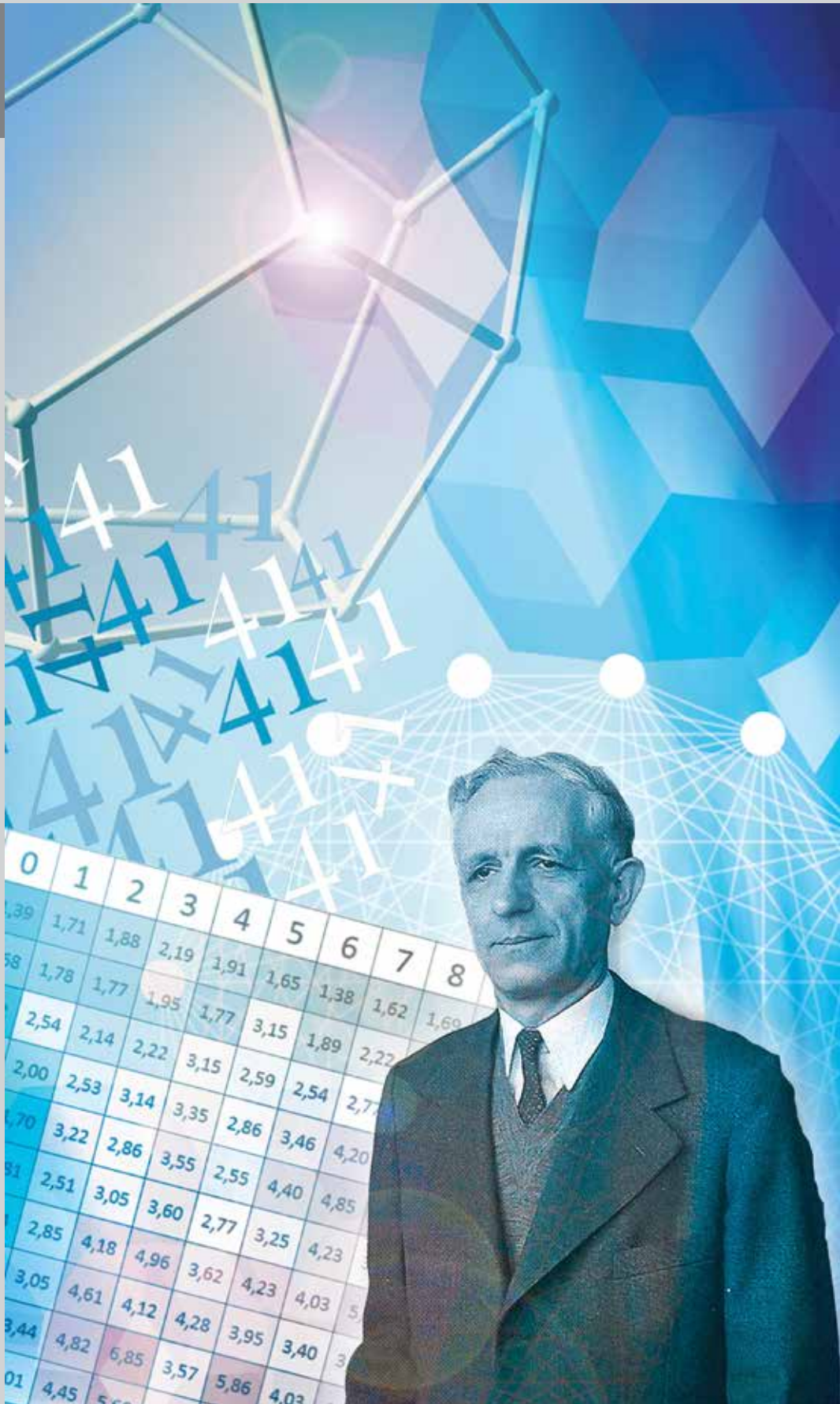
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2018, letnik 24

2



IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Osnovnošolski učitelji o uporabi žepnega računala

Uporaba žepnega računala pri učencih z učnimi težavami

IZ RAZREDA:

Numerično računalo pri vsebini integral

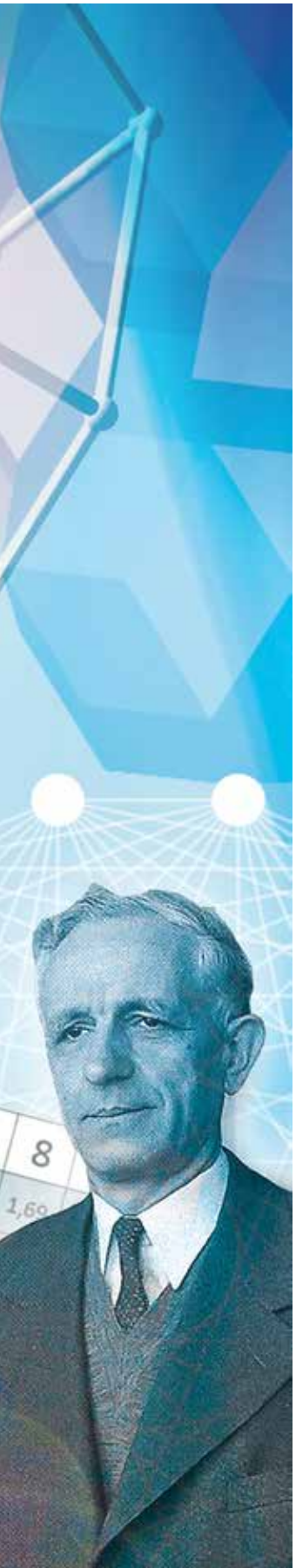
MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Spomini na akademika prof. dr. Ivana Vidava (1918–2015)

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2018, letnik 24 2



VSEBINA

mag. Mateja Sirnik
Uvodnik

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Jerneja Bone
Osnovnošolski učitelji o uporabi žepnega računala 2

mag. Apolonija Jerko
Uporaba žepnega računala pri učencih z učnimi težavami 11

mag. Sonja Rajh
Z žepnim računalom usvajamo nove vsebine pri pouku matematike v osnovni šoli 17

IZ RAZREDA

Irena Rauter Repija
Numerično računalo pri vsebini integral 39

dr. Marko Razpet
Moessnerjevo sito 46

Urška Puncer
Algebra bločnih diagramov 47

Magda Pipenbaher
Računamo gostoto človeka 53

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

mag. Milena Strnad
Spomini na akademika prof. dr. Ivana Vidava (1918–2015) 56

NOVICE

mag. Mateja Sirnik
Utrinki s 4. mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike 2018 62

Spoštovani bralci revije Matematika v šoli!

V pričujoči številki revije Matematika v šoli pišemo o računalu kot pripomočku pri pouku matematike.

Od kod računalo? Prva računala so izumili Babilonci okoli 2400 let pr. n. št. Premikali so kamenčke po posebnih žlebičkih, ki so jih kasneje začeli dajati na žice. Taka računala so imenovali *abak*. V sedemnajstem stoletju si je Gottfried Wilhelm Leibniz prvi izdelal računski stroj. Na začetku 17. stoletja je John Napier izumil logaritem in kmalu so se pojavila prva logaritemska računala, ki so bila nepogrešljiv pripomoček vsakega tehničnega strokovnjaka in znanstvenika. Sedaj tako računalo najdemo samo še v muzejih in pri kakšnem skrbnem učitelju, ki ga je spravil za spomin. V zadnjih petdesetih letih so jih popolnoma izpodrinila numerična žepna računala. Tudi v našem šolskem prostoru si je računalo v tem času utiralo svojo pot. Do kod smo prišli, lahko berete v prispevkih. Bistvo poučevanja matematike je načrtovati situacije, kjer lahko uporabimo računalo kot pripomoček za usvajanje novih matematičnih znanj. Nadalje nam računalo služi kot pripomoček za reševanje problemov, ko izvajamo različne računske postopke, in kot pripomoček za učence s slabo avtomatiziranimi aritmetičnimi dejstvi in postopki. Pri svojem delu lahko uporabite pripravljene učne liste, ki jih objavljamo, ali pa dobite ideje za izboljšavo le-teh.

Poleti smo bili na konferenci o učenju in poučevanju matematike. Posamezne prispevke bomo objavili v tej in v naslednjih številkah revije, z namenom, da ostanejo med nami. Na konferenci je bila ena od tem dvig motivacije za učenje matematike. Eden od odgovorov je zagotovo učenje s preiskovanjem. Nekaj primerov preiskovanja objavljamo v tej številki, v naslednji pa bomo s primeri nadaljevali.

Kakšen pečat je pustil na področju matematičnega izobraževanja in raziskovanja dr. Ivan Vidav, vidimo iz besed prof. Milene Strnad, ki je zapisala svoje spomine nanj. V svojem matematičnem ustvarjanju je gotovo lahko zgled vsem mladim raziskovalcem.

Želim vam prijetne zimske dni,

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXIV, številka 2, 2018

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo
Uredniški odbor:
dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo,
mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
dr. Marjan Jerman, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
Silva Kmetič,
Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
dr. Sandra Mršnik, Zavod RS za šolstvo,
mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
dr. Amalija Žakelj, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta,
dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravlje,
dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
dr. Jasmina Milinković, Pedagoška fakulteta Beograd, Srbija,
dr. Evgenia Sendova, Institute of Matematics and Informatics at the Bulgarian academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Ilustracije: Davor Grgičević
Fotografije: avtorji člankov in foto dokumentacija uredništva
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

© Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2018
Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja ni dovoljeno nobenega dela te revije na kakršenkoli način reproducirati, kopirati ali kako drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske oblike reprodukcije (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje ali prepisovanje na kakršenkoli pomnilniški medij).

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Osnovnošolski učitelji o uporabi žepnega računala

Jerneja Bone
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

V prispevku predstavimo odgovore na vprašanja, zastavljena v anketi učiteljem osnovne šole, ki poučujejo matematiko od 6. do 9. razreda. Vprašanja so pokrivala naslednja področja: uvajanje žepnega računala v pouk in izbor vsebin učnega načrta, kjer učenci uporabijo žepna računala, tehnično ter metodično in didaktično uporabo žepnega računala, mnenja učiteljev do trditev, povezanih z uporabo žepnega računala. K odgovorom podamo krajše komentarje in primere nalog, ki so jih v anketi zapisali učitelji ali smo jih izbrali sami. Naloge smo smiselno umestili k posameznim odgovorom in tako pripomogli, da nazorneje predstavimo uporabo žepnega računala.

Ključne besede: žepno računalo, matematika, osnovna šola

Primary School Teachers on Calculator Use

Abstract

The article presents the answers to the questions of a survey performed among primary school mathematics teachers of grades 6-9. The questions were applied to the following areas: introducing calculators in class, selection of school curriculum content where students use calculators, technical, methodical and didactic use of the calculator, teachers' opinions on statements concerning calculator use. The answers include short comments and task examples given by the teachers in the survey or those that we selected ourselves. The tasks were added to individual answers so as to more clearly reflect calculator use.

