trikotnikov enako številu časovnih delov, sledi, da je ploščina območja sorazmerna s časom.

Newton dokonča izpeljavo tako, da število trikotnikov pošlje v neskončnost, dolžine stranic AB, BC, CD (in tako naprej) pa proti 0. Gre za pomemben korak, ki predstavlja osnovo infinitezimalnega računa in prehod od diskretne k zvezni sliki. Pri tem ne navaja podrobnosti (posebej pa ne navaja, kako veliki naj bodo zamiki v smeri točke S , v odvisnosti od dolžine časovnega dela), vendar trdi, da poligonska krivulja $ABCD$ (in tako naprej), po kateri se giblje telo, konvergira (limitira) proti ukrivljeni liniji ⁴, ko število trikotnikov pošljemo v neskončnost in ko delovanje sile proti točki S upoštevamo vedno bolj

SLIKA 4.

pogosto v »neskončno« majhnih časovnih zamikih. Kako si lahko predstavljamo približevanje poligonske krivulje k ukrivljeni liniji, je prikazano na sliki 4. Rdeče in modro sta poligonski krivulji, in ko število daljic poligonske krivulje pošljemo v neskončnost, le-ta konvergira proti ukrivljeni liniji (zeleno na sliki 4).

Ker je ploščina območja med poligonsko krivuljo in točko S sorazmerna s časom, ki ga telo potrebuje za pot po tej poligonski krivulji, velja enako tudi za ukrivljeno linijo, proti kateri konvergirajo poligonske krivulje. S tem Newton zaključi izpeljavo Keplerjevega zakona.

V nadaljevanju Newton dokaže, da na vsako telo, ki se giblje pospešeno v prostoru in ima konstantno ploščinsko hitrost (glede na izbrano točko v prostoru), deluje sila v smeri proti tej točki. Drugi Keplerjev zakon torej natanko določa gibanja teles s konstantno ploščinsko hitrostjo – to so tista gibanja, na katera deluje sila v smeri nepremične točke. Keplerjevi zakoni zasedajo pomembno mesto v fiziki, saj jih je Newton uporabil pri izpeljavi gravitacijskega zakona. Opisani primer pa kaže na to, da je pot do pomembnih znanstvenih odkritij običajno polna ovinkov, na njih pa spoznanja iz različnih področij lahko sovpadajo in druga drugo tudi podpirajo.

Avtorja se zahvaljujeta Jani Padežnik Gomilšek in Borutu Zalarju za njune komentarje, popravke in pomoč pri pisanju članka.