Keywords: calculator, mathematics, primary school

Metodologija

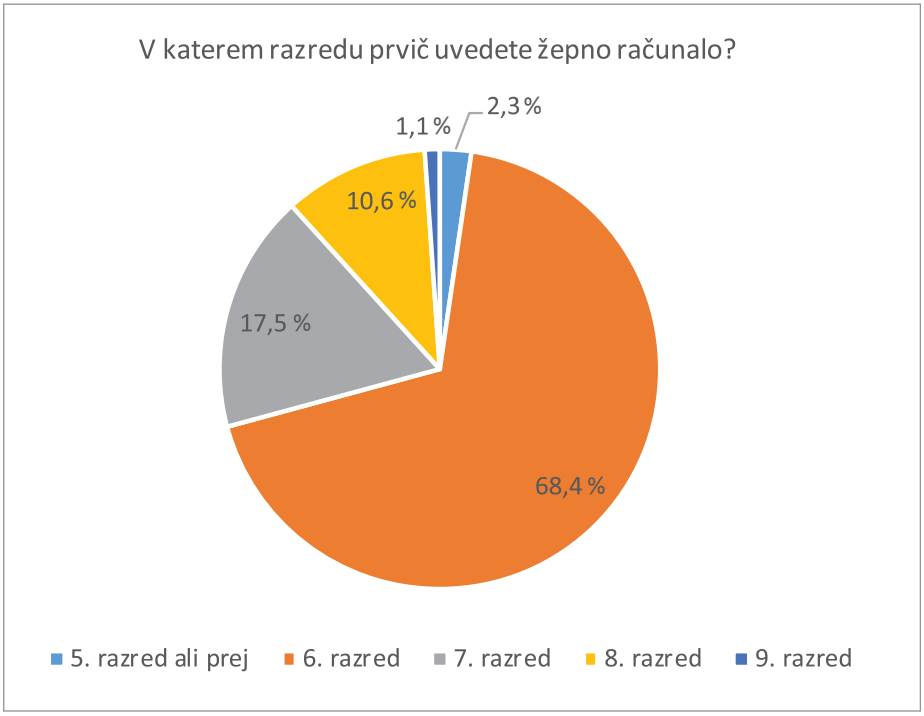
V šolskem letu 2015/16 smo učitelje matematike v osnovni šoli (ki poučujejo matematiko od 6. do 9. razreda) in so vpisani v spletno učilnico ŠS-Matematika študijska OŠ, prosili, da se odzovejo povabilu in odgovorijo na anonimni spletni vprašalnik o uporabi žepnega računala pri pouku matematike v osnovni šoli. Povabilu se je odzvalo 262 učiteljev, kar predstavlja 44 % učiteljev, ki so se v šolskem letu 2015/16 udeležili študijske skupine (590 učiteljev). Na vprašalnik so lahko odgovarjali tudi učitelji, ki se srečanja študijske skupine v živo niso udeležili. Vprašalnik je bil narejen z Google Drive in je vseboval 17 vprašanj, ki smo jih sestavile takrat delujoče članice Predmetne skupine za matematiko na Zavodu RS za šolstvo.

Uvajanje žepnega računala

Več raziskav je narejenih o uvajanju žepnega računala v pouk matematike. Hodnik Čadež (2000) omenja več različnih raziskav, kjer so rezultati pokazali, da učenci z uporabo žepnega računala bolje razumejo kvantitativni pomena števila, da so boljši reševalci problemov, pozitivno vlogo žepnega računala na motivacijo učencev in pozitiven odnos do matematike, večje samozaupanje v matematično znanje, da ima žepno računalo pomembno vlogo pri vzpostavljanju problemskih situacij, da učenci z uporabo žepnih računal pridobijo enaka znanja algoritmov pisnega računanja, kot bi jih pridobili brez uporabe žepnih računal pri poučevanju, da uporaba žepnih računal lahko izboljša njihove veščine pisnega računanja.

Številne raziskave in metaraziskave o vplivu uvedbe računal na pridobljeno matematično znanje niso dale enotnega odgovora. Po svetu in pri nas se je med učitelji, kljub določenim izkazanim pozitivnim vplivom, ki so ga pokazale raziskave, utrdilo stališče »back to basics« (nazaj k osnovi), ki poudarja pomembnost učenja in utrjevanja osnovnih računskih postopkov brez uporabe računala kot računskega pripomočka (Magajna, 2014).

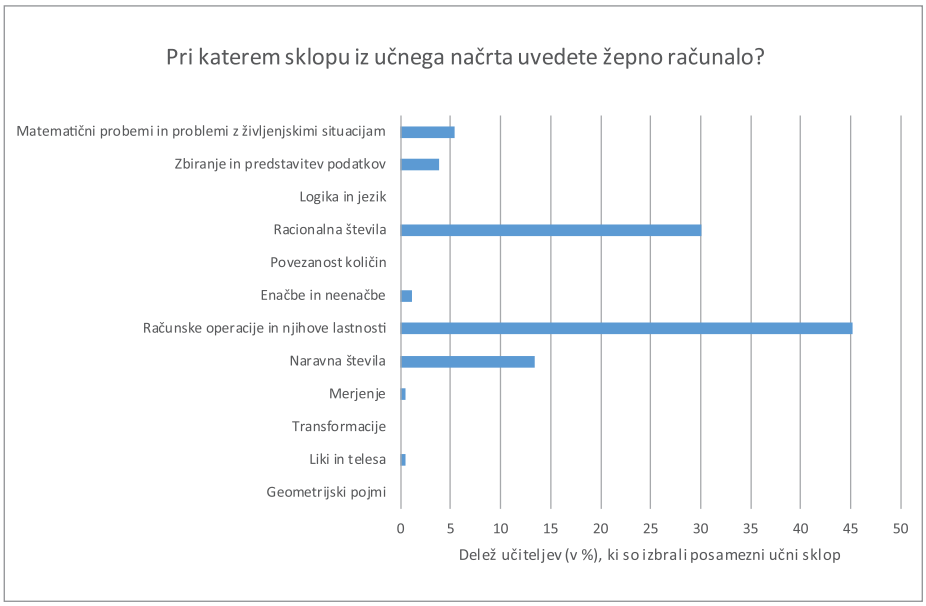
Uporaba povsem preprostih računal je v šolski praksi še danes, kljub številnim raziskavam in kljub takim ali drugačnim zapisom v šolskih predpisih, še vedno nedorečena tako na osnovnošolski kot na srednješolski stopnji. Omenja, da se stopnja in način vključevanja močno razlikujeta od šole do šole, od učitelja do učitelja. Ponekod se pri danem pripomočku izkaže, da



Prikaz 1: V katerem razredu prvič uvedete žepno računalo?

njegova uporaba vodi k boljšemu znanju, pri drugem, da se znanje ne izboljša ali se celo poslabša (Magajna, 2014).

V anketi smo učitelje vprašali, v katerem razredu prvič uvedejo žepno računalo (Prikaz 1) v pouk matematike. V 6. razredu se največ učencev seznani in začne uporabljati žepno računalo pri pouku matematike, kar je pričakovano, saj se v učnem načrtu prvič pojavijo cilji, zapisani v povezavi z žepnim računalom. Sledita 7. in 8. razred, najmanj učencev prvič uporabi žepno računalo v 9. razredu. Prva uporaba žepnega računala v višjih razredih (okoli 30 %) nakazuje, da učitelji ne uresničujejo ciljev iz učnega načrta oz. ne sledijo ciljem učnega načrta za posamezni razred. Kaj je vzrok za tako odločitev učiteljev? Ugibamo lahko, da se uporabi žepnega računala izogibajo, morda se jim zdi neprimerno, da žepno računalo uporabijo, morda si z neuresničevanjem ciljev učnega načrta, ki so povezani z žepnim računalom, prihranijo nekaj ur pouka, ki jih namenijo drugim vsebinam. Učitelju je učni načrt predpisan in ga je dolžan uresničevati.



Prikaz 2: Sklop iz UN v 6. razredu, kjer uvedejo učitelji žepno računalo.

Žepno računalo in sklopi iz učnega načrta

Če so učitelji odgovorili, da žepno računalo uvedejo **v 6. razredu**, so označili tisti sklop iz Učnega načrta za matematiko (UN), pri katerih učenci prvič uporabijo žepno računalo. Prikaz 2 opiše, katere sklope so učitelji omenjali.

Največ učiteljev je izbralo učne sklope v povezavi s števili, kar je pričakovano, saj so v teh sklopih v 6. razredu zapisani cilji v povezavi z uporabo žepnega računala. Uporabo žepnega računala učitelji navajajo tudi pri sklopih iz teme druge vsebine v učnem načrtu. Navajamo nekaj primerov nalog iz posameznih sklopov. Naloge in primere so predlagali učitelji v anketi.

Sklop: Naravna števila

Dana so števila 9, 49 in 85.

Zapiši čim več številskih izrazov in pri tem uporabi eno ali več računskih operacij. Izračunaj njihove vrednosti.

Ali opaziš kakšno lastnost (posebnost)?

Ali lahko izračunaš vrednost vsakega izraza, ki si ga zapisal? Če ne – pojasni, zakaj ne.

Sklop: Računske operacije in njihove lastnosti

Preverjanje izračunanih vrednosti številskih izrazov, v katerih nastopajo decimalna števila.

Ugotavljanje pravila za množenje in deljenje decimalnih števil s potencami števila 10.

Izračunaj vrednosti številskih izrazov:

A: 0,2 + 0,75 : (1 – 0,75)

B: 0,75 : 0,075 – (0,65 + 2,95)

Kateri izraz ima večjo vrednost?

Za koliko? Kolikokrat?

Sklop: Racionalna števila
Ugotavljanje pravila za zaokroževanje decimalnih števil in povezave med desetiškim ulomkom in decimalnim številom.

Opazuj, kako zaokroža žepno računalo.

Sklop: Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Naloge, kjer je cilj razumevanje vsebine naloge in ne računski algoritmi. Učenci so usmerjeni v iskanje ustrezne strategije, do izračuna si pomagajo z žepnim računalom. Številski izrazi in postopki morajo biti zapisani.

Ob izbranem odgovoru, da žepno računalo učitelji uvedejo prvič v pouk **v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju**, so morali učitelji v anketi označili tisti sklop iz učnega načrta, kjer žepno računalo uporabijo učenci prvič (Prikaz 3).

Ponovno je največ učiteljev izbralo učne sklope v povezavi s števili, kar je pričakovano, saj so v teh sklopih v 3. VIO v učnem načrtu zapisani cilji v povezavi z uporabo žepnega računala. Uporabo žepnega računala učitelji navajajo tudi pri sklopih iz teme druge vsebine ter pri geometriji. S primeri nalog, ki so jih učitelji zapisali v vprašalniku, ilustriramo uporabo žepnega računala pri izbranih sklopih.

Sklop: Geometrijski pojmi
Naloge, kjer žepno računalo uporabijo pri računanju obsega in ploščine geometrijskih likov, obsegu in ploščini kroga in delov kroga, uporabi Pitagorovega izreka, pri računanju površine in prostornine geometrijskih teles, sestavljenih teles in vrtenin. Pri tovrstnih nalogah izvajanje računskih operacij ni prednostna naloga, ampak damo prednost strategiji reševanja problema. Podatki so realni.

Površina lesene pravilne štiristrane prizme je 143,65 cm^2. Velikost osnovne ploskve te prizme je 42,25 cm^2. Izračunaj maso te prizme, če veš, da je gostota lesa 0,725 kg/m^3.

Sklop: Racionalna števila
Ugotavljanje pravila za krajšanje ulomkov, za zapis ulomka večjega od 1 na celi del in ulomek, ki je manjši od 1.

Sklop: Računske operacije z ulomki
Uporaba žepnega računala za preverjanje izračunanih vrednosti številskih izrazov, v katerih nastopajo ulomki in decimalna števila.

Najprej izračunaj vrednost številskega izraza brez uporabe žepnega računala, nato preveri rezultat z uporabo žepnega računala. Ali se rezultata ujemata? Če ne, zakaj misliš, da ne? Kje si naredil napako? Popravi napako.

Raziskovanje, v čem se razlikujejo desetiški in nedesetiški ulomki.

Sklop: Realna števila
Raziskovanje razlik med racionalnimi in iracionalnimi števili.

Sklop: Potence
Preverjanje vrednosti številskih izrazov, v katerih nastopajo koreni in potence.

Ugotavljanje pravil pri kvadriranju in korenjenju decimalnih števil in celih števil, ki se končujejo z ničlami.

Delno korenjenje in racionalizacija.

Zapis velikih in majhnih števil s potenco.

Približno kolikokrat je masa protona večja od mase elektrona?

Sklop: Računske operacije in njihove lastnosti
Preverjanje veljavnosti računskih zakonov pri različnih množicah števil.

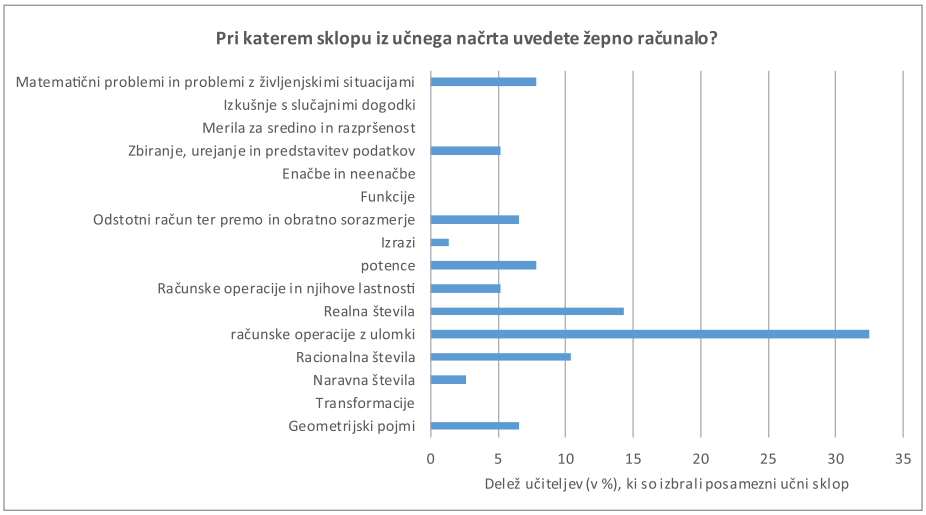
Uporaba žepnega računala za preverjanje izračunanih vrednosti številskih izrazov, v katerih nastopajo števila iz različnih množic števil.

Sklop: Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov
Naloge, kjer nastopa veliko število podatkov in je treba izračunati aritmetično sredino, mediano, medčetrtinski razmik ali izračun verjetnosti pri večjem številu podatkov.

Sklop: Odstotni račun, premo in obratno sorazmerje
Reševanje besedilnih nalog pri odstotnem računu, obratnem in premem sorazmerju, kjer so podatki realni. Cilj naloge je rešitev problema in uporaba pravilne strategije.

Na leto izkopljejo po vsem svetu 2,1 milijona ton zlata. Največji delež zlata izkopljejo v Južnoafriški republiki, okrog 29 %. Koliko ton zlata izkopljejo v Južnoafriški republiki?

Sklop: Matematični problemi in problemi iz življenjskih situacij
Enako kot pri 6. razredu.



Prikaz 3: Sklop iz UN v 3. VIO, kjer uvedejo žepno računalo.

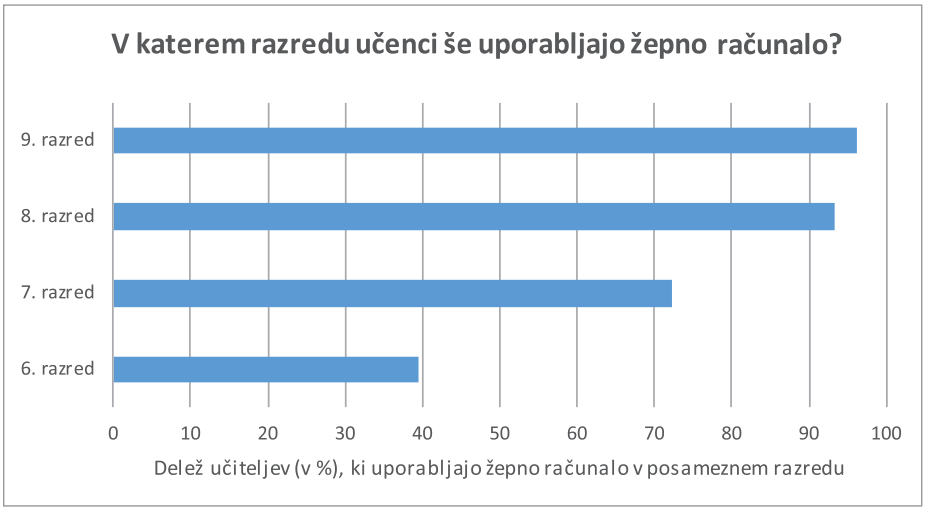
Tehnični vidik uporabe žepnega računala

Načini, s katerimi učitelji vpeljujejo uporabo žepnega računala, so raznoliki (Prikaz 4).

Spodbujajoče je, da se učitelji zavedajo, da so oni tisti, ki so dolžni učence sistematično vpeljati v uporabo žepnih računal in jih naučiti tehnike dela z njim: uporabe določenih tipk (oklepaji, predznačena števila, decimalna števila, ulomki, enote

Načini vpeljevanja	Odgovori učiteljev
Uporabe računala se naučijo učenci sami doma s pomočjo učiteljevih navodil (npr. učni list).	3 %
Učenec se nauči doma samostojno (npr. s pomočjo staršev, sošolcev, prijateljev, internetom ...).	2,3 %
Učence sistematično vpeljem v uporabo računal v šoli in jih poučim o rabi posameznih ukazov.	90,1 %
Učenec se nauči uporabe računala pri drugih predmetih.	1,5 %
Drugo.	3 %

Prikaz 4: Načini vpeljevanja žepnega računala v pouk



Prikaz 5: Uporaba žepnega računala od 6. do 9. razreda.

za velikosti kotov, potenciranje, korenjenje, spomin …). Pri tem si lahko pomagajo z učnim plakatom, emulatorjem in drugimi pomagali. Učenci se morajo v osnovni šoli naučiti uporabljati žepno računalo, da ne bodo imeli težav in ga bodo lahko uporabljali tudi pri drugih predmetih v osnovni, kasneje pa tudi v srednji šoli (Bone, 2011).

Če se uporabnik (učenec) ne nauči primerno uporabljati pripomočka (žepnega računala) oz. če učitelj ne posveti dovolj pozornosti uvajanju pripomočka, lahko ta postane vir nepotrebnih težav: pripomoček se obnaša na učencu nerazumljiv način, prihaja do napak, ki se jih učenec niti ne zaveda, učenec s pripomočkom enostavno ne zmore opraviti naloge kljub ustreznemu matematičnemu znanju (Magajna, 2014).

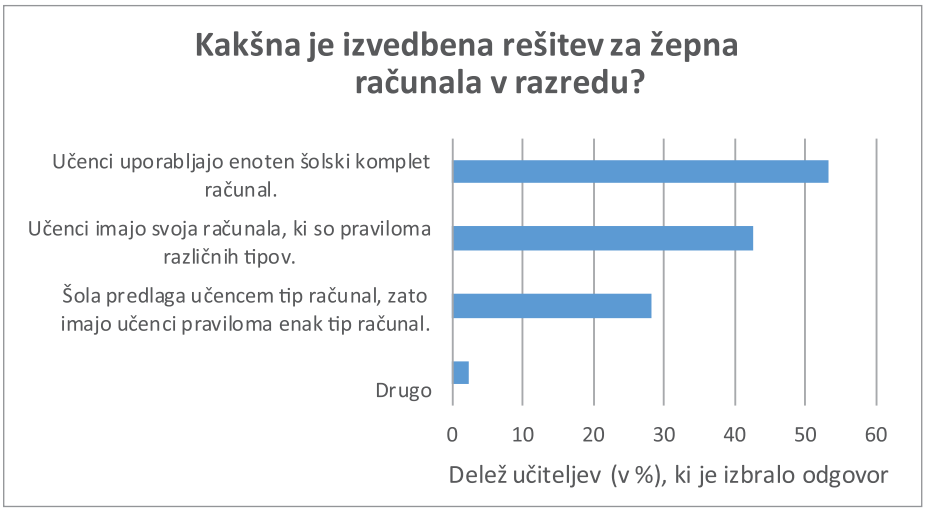
Učitelji so v vprašalniku izbrali tiste razrede, kjer pripravijo dejavnosti ali naloge z uporabo žepnega računala (Prikaz 5). Učenci uporabljajo žepno računalo v vseh razredih, od 6. do 9., kar pomeni, da z leti nadgrajujejo spoznavanje posameznih računskih operacij na žepnem računalu in se urijo v vešči uporabi žepnega računala. Opaziti je, da se z vsakim letom izobraževanja povečuje uporaba žepnega računala pri pouku matematike.

Na uporabo žepnega računala prav gotovo vpliva tudi izvedbena rešitev uporabe v razredu. Učitelji v veliki večini navajajo, da imajo v šoli komplet računal, ki ga učenci uporabljajo oz. učenci uporabljajo svoja računala (Prikaz 6). Učitelji učencem svetujejo, kakšen tip žepnih računal naj kupijo. V gradivu Učila in učni pripomočki najdemo zapisano: V osnovni šoli priporočamo uporabo žepnega računala z dvovrstičnim zaslonom, ki omogoča preverjanje vnosa podatkov in popravljanje oz. preverjanje rezultatov.

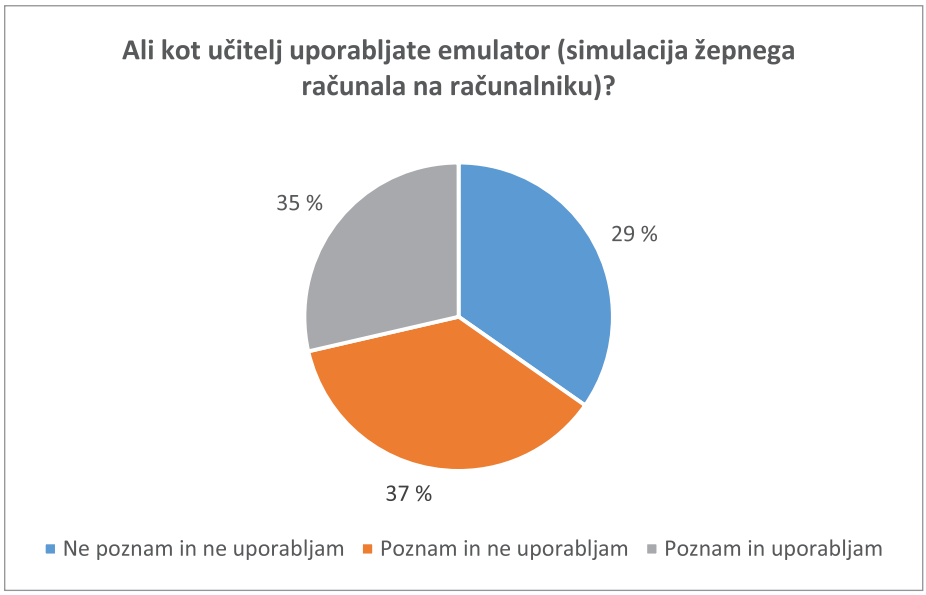
Računalo upošteva vrstni red računskih operacij. Računalo ima običajne preproste matematične funkcije in konstante (kvadratni koren, potenciranje, kvadriranje, π). Odstotki, statistične funkcije ter trigonometrijske funkcije so v računalih standardno prisotne, a za osnovnošolski pouk niso pomembne.

Pri uporabi žepnega računala je učitelju lahko v veliko podporo emulator. Emulator je programska oprema, ki prikaže virtualno računalo, enako realnemu žepnemu računalu, ki ga uporabljajo učenci (Bone, 2011).

Ali učitelji poznajo in uporabljajo emulator, smo poizvedovali z vprašanjem o njegovi uporabi pri pouku. Presenetilo nas je, da ga polovica učiteljev pozna, nekaj od teh ga tudi uporablja. Veliko je še takih učiteljev, ki ne poznajo prednosti emula-



Prikaz 6: Izvedbena rešitev uporabe žepnih računal v razredu

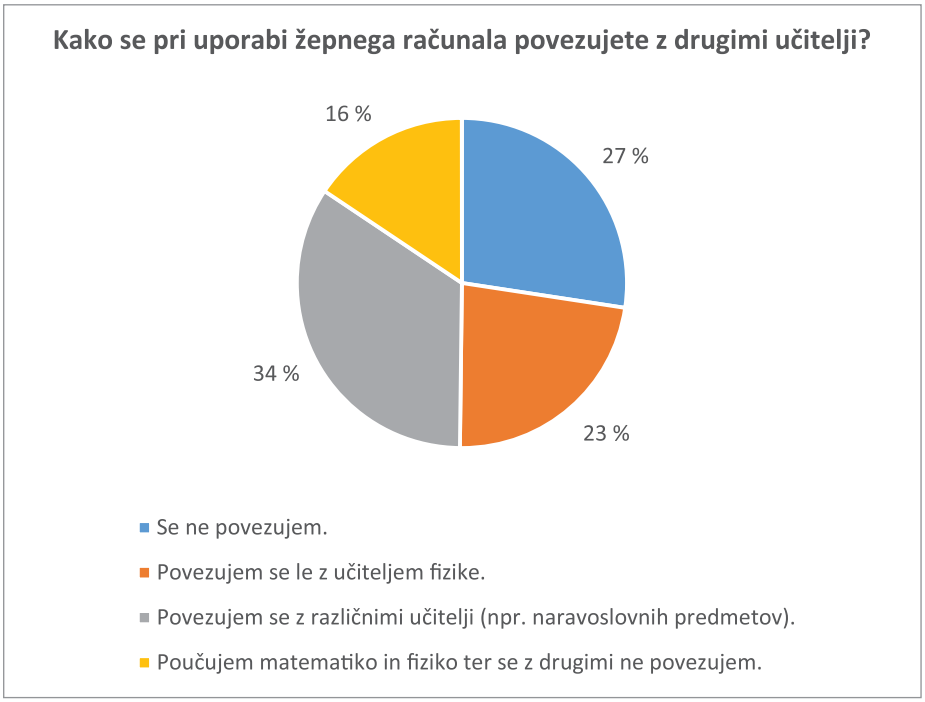


Prikaz 7: Uporaba emulatorja pri pouku.

torjev, jih ne poznajo in tudi ne uporabljajo (Prikaz 7).

Žepno računalo uporabljajo učenci tudi pri drugih predmetih, npr. pri fiziki, zato je povezovanje med učitelji pomembno. Učitelji se glede uporabe žepnega računala zelo različno medsebojno povezujejo in sodelujejo (Prikaz 8).

Pri fiziki smiselno uporabimo žepno računalo predvsem pri nalogah, kjer računamo z realnimi podatki in kjer v formulah nastopajo kvadrati oz. kvadratni koreni. Eno takih nalog[1] predstavljamo v nadaljevanju, kjer pri poenostavljanju formul dobimo $v_0 = \sqrt{2gh}$, z žepnim računalom pa izračunamo $\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}58}$.



Prikaz 8: Povezovanje med učitelji glede uporabe žepnega računala.

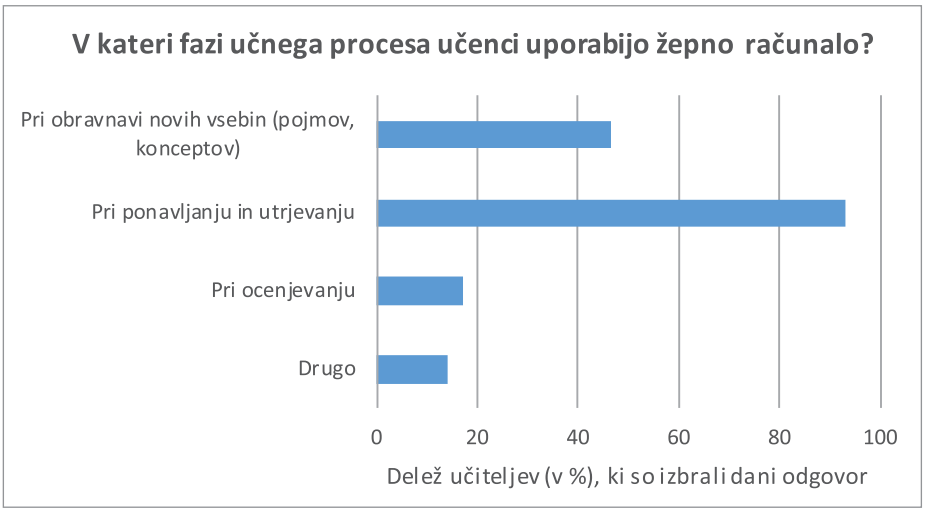
1 Avtor naloge je Goran Bezjak, ZRSŠ.

Na sliki (Slika 1) je prikazan skok skokice (prerezana žogica za tenis). Na začetku je skokica v napetem stanju in ima takrat prožnostno energijo. Del prožnostne energije se pretvori v skok skokice. Skokica skoči 58 cm visoko. Izračunaj hitrost skokice v trenutku, ko se odlepi od podlage. Rezultat zapiši v m/s in km/h.

Slika 1: Skokica

Metodično-didaktični vidik uporabe žepnega računala

Uporabo žepnega računala spodbujamo v vseh fazah učnega procesa. Učitelji odgovarjajo, da učenci največkrat uporabljajo žepno računalo pri ponavljanju in utrjevanju, nato sledi obravnava novih vsebin, zelo redko pa žepno računalo uporabijo pri ocenjevanju znanja (Prikaz 9). Pri od-



Prikaz 9: Faze učnega procesa in uporaba žepnega računala.

govoru so učitelji lahko izbrali več odgovorov.

Ocenjevanje

Hodnik Čadež (2000, str. 33) omenja, da ena od raziskav navaja, da učenci (tako zelo dobri reševalci kot tudi slabši reševalci), ki uporabljajo žepna računala pri matematičnih testih, dosegajo boljše rezultate tako pri osnovnih računskih operacijah kot pri reševanju problemov.

Navajamo prirejena primera naloge iz tujega zunanjega preverjanja znanja, kjer je dovoljena uporaba žepnega računala.

Poglej spodnjo enakost.
$3^5 + 10^2 = 7^x$
Kolikšna je vrednost eksponenta *x*, da bo enakost veljala?
Zapiši potek reševanja.

Ponavljanje in utrjevanje

Naloge so usmerjene v preverjanje rešitev in izvajanje računskih operacij. Učenci najprej vrednost številskega izraza ali rešitev ocenijo, nato izračunajo in ob zaključku preverijo svojo rešitev z rešitvijo, ki jo dobijo z žepnim računalom. Ob neujemanju rešitev ugotavljajo, kje so naredili napako in jo odpravijo. Napaka je lahko pri tipkanju na žepno računalo, lahko pa se pojavi pri računanju vrednosti številskega izraza.

Obravnava novih vsebin (konceptov, pojmov)

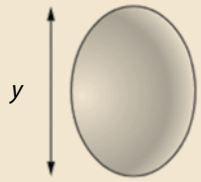
S preiskovanjem (vodenim ali samostojnim) z žepnim računalom učenci ugotavljajo pravila in zakonitosti. Samostojno odkrivanje novih pravil in zakonitosti prispeva k trajnejši zapomnitvi pravil in boljšemu razumevanju.

Pri reševanju naloge potrebuješ spodnje podatke o kokošjih jajcih:

Približna masa (v gramih) je podana s formulo:

$$m_{jajca} = \frac{y^3 \cdot \pi}{10} \cdot 1{,}15,$$

kjer je *y* višina jajca.



Masa jajca (g)	Velikost jajca
Manj od 53 g	Majhno
Od 53 g do 63 g	Srednje veliko
Od 63 g do 73 g	Veliko
Več kot 73 g	Zelo veliko

Višina nekega jajca je 5,5 cm.
Kolikšna je masa takega jajca?
Zapiši potek reševanja.

Nekaj primerov, kjer učenci samostojno ali vodeno:

- ugotavljajo pravilo za množenje in deljenje decimalnih števil s potencami števila 10,
- preverjajo veljavnost računskih zakonov pri računanju z ulomki,
- preverjajo veljavnost računskih zakonov pri računanju s koreni,
- ugotavljajo, kolikšno je razmerje obsega in premera kroga.

Glede na faze pouka lahko žepno računalo uporabimo z različnimi nameni. Največ učencev uporablja pri pouku matematike žepno računalo kot orodje, ki računa namesto njih: za preverjanje rešitev, izvajanje računskih operacij. Veliko učiteljev nameni uporabo pri preiskovanju in reševanju problemov, kjer ni v ospredju znanje računskih operacije, temveč ugotavljanje pravil, zakonitosti ter usmerjenost v rešitev problema in iskanje ustrezne strategije za reševanje. Najmanj uporabljajo učenci žepno računalo pri uvajanju novih pojmov (Prikaz 10).

Preverjanje rešitev

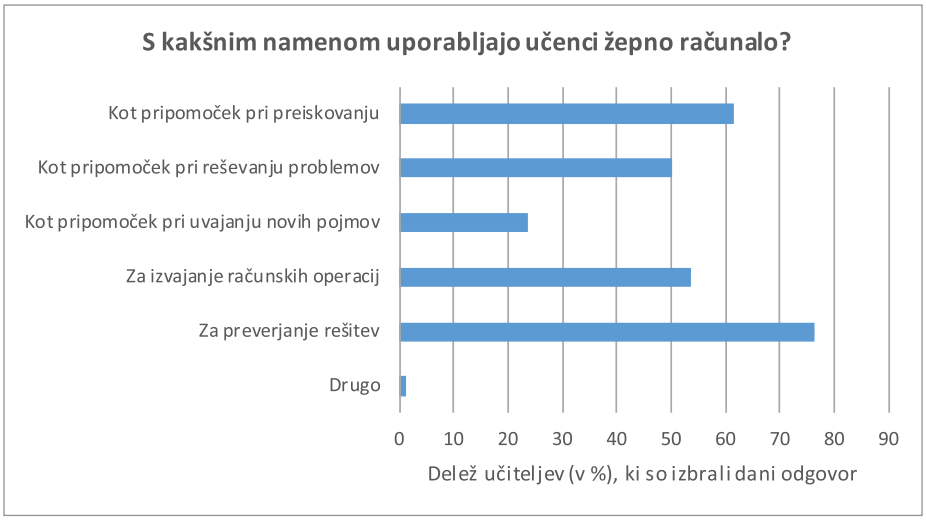
Najpogosteje se žepno računalo uporablja v osnovni šoli zato, da učenci z njim preverjajo izračune v fazi ponavljanja in utrjevanja. Uporabo žepnega računala za preverjanje rešitev (vrednost številskih izrazov, ustreznost rešitve enačbe) priporočamo ob koncu obravnavanih vsebin, takrat ko so že utrjeni ustni in pisni algoritmi računanja v različnih množicah števil. Ob tem se učenci učijo pravilne rabe tipk in pravilnega zaporedja tipk.

Izvajanje računskih operacij

Ta namen najpogosteje vključujemo v fazo ponavljanja in utrjevanja. Učence navajamo, da najprej ocenijo vrednost številskega izraza, izračunajo njegovo vrednost in nato rezultat preverijo še z uporabo žepnega računala. Tudi tu priporočamo uporabo žepnega računala ob koncu obravnavanih vsebin, takrat ko so že utrjeni ustni in pisni algoritmi računanja v različnih množicah števil.

Uvajanje novih pojmov

Če uporabljamo žepno računalo z namenom uvajanja novih pojmov, je to močno povezano s fazo pouka, ko uvajamo nove vsebine, ko učenci spoznavajo nova pravila in nove zakonitosti.



Prikaz 10: Namen uporabe žepnega računala

Nekaj primerov:

- ugotavljanje pravil pri potenciranju ali korenjenju,
- raziskovanje periodičnih decimalnih števil,
- povezovanje pojmov kvadrat in kvadratni koren števila.

Reševanje problemov

Žepno računalo je smiselno uporabiti pri reševanju nalog, kjer je v ospredju učenčev miselni proces (kognitivni cilji): razmišljanje, sklepanje, iskanje ustrezne strategije ter matematično znanje, v ozadju je računanje vrednosti številskih izrazov. Učitelj zahteva, da se zapišejo strategije reševanja naloge, postopke in številske izraze, nato z žepnim računalom izračunajo vrednost številskih izrazov oz. si pomagajo do končnega rezultata. (npr.: besedilne naloge, kjer je potrebno množenje in deljenje z decimalnimi števili). V nalogah so najpogosteje uporabljeni realni podatki, so pa to naloge iz različnih vsebin učnega načrta.

Anja želi najugodnejši nakup ploščic za tla v kopalnici. V prodajalni je dobila cenik. Za katere ploščice naj se odloči, da bo nakup najugodnejši? Koliko denarja bo porabila za nakup ploščic? (slika cenika vsebuje različne dimenzije ploščic, število ploščic v paketu, cena paketa in cena ploščic na m^2)

Preiskovanje

Žepno računalo uporabimo pri preiskovanju zato, da olajšamo učenje drugih vsebin, da je učenje usmerjeno na iskanje zakonitosti in pravil, s tem pa spodbujamo doseganje kognitivnih ciljev. Navajamo primera:

Ugotavljanje pravil:

- za deljivost števil,
- za povezavo med D (a, b) in v (a, b).

Zapiši različna decimalna števila. Z žepnim računalom jih pretvori v ulomek. Kaj ugotoviš?
Zapiši različne ulomke. Z žepnim računalom jih pretvori v decimalno število. Kaj ugotoviš?

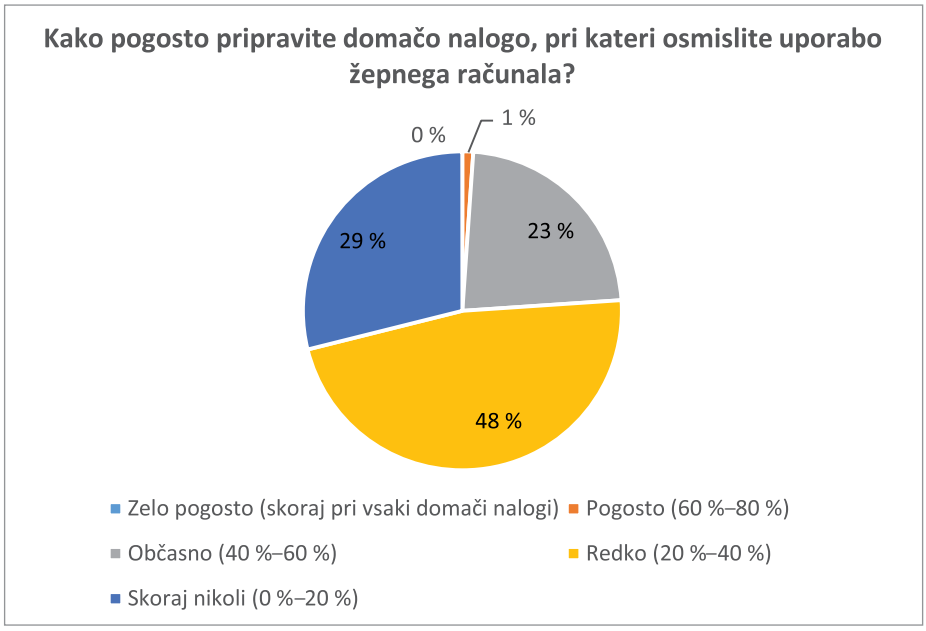
Uporabo žepnega računala je smiselno vpeljevati tudi pri domačih nalogah. Nihče izmed učiteljev ni označil odgovora (Prikaz 11), da zelo pogosto pri domačih nalogah dovoli uporabo žepnega računala. Največ odgovorov je, da je domača naloga iz matematike redko taka, da uporabijo učenci žepno računalo.

Mnenja učiteljev do uporabe žepnega računala

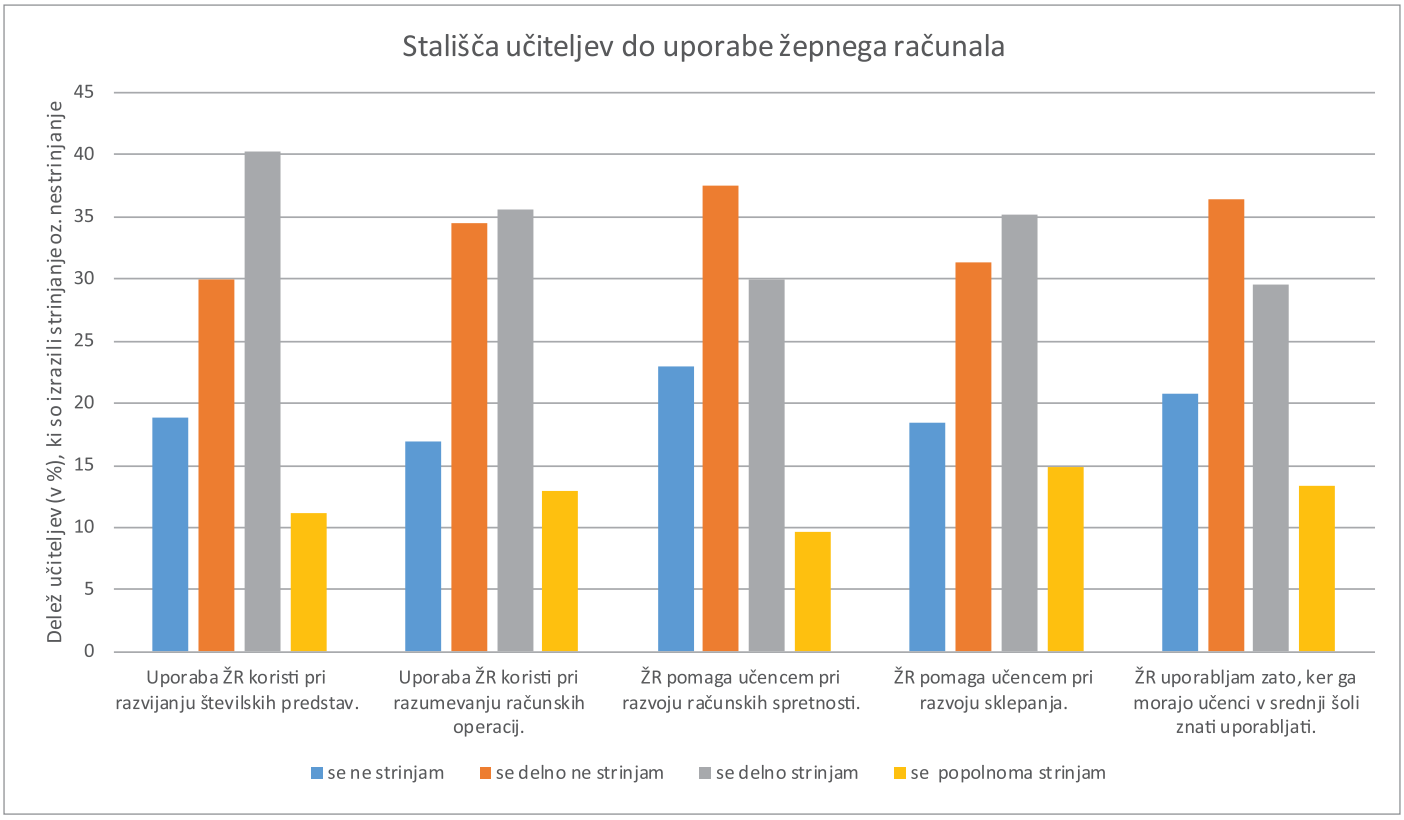
Žepno računalo je orodje, ki olajša računanje, a ne samo to. Žepno računalo lahko uporabimo kot spoznavno sredstvo in sredstvo za razvoj številskih in količinskih predstav, sredstvo za spoznavanje in razumevanje računskih operacij, sredstvo za eksperimentiranje in raziskovanje, sredstvo za reševanje problemskih nalog, sredstvo za preverjanje in testiranje rezultatov, napovedi, ocen … (Bone, 2011)

Z nekaterimi trditvami smo preverjali mnenja učiteljev do uporabe žepnega računala. Za vsak odgovor so učitelji v anketi odgovarjali s stopnjo strinjanja: 1 – se ne strinjam, 2 – se delno ne strinjam, 3 – se delno strinjam, 4 – se popolnoma strinjam. V nadaljevanju prikazujemo odgovore učiteljev na zastavljene trditve (Prikaz 12).

Za odločitev »se popolnoma strinjam« je največ učiteljev (14,9 %) izbralo trditev, da žepno računalo pomaga pri razvoju sklepanja. Za odločitev »se ne strinjam« se je največ učiteljev (20,7 %) opredelilo za trditev, da žepno računalo pomaga učencem pri razvoju računskih spretnosti.



Prikaz 11: Domača naloga iz matematike in osmišljena uporaba žepnega računala



Prikaz 12: Stališča učiteljev do uporabe žepnega računala

Lahko povzamemo, da učitelji v neki meri podpirajo uporabo žepnega računala, kadar to pripomore k razvoju sklepanja, ne pomaga pa pri spretnostih računanja.

Za odločitev »se delno strinjam« je največ učiteljev (40,2 %) izbralo trditev, da uporaba žepnega računala koristi razvijanju številskih predstav. Za odločitev »se delno ne strinjam« pa je največ učiteljev (37,5 %) izbralo trditev, da žepno računalo pomaga učencem pri razvoju računskih spretnosti; rezultat je podoben pri odločitvi »se ne strinjam«.

V primerjavi negativno izraženih odločitev (se ne strinjam, se delno ne strinjam) in pozitivno izraženih odločitev (se delno strinjam, se popolnoma strinjam) so rezultati v manjšem razponu.

Da žepno računalo ne pomaga (se ne strinjam in se delno ne strinjam) učencem pri razvoju računskih spretnosti, izraža 60,5 % učiteljev, sodelujočih v anketi. 51,3 % učiteljev izraža strinjanje (se delno strinjam, se popolnoma strinjam), da žepno računalo pomaga učencem pri razvoju sklepanja in 50,1 % učiteljev, da žepno računalo koristi pri razvijanju številskih predstav.

Razvoj številskih predstav

S spodnjo nalogo[2] preverjamo razumevanje pojma mestne vrednosti pri decimalnih številih.

Uporabi žepno računalo in zapiši število, ki ga moraš odšteti od števila

- 8,23, da dobiš namesto števke 2 števko 0: _____.
- 41,823, da dobiš na mestu stotin 0: _____.
- 21,4785, da dobiš na mestu tisočin 0: _____.

Razumevanje računskih operacij

Izračunaj na pamet in nato rezultat preveri z uporabo žepnega računala.

$4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 - 4 : 4 =$

- V danem številskem izrazu postavi oklepaje tako, da bo vrednost izraza največja (najmanjša).
- Uporabi še računski operaciji kvadriranje in korenjenje. Sam si zastavi nalogo in jo reši.

Razvoj računskih spretnosti

Izračunaj vrednost številskega izraza z uporabo žepnega računala in jo zaokroži na stotine. Zapiši, na kaj moraš biti pozoren ob vnosu v svoje žepno računalo[3].

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \doteq$ _____

$5\sqrt{11} - 6\sqrt{13} \doteq$ _____

$2\pi\sqrt{7} \doteq$ _____

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq$ _____

Razvoj sklepanja

Glavni namen naloge (slika na naslednji strani) je prepoznavanje zakonitosti in posploševanje. Učenci s pomočjo žepnega računala raziskujejo in ugo-

2 Vir naloge: Gradivo iz 1. študijskega srečanja za učitelje matematike v OŠ, januar 2010.
3 Vir naloge: Gradivo iz 2. študijskega srečanja za učitelje matematike v OŠ, marec 2015.

tavljajo zakonitosti v tabelah naravnih ali celih števil zakonitosti, zapisanih v različnih številskih stolpcih. Svoje ugotovitve podprejo tudi z algebrskim izrazom. Pri raziskovanju učenci uporabljajo žepno računalo le kot orodje pri računanju, kar jim omogoči, da se lažje osredotočajo na cilje višjih taksonomskih stopenj (Magdič, 2012).

Uporaba v srednji šoli

Učenci v srednji šoli uporabljajo žepno računalo pri izbranih vsebinah, kjer je predpogoj znanje uporabe žepnega računala iz osnovne šole. V območni enoti ZRSŠ Nova Gorica so srednješolski učitelji matematike v letu 2015 izrazili željo po vertikalnem sodelovanju z učitelji osnovne šole, kjer bi se pogovorili o uporabi žepnega računala. Predlagali so, da so učenci opolnomočeni za uporabo žepnega računala preden vstopijo v srednjo šolo (Bone, 2015).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Razišči razlike produktov v diagonalno nasprotnih vogalih v kvadratih $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 4$, $5 \cdot 5$, $6 \cdot 6$ ... Po potrebi nadaljuj zapis števil.

Zapiši posplošitev.

Za konec

Osnovnošolski učitelji matematike uvajajo žepno računalo v pouk matematike in tako učence opolnomočijo za njihovo uporabo pred vstopom v srednjo šolo. Učenci uporabljajo žepno računalo z različnimi nameni in pri različnih vsebinah iz učnega načrta. Učitelji se zavedajo, da je potrebno sistematično uvajanje žepnega računala.

Obširnejši nabor nalog tako za različne faze pouka, za različne vsebine in za različne namene bi pripomogel h kakovostnejši in sistematični uporabi žepnega računala. V podporo uporabi žepnega računala pri pouku je tudi Učni načrt za matematiko, ki ima poleg ciljev, zapisanih v povezavi z žepnim računalom, zapisana tudi didaktična priporočila. V priporočilih je poseben zapis namenjen informacijski tehnologiji in v sklopu tega numeričnim žepnim računalom.

Zahvala

Zahvaljujemo se vsem učiteljem, ki so si vzeli čas in prispevali svoje odgovore v anonimni anketi.

Viri in literatura

Bone, J. (2011). Emulator - podpora učitelju pri uporabi žepnega računala. V *Zbornik prispevkov mednarodna konferenca Splet izobraževanja in raziskovanja z IKT.* Ljubljana: Miška.

Bone, J. (2015). Sodelovanje med učitelji matematike po vertikali pripomore k večji uspešnosti učencev. *3. konferenca učiteljev naravoslovnih predmetov. Povezujemo znanje za boljšo pismenost in Scientix.* https://www.zrss.si/naravoslovje2015/

Magdič, M. (2012) Številski stolpiči in številski kvadrati. V *Zbornik prispevkov 1. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. http://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf

Magajna, Z. (2014). Pouk matematike med preprosto in zahtevnejšo tehnologijo. V *Zborniku prispevkov 2. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf

Hodnik Čadež, T. (2000). Žepno računalo kot kognitivno sredstvo. *Matematika v šoli 8* (1-2), str. 31-44. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Učila in učni pripomočki, Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/ucila-in-ucni-pripomocki/files/assets/basic-html/index.html#1

https://maths-made-easy-9hfyw8h.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/2017/10/ks3-maths-sat-paper-2009_57_Paper2.pdf (pridobljeno 2015)

https://www.dsprelated.com/showarticle/645.php (pridobljeno oktober 2018)

Uporaba žepnega računala pri učencih z učnimi težavami

mag. Apolonija Jerko
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Znanje poštevanke, priklic matematičnih dejstev, štetje v zaporedju, postopki računskih operacij … je le nekaj šibkih področji, s katerimi se srečujejo učenci z učnimi težavami pri matematiki in imajo pomemben vpliv ne le na znanje učenca, ampak tudi na učenčevo samopodobo in motivacijo za učenje matematike. S poznavanjem težav, s katerimi se soočajo učenci z učnimi težavami, upoštevanjem dobre poučevalne prakse in z uporabo ustreznih tehničnih in drugih pripomočkov, lahko znatno zmanjšamo učinek učnih težav na razvijanje matematičnih kompetenc. S tem namenom smo pripravili prispevek, ki v prvem delu predstavi učne težave pri matematiki, pri čemer smo izpostavili aritmetične učne težave in diskalkulijo. V drugem delu smo pripravili naloge, ki so oblikovane na način, ki omogočajo preverjanje in ocenjevanje znanja učencev z uporabo žepnega računala. Računalo smo prikazali kot tehnični pripomoček, ki omogoča učenčevo osredotočenost na reševanje problema in zmanjša vpliv učnih težav na pravilnost reševanja. Pri tem ne smemo pozabiti, da so uspešne oblike poučevanja, s katerimi učenci z učnimi težavami dosežejo boljše znanje, koristne tudi za ostale učence.

Ključne besede: učne težave pri matematiki, žepno računalo

Calculator Use by Students with Learning Difficulties

Abstract

The multiplication table, recalling mathematical facts, counting in order and mathematical operations processes are only a few of the weaknesses demonstrated by students with learning difficulties in mathematics that have an important effect not only on the student's knowledge but also on their self-image and motivation to learn mathematics. Knowing the problems students with learning difficulties are faced with, following good teaching practices and using appropriate technical and other tools can significantly reduce the effect of learning difficulties on the development of mathematical competences. For this purpose, we prepared the article which in the first part introduces mathematics learning difficulties with an emphasis on arithmetic learning difficulties and dyscalculia. The second part includes tasks created in a way that enables students to verify their results by using the calculator. The calculator is presented as a technical tool that helps the student focus on problem solving and reduces the effect of learning difficulties on the accuracy of results. When applying this approach, we should keep in mind that all teaching methods helping students with learning difficulties can be beneficial for other students, too.

Keywords: mathematics learning difficulties, calculator

Uvod

Matematika je univerzalni jezik, ki presega kulturne, socialne in civilizacijske razlike. Dobro razvite matematične kompetence pripomorejo k uspešnemu delovanju posameznika v družbi. Dandanes znanje matematike ne pomeni le poznavanje osnovne matematične teorije, temveč tudi in predvsem zmožnost matematičnega presojanja, utemeljevanja in uporabe matematike v različnih življenjskih situacijah. Z matematiko se srečujemo skorajda na vsakem koraku: pri pogledu na koledar, v trgovini uporabljamo merske enote, količine, računanje. Pogostokrat že vsakodnevni problemi zahtevajo od nas poznavanje matematičnih pojmov, analizo situacije, logično sklepanje ter razumevanje vzrokov in posledic. Matematiki se ne moremo izogniti, saj je pomemben in nepogrešljiv del našega življenja in tudi družbe. Vsakodnevna raba matematike priča o pomembnosti matematičnih znanj in spretnosti pri vsakem posamezniku.

Ali mladostniki v času šolanja pridobijo ustrezna in za življenje koristna matematična znanja? V šoli učenci spoznajo osnovne matematične pojme, ki jih povezujejo z življenjskimi izkušnjami. Z reševanjem matematičnih nalog in problemov razvijajo sposobnost načrtovanja, sposobnost ustvarjalnega mišljenja in raz-

vijajo domišljijo. A to še ne pomeni, da prav vsi učenci usvojijo znanja, ki jih bodo potrebovali v življenju. Usvajanje matematičnih znanj in spretnosti je navadno dolgotrajen proces, katerega uspešnost je odvisna od različnih dejavnikov. Eden izmed dejavnikov, ki vpliva na razumevanje in zmožnost uporabe matematike, so učne težave učencev.

Učne težave se pojavijo pri skupini učencev z različnimi kognitivnimi, socialnimi, emocionalnimi in drugimi značilnostmi, ki imajo pri učenju pomembno večje težave kot vrstniki. Največkrat so posledica učinkovanja različnih dejavnikov, ki se prepletajo. Učnih težav se zato ne razume in v zvezi z njimi ukrepa samo z vidika posameznika, ki se (ga) uči, temveč tudi z vidika okolja, v katerem se (ga) uči (Magajna idr., 2008). Učne težave pri matematiki se pri učencu kažejo na različnih področjih, npr. pomnjenje matematičnih dejstev, računske sposobnosti, prostorska predstavljivost, povezovanje drugih znanj z matematičnimi znanji. Pojavljajo se z različno intenziteto, od težje prepoznavnih do tako rekoč nepremostljivih.

Za boljše razumevanje učencev z učnimi težavami pri matematiki bomo izpostavili tiste vrste učnih težav, ki imajo velik vpliv na razumevanje in znanje matematike. V prispevku bomo večjo pozornost namenili učencem s specifičnimi učnimi težavami in vrednotenju njihovega znanja preko nalog, kjer učenec uporabi žepno računalo.

Klasifikacija učnih težav

Različni avtorji opredeljujejo učne težave na različne načine. Ameriški klinični psihiater Geary (1994) je eden prvih, ki je specifične učne težave pri matematiki delil na diskalkulijo in specifične učne težave pri matematiki. Adler (2008) pa omenja štiri različne oblike učnih težav pri matematiki: splošne učne težave pri matematiki, psevdodiskalkulijo, alkalkulijo in diskalkulijo.

V prispevku bomo uporabili delitev učnih težav na način, ki ga najpogosteje srečamo v slovenski strokovni literaturi. Učne težave delimo na splošne in specifične. Razprostirajo se od lažjih do težjih, od enostavnih do zapletenih, od težav, ki se pojavljajo krajše oziroma daljše obdobje šolanja ali pa lahko trajajo vse življenje. Malo je učencev, ki imajo samo splošne ali samo specifične učne težave (Magajna idr., 2008).V šolah se najpogosteje srečujemo z učenci, ki imajo učne težave, ki se med seboj prepletajo.

Splošne učne težave so značilne za skupino učencev, ki imajo pri usvajanju znanj in spretnosti, pri enem ali več izobraževalnih predmetih, pomembno večje težave kot vrstniki. Zaradi izrazitejših težav so pri enem ali več učnih predmetih manj uspešni ali celo neuspešni. Splošne učne težave pri matematiki imajo na primer učenci, ki dosegajo nižje izobraževalne dosežke tako pri matematiki kot tudi pri drugih predmetih, ker na splošno počasneje usvajajo znanja ali pa imajo »čustvene« težave, ki so posledica ovir v socialno-emocionalnem prilagajanju (Magajna idr., 2008). Med poučevanjem matematike upoštevamo dobre poučevalne prakse in učencu s splošnimi učnimi težavami ponudimo prilagojene učne pripomočke ter učne vsebine pojasnimo na preprostejših zgledih iz vsakdanjika.

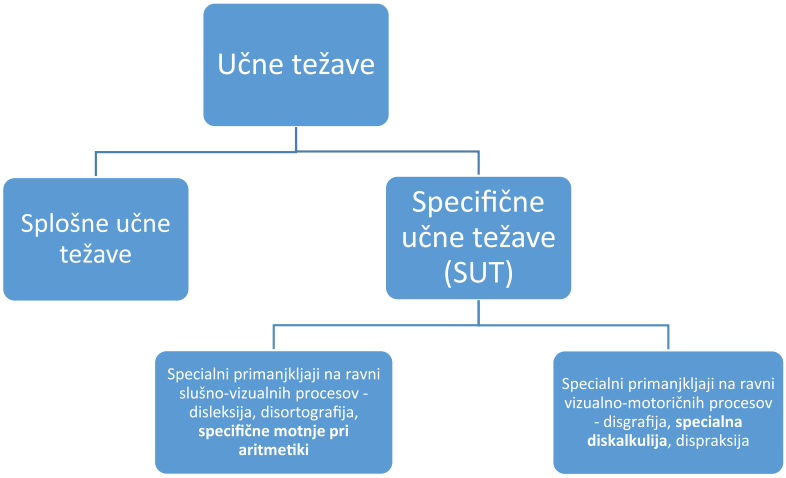
O specifičnih učnih težavah (SUT) pri matematiki govorimo, ko imajo učenci primanjkljaje na področju aritmetičnih sposobnosti in spretnosti, ki niso posledica motenj v duševnem razvoju ali posledica neustreznega poučevanja. Ti specifični primanjkljaji se nanašajo na obvladovanje osnovnih aritmetičnih sposobnosti in spretnosti (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje), manj pa na bolj abstraktne sposobnosti in spretnosti iz algebre, trigonometrije in geometrije.

Specifične učne težave (SUT) delimo v dve skupini, ki vključujeta:

- specifične primanjkljaje na ravni slušno-vizualnih procesov, ki povzročajo motnje branja (disleksija), pravopisne težave (disortografija) in druge učne težave, povezane s področjem jezika (npr. nekatere oblike specifičnih motenj pri aritmetiki itd.);
- specifične primanjkljaje na ravni vizualno-motoričnih procesov, ki povzročajo težave pri pisanju (disgrafija), matematiki (spacialna diskalkulija), načrtovanju in izvajanju praktičnih dejavnosti (dispraksija) pa tudi na področju socialnih veščin (Magajna idr., 2008).

Najpogostejše ovire, s katerimi se srečujejo učenci pri učenju matematike, so:

- spominske težave in slabše razvite strategije (pri učencu lahko ovirajo razvoj pojmov matematičnih operacij, predstavitev pojmov in priklic matematičnih dejstev, razvoj pojma in učenje algoritmov ter formul, lahko pa vplivajo na težave pri reševanju besednih problemov);



Slika 1: Klasifikacija učnih težav. (povzeto po Magajna, 2008)

- jezikovne in komunikacijske težave (učenca ovirajo pri pisanju in branju matematičnih besedil, pri pogovorih o matematičnih idejah ter strategijah reševanja matematičnih problemov in pri neverbalnih geometrijskih konstrukcijah);
- primanjkljaji, povezani s procesi in strategijami reševanja besednih problemov (vplivajo na samo pojmovanje besednih problemov in prevedbo informacij besednega problema v matematični jezik);
- nizka motivacija, slaba samopodoba in zgodovina učne neuspešnosti (vpliva na učenčev odnos do matematike, na znižano stopnjo njegove angažiranosti pri učenju matematike, na znižano raven njegovih prizadevanj v zvezi z matematičnimi dosežki ipd.) (Magajna idr.; 2008).

Specifične aritmetične učne težave

Specifične aritmetične učne težave se pretežno odražajo v slabši avtomatizaciji aritmetičnih dejstev in postopkov. Težave se lahko pojavijo pri sprejemu informacije, njeni predelavi ali pri predstavitvi rezultata (Kavkler, 2007). Razporejajo se na celotnem kontinuumu od lažjih do težjih. Glede na povezanost s kognitivnimi in nevrološkimi primanjkljaji jih delimo na tri podskupine:

1. specifične aritmetične težave, ki so povezane s slabšim semantičnim spominom: učenci imajo težave s priklicem aritmetičnih dejstev iz dolgotrajnega spomina (npr. poštevanke, seštevanja in odštevanja z enomestnimi števili);
2. specifične aritmetične težave, ki so povezane z aritmetičnimi proceduralnimi težavami: učenci s tovrstnimi specifičnimi težavami uporabljajo manj razvite ali nepopolne aritmetične postopke (npr. težave s sposojanjem in prenašanjem desetic pri pisnem odštevanju);
3. specifične aritmetične težave, ki so povezane z vizualno-prostorskimi težavami: učenci s tovrstnimi specifičnimi aritmetičnimi težavami neustrezno uporabljajo vizualno-prostorske spretnosti za predstavljanje in razlago aritmetičnih informacij (Magajna idr.; 2008).

Diskalkulija

Diskalkulija vključuje vseživljenjske težave na področju osnovnih znanj in veščin matematike. O njej ni enotnega opisa, saj se pri učenju matematike pri vsakem posamezniku kaže v obliki svojevrstnih značilnosti in obliki. Pri tem ne gre za bolezensko stanje, ampak za posameznikovo specifično kognitivno funkcioniranje (Adler, 2008). Težave so lahko prisotne že v predšolskem obdobju.

Diskalkulija je lahko:

- pridobljena, to je posledica določene oblike možganske okvare (otroci in odrasli s to vrsto diskalkulije imajo težave z dojemanjem števil in aritmetičnih operacij),
- razvojna, ki pa je povezana s slabšim konceptualnim, proceduralnim in deklarativnim matematičnim znanjem (Magajna idr.; 2008).

Diskalkulija se kaže kot skupek specifičnih učnih težav pri učenju matematike in reševanju matematičnih nalog in problemov ter opazno vpliva na sposobnost usvajanja matematičnih veščin. Težave se pojavljajo neodvisno od intelektualne razvitosti, delovanja čutil in pogojev poučevanja (Kesič Dimic, 2015). Za diskalkulijo so značilni izraziti in vseživljenjski primanjkljaji na področju osnovnih znanj in matematičnih kompetenc, ki se kažejo kot težave pri:

- razumevanju matematičnih pojmov (pojmovanje števil, računskih operacij, ulomkov ipd.),
- štetju, predvsem štetju nazaj, v zaporedju in pri fleksibilnem štetju,
- proceduralnih znanjih (postopki računskih operacij, postopki reševanja problemov ipd.),
- priklicu dejstev (aritmetičnih dejstev, matematičnih terminov, aritmetičnih znakov in drugih simbolov),
- reševanju besedilnih nalog, ki je oteženo zaradi slabšega razumevanja problemov in/ali reševanja ter priklica dejstev,
- uporabi geometrijskih pojmov (npr. premica, lik, ploščina, prostornina itd.),
- merjenju in merskih enotah (predstavljivost merskih enot, pretvarjanje) (Kavkler, 2007).

Pri učencu z diskalkulijo se pojavijo težave ne glede na primerno intelektualno razvitost, nemoteno delovanje čutil in ustrezne pogoje poučevanja. Učenec z diskalkulijo, v primerjavi z vrstniki, počasneje napreduje pri osvajanju matematičnih znanj in neustrezno svojemu miselnemu procesu.

Pomembnejše od poznavanja učenčevih šibkejših področji je poznavanje njegovih močnih področjih. S poznavanjem močnih področji učenec lažje prepozna in razume svoje težave in jih posledično tudi lažje premaguje. Pri prepoznavanju in ozaveščanju močnih področji je vloga učitelja pomembna. Chinn in Ashcroft (2007, v Kavkler, 2012) poudarjata predvsem pomembno vlogo poučevanja. Tradicionalno učenje (na pamet, z veliko mehaničnimi vajami) za učence z diskalkulijo ni uspešno (Butterwoth in Yeo, 2004) ravno zaradi težav s pomnjenjem aritmetičnih dejstev in postopkov. Učenci z diskalkulijo potrebujejo več časa za utrjevanje, drugačen metodičen pristop, individualizirano delo in veliko ponazoril. Njihovo učenje je lažje, če se jim ponudi drugačne metode učenja s poudarkom na uporabi konkretnih pripomočkov in primerov iz življenja, različne strategije učenja dejstev in postopkov ter pomoč pri organizaciji gradiv z oporami.

Preverjanje in ocenjevanje znanja pri učencih z učnimi težavami

Zaradi številnih, že opisanih težav učencev z diskalkulijo so potrebne prilagoditve oz. drugačni pristopi ne le v procesu uvajanja novih vsebin, ampak tudi pri preverjanju in ocenjevanju znanja. Tudi tukaj ponudimo učencu možnost uporabe konkretnih pripomočkov in ponazoril (npr. prstov, kamenčkov, preglednic, številskih trakov, stotični kvadrat idr.), možnost reševanja nalog, ki izhajajo iz življenjskega koncepta in uporabo žepnega računala. Glede na specifičnost težav posameznega učenca se odločimo, v kolikšni meri se bo vrednotenje znanja opravilo v pisni oziroma ustni obliki.

Navedli bomo nekaj primerov nalog, ki odstopajo od nalog, ki se pogostokrat pojavijo pri preverjanju in ocenjevanju znanja matematike in so prilagojene učencem s težavami pri matematiki. Glejte primer 1 in 2 na naslednji strani.

Primer 1 (Povzeto po Ivačič idr., 2014)

Dobro si oglej sliko.

Izvedi naloge:
- *Poskoči tolikokrat, kot je narisanih snežink.*
- *Povej toliko besed o zimi, kolikor je zvončkov.*
- *Dvigni levo roko tolikokrat, kolikor je narisanih daril.*

V prvi triadi je poudarek na opismenjevanju. Učenci razvijajo številske predstave in zapisujejo števila.

Primer 2

Dan je številski izraz.

$$25 + 6 \cdot 4 - 16 : 2 =$$

a) Koliko različnih računskih operacij nastopa v številskem izrazu? Zapiši odgovor.
b) Kaj izračunamo v prvem koraku reševanja številskega izraza? Obkroži znak pred pravilnim odgovorom.

- ✶ 25 + 6
- ✶ 25 + 6 in 16 : 2
- ✶ 6 · 4 in 16 : 2

Pri primeru 2 smo zapisali številski izraz, s katerim želimo preveriti učenčevo znanje o upoštevanju vrstnega reda računskih operacij v 6. razredu. Pri drugem vprašanju, smo izbrali izbirni tip naloge. Za tak tip naloge smo se odločili, ker imajo učenci z učnimi težavami pogosto težave pri zapisu postopkov. Z danimi možnimi odgovori učenca usmerimo k razmišljanju o poteku reševanja številskega izraza in ga hkrati odvrnemo od razmišljanja o načinu, kako bo zapisal svoj odgovor.

Uporaba žepnega računala pri ocenjevanju znanja

Učenci s slabo avtomatiziranimi aritmetičnimi dejstvi in postopki potrebujejo več učnih pripomočkov (tabel, strukturiranih materialov itd.), od razredne stopnje naprej pa naj bi pri reševanju aritmetičnih problemov uporabljali še žepno računalo.

Uporabo žepnega računala z namenom preverjanja in ocenjevanja znanja narekujejo Smernice za uporabo IKT pri predmetu matematika. Računalo naj se uporablja kot orodje, ki učencem omogoča osredotočenost na cilje višje taksonomske stopnje (Sirnik, Bone, 2016) in pri omiljenju računskih težav. Kljub temu ugotavljamo, da se učitelji redkokdaj odločajo za uporabo žepnega računala pri ocenjevanju znanja. Pri ocenjevanju znanja je računalo smiselno uporabiti glede na cilje, ki jih preverjamo in glede na učne težave posameznih učencev.

Predno uporabimo računalo pri ocenjevanju znanja, moramo učence naučiti tehnike dela z njim, s poudarkom na specifičnih delovnih funkcijah (npr. kvadriranje, korenjenje), da ne pride do težav, ko se učenci ukvarjajo bolj s tehniko vnosa kot pa s samo vsebino računanja (Sirnik, Bone, 2016).

V naslednjih primerih osmišljamo uporabo žepnega računala pri ocenjevanju znanja. Izbrali smo naloge, pri katerih so v ospredju cilji, ki izhajajo iz poznavanja postopkov.

Primer 3

Zapiši vrstni red računskih operacij v številskem izrazu. Izračunaj vrednost številskega izraza. Med reševanjem zapisuj potek reševanja.

$$167 - (42 : 3 + 4) - 5 \cdot 12 =$$

Pomagaš si lahko z žepnim računalom.

Pri zapisu številskega izraza, ki ga uporabimo pri ocenjevanju znanja, moramo premisliti doseženost katerih ciljev iz učnega načrta bomo preverjali in to tudi zapisati v mrežni diagram. Pri primeru 3 preverjamo učenčevo znanje o upoštevanju vrstnega reda računskih operacij in zanesljivost izračuna vrednosti številskega izraza z žepnim računalom. Ker ne preverjamo znanja pisnega množenja, seštevanja in odštevanja, učencu omogočimo uporabo žepnega računala. Uporaba računala učencu omogoči osredotočenost na potek reševanja in zmanjša vpliv težav s priklicem znanja, npr. poštevanke. Učenec mora še vedno zapisati celoten potek reševanja številskega izraza.

Primer 4

Marko je rešil številski izraz. Dobro si oglej postopek reševanja, ki ga je zapisal Marko. Obkroži prvo napako, ki jo je Marko naredil. Opiši, kaj je naredil narobe. Popravi napake.

$- 125 - 16 \cdot 24 + 516 : 2 =$
$= - 141 \cdot 24 + 258 =$
$= - 3384 + 258 =$
$= - 3642$

Podobno kot pri primeru 3 tudi s primerom 4 preverimo učenčevo znanje o reševanju številskih izrazov. Pri tej nalogi ne bomo preverjali znanja, ki je že bilo preverjeno in od učenca zahteva priklic iz dolgoročnega spomina (npr. poštevanka, postopek pisnega množenja in deljenja). Zato učenec pri reševanju naloge uporabi žepno računalo, s katerim preveri pravilnost izračuna posameznega dela izraza.

Primer 5

Zapiši manjkajoče člene zaporedja.

3,85 3,9 3,95 _____ _____ _____

Opiši, kako dobimo vsak naslednji člen zaporedja.

Nalogo pri primeru 5 smo pripravili z namenom, da preverimo, ali učenec prepozna pravilo v številskem zaporedju in ga nadaljuje. Pri reševanju naloge mora učenec določiti razliko med dvema sosednjima členoma zaporedja. Navadno taka naloga za učence ni večji izziv. Kar pa ne velja za učence z učnimi težavami, npr. učence z diskalkulijo. Pri tej skupini učencev, kljub temu da vedo, da morajo odšteti dva sosednja člena zaporedja, lahko predstavlja postopek odštevanja decimalnih števil tako veliko oviro, da naloge ne dokončajo ali pa jo rešijo napačno. Pogosto narejena napaka je nepravilno podpisovanje števil.

$$\begin{array}{r} 3,9\ 5 \\ -\quad 3,9 \\ \hline 3,5\ 6 \end{array}$$

Z namenom odpravljanja učenčeve napake, ki je posledica njegovih učnih težav, učencu pri reševanju ponudimo žepno računalo in mu tako omogočimo, da se osredotoči na iskanje pravila v številskem zaporedju.

Pri reševanju besedilnih matematičnih nalog (kot je Primer 6) učenec potrebuje ustrezna konceptualna, problemska, proceduralna in deklarativna znanja. Za uspešno reševanje ne zadoščajo le matematična znanja, učenec mora imeti dobro razvito jezikovno razumevanje, fleksibilno razmišljanje, zaznavne sposobnosti in organizacijske veščine. Zaradi širokega spektra znanj, ki so potrebna, imajo mnogi učenci težave pri reševanju besedilnih nalog (matematičnih problemov). Predno začnemo z ocenjevanjem učenčevega znanja o reševanju besedilnih nalog, poskrbimo za ustrezen način poučevanja. Pozornost poučevanja namenimo oblikovanju metakognitivnih predstav, saj učenca s tem naučimo soočenja z besedilnimi nalogami in lastnega vodenja skozi proces reševanja.

Ravno zaradi kompleksnosti znanj in spretnosti, potrebnih za reševanje besedilnih nalog, učencu z uporabo žepnega računala zmanjšamo vpliv pomanjkljivih deklarativnih in konceptualnih znanj na uspešnost reševanja.

Primer 6

Maja se je odpeljala iz vasi Breg in 3 ure vozila kolo z enako hitrostjo. Prispela je do smerokaza, ki ga vidiš na sliki. (prirejeno po TIMSS 2011 v Japelj, 2012)

Maja je nadaljevala vožnjo enako hitro do vasi Grm. Koliko časa je potrebovala od znaka do Grma? Zapiši potek računanja in odgovor.

Zaključek

V razredu se srečujemo z učenci, ki so ravno zaradi svojih sposobnosti in posebnosti vsak zase individuum. In ravno zaradi individualnih sposobnosti učencev je še toliko bolj pomembno, da pri preverjanju in ocenjevanju znanja z uporabo različnih pripomočkov in upoštevanjem prilagoditev učencu omogočimo, da izkaže tista znanja, ki jih preverjamo. Če je učitelj izvajal dobro poučevalno prakso, učenec izvajal vaje osnovnih računskih operacij in je bila opravljena diagnostika, je priporočljivo uvesti uporabo žepnega računala od petega razreda dalje. Tako učencu omogočimo uspešno reševanje problemov, ki jih sicer dobro razume, in zmanjšanje vpliva učnih težav na učenčev uspeh.

Pri poučevanju in ocenjevanju znanja ne smemo biti usmerjeni le na šibkejša področja učenca, ampak moramo spoznati njihova močna področja, ki pomagajo pri posamezniku zmanjševati učne težave in povečati motivacijo za učenje matematike.

Nikakor pa ne smemo pozabiti, da učitelj, ki zna učencem s težavami pri učenju matematike prilagoditi proces poučevanja in vrednotenja znanja, učinkoviteje poučuje vse učence. Zato naj se naloge, ki jih prilagodimo učencem z učnimi težavami, in uporaba tehničnih pripomočkov, kot je žepno računalo, uporabljajo tudi pri ostalih učencih. Na osnovi šolske prakse predlagamo, da se za namen izboljšanja znanja matematike prav pri vseh učencih, ne glede na njihove specifične učne težave, individualizirajo in diferencirajo zahteve učencev, vse učence uči kognitivnih in metakognitivnih strategij ter posveča pozornost pozitivni motivaciji za učenje matematike. Učitelji naj večji poudarek kot samemu ocenjevanju dajo strategiji sporočanja povratnih informacij, ki posamezniku omogočajo napredovanje ter povečanje občutka samoučinkovitosti ter zmanjšajo aktiviranje različnih nezaželenih obrambnih mehanizmov.

Viri

Adler, B. (2008). *What in dyscalculia?* Cognitive Centre in Sweden. http://www.dyscalculiainfo.org/What%20is%20dyscalculia%20-%20B%20Adler.pdf (15. 10. 2018).

Geary D. C. (1994). *Children's Mathematical Development*. Washington, DC: American Psychological Association.

Ivačič, A., N. Jokan, P. Podlogar, A. Simončič, M. Tašnar. (2014). Pomoč in podpora učitelju za delo z učenci z disleksijo: Priročnik z osnovnimi podatki, načinom prepoznavanja in nekaterimi strategijami za pomoč. Ljubljana: Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani. www.drustvo-bravo.si.

Japelj Pavešić, Barbara. (2012). *MATEMATIČNE naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Ljubljana: Društvo Bravo – društvo za pomoč otrokom in mladostnikom s specifičnimi učnimi težavami.

Kavkler, M. (2007). Specifične učne težave pri matematiki. V M. kavkler, M. Košak Babuder (ur.), *Učenci s specifičnimi učnimi težavami: skriti primanjkljaji – skriti zakladi*,77–112.

Kesič Dimic, K. (2015). *Vsi učenci so lahko uspešni: napotki za delo z učenci s posebnimi potrebami: preizkušeni nasveti in zamisli za učinkovito poučevanje*. Ljubljana: Rokus Klett.

Magajna, L., Kavkler, M., Čačinovič Vogrinčič, G., Pečjak, S. (2008). *Učne težave v osnovni šoli: koncept dela*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Sirnik, M., Bone, J. (2016) *Smernice za uporabo IKT pri pouku matematike*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Butterwoth, B., Yeo., D. (2004). *Dyscalculia Guidance: Helping Pupils with Specific Learning Difficulties in Maths*. Oxon: nferNelson Publishing Company Limited.

Z žepnim računalom usvajamo nove vsebine pri pouku matematike v osnovni šoli

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

V prispevku predstavljamo primere aktivnosti, pri katerih učenci uporabijo numerično žepno računalo za usvajanje nove vsebine in za preiskovanje različnih računskih zakonitosti. Opisane aktivnosti so učitelji v okviru študijskega srečanja na daljavo preizkusili pri pouku. V prispevku so povzete njihove refleksije o delu z učenci, ko so uporabljali žepno računalo pri pouku matematike.

Ključne besede: preiskovanje, numerično žepno računalo, pouk matematike

Learning New Content in Primary School Mathematics Class Using a Calculator

Abstract

The article describes examples of activities where students use calculators to learn new content and study various mathematical principles. The activities introduced were tested in class by teachers participating in a remote study environment. The article also includes a summary of their feedback on their work with the students using calculators in mathematics class.

Keywords: research, numeric calculator, mathematics class

Uvod

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli spodbuja rabo informacijske tehnologije pri reševanju matematičnih problemov. »Tehnologija omogoča hitro povratno informacijo, ki je nepristranska in neosebna. To lahko opogumlja učence, da sami predvidevajo in razvijajo svoje ideje, jih testirajo in spreminjajo ter popravljajo oziroma izboljšujejo.« (Učni načrt, 2011).

V prispevku smo se osredotočili na uporabo numeričnega računala, ki ga v osnovni šoli smiselno uvajamo pri usvajanju novih vsebin, izvajanju postopkov, reševanju problemov ter pri preiskovalnih aktivnostih.

V šolskem letu 2014/15 smo v okviru srečanja študijske skupine za matematiko v osnovni šoli preko sklica na daljavo predlagali učiteljem, da v razredu preizkusijo vsaj eno od ponujenih gradiv ali uporabijo svoj primer, ter nam posredujejo povratno informacijo o izvedbi pri pouku. Ponudili smo jim 7 različnih delovnih listov (3 od njih bomo predstavili v nadaljevanju), s katerimi smo spodbujali uporabo numeričnega računala pri pouku matematike in jih spomnili na gradivo o uporabi numeričnega računala, ki smo jim ga posredovali v prejšnjih letih.

Delovni listi za spodbujanje uporabe numeričnega računala pri pouku matematike v osnovni šoli

Na koncu tega prispevka so trije delovni listi za različne preiskovalne aktivnosti učencev, ki smo jih ponudili učiteljem preko spletne učilnice študijskih skupin za matematiko v osnovni šoli (ŠS-Matematika študijska OŠ). Pri vseh treh opisanih dejavnostih se kot kognitivno sredstvo uporablja numerično računalo.

- Delovni list ***Množenje naravnih števil, ki se končujejo z ničlami***

Ker predvidevamo, da učitelji pri pouku matematike že izvajajo različne aktivnosti, v katerih učenci z uporabo numeričnega računala preiskujejo, kako množimo/delimo naravna/decimalna števila z 10, 100, 1000 … (morda tudi z 0,1 in z 0,01), smo to osnovno preiskavo nadgradili s preiskavo ***Množenje naravnih števil, ki se končujejo z ničlami***.

Namen preiskovanja: učenci ugotovijo, da lahko produkt naravnih števil, ki se končujejo z ničlami, preprosteje izračunajo tako, da pomnožijo števila pred ničlami, nato pa pripišejo vse ničle, s katerimi se končujejo faktorji.

Pričakovano matematično predznanje: *učenci pisno množijo z večkratniki števila 10 v množici naravnih števil do 10 000* je zapisano že med cilji 4. razreda znotraj sklopa *Računske operacije in njihove lastnosti*.

Zato lahko delovni list uporabljajo učenci celotnega drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja. V tej obliki je delovni list sicer namenjen učencem 6. razreda, saj v njem nastopajo števila, večja od milijon. Idejo učnega lista pa lahko v obliki preiskovalnih aktivnosti uporabimo že za učence 4. in 5. razreda, če jim zmanjšamo velikost števil oziroma odstranimo primere, v katerih nastopajo števila, večja od 10 000 oziroma 1 000 000.

S preiskovalno aktivnostjo namreč realiziramo naslednje cilje iz 4. in 5. razreda osnovne šole:
- ocenijo rezultat pri računanju z velikimi števili,
- razumejo vlogo števila 0 in 1 pri računskih operacijah,
- berejo z razumevanjem,
- matematična pravila, obrazce, definicije ubesedijo in jih uporabijo pri reševanju problemov,
- uporabijo v konkretnih primerih zakon o zamenjavi in zakon o združevanju pri množenju,
- opazujejo vzorec, prepoznajo pravilo v vzorcu in ga nadaljujejo.

Delovni list ***Množenje naravnih števil, ki se končujejo z ničlami*** (Priloga 1) je sestavljen iz uvoda, ki je namenjen vsem učencem, ter aktivnosti, ki so na štirih različnih težavnostnih stopnjah (od popolnoma vodenega dela z asistenco učitelja, ki je primerna za učence z učnimi težavami, do preiskave, ki je primerna za nadarjene učence). Učitelj posameznemu učencu fotokopira **Uvod** in eno od aktivnosti **A**, **B**, **C** ali **Č**, ki so diferencirane glede na učenčevo (pred)znanje, njegove sposobnosti ali želje. Predlagamo, da učitelj list z aktivnostjo A pri znaku ✂ prereže, tako da učenec prejme drugi del z zapisano ugotovitvijo šele, ko reši prvi del. Tudi pomoč in nasvet, ki sta na dnu strani pri aktivnosti C zapisane na obarvani podlagi , naj učitelj učencu izreže ter ponudi le, če učenec izrazi željo po tem.

- Delovni list ***Končno decimalno število***

Tudi ta delovni list (Priloga 2) je sestavljen iz uvoda, ki je namenjen vsem učencem, ter diferenciranih aktivnosti, ki so na treh različnih težavnostnih stopnjah A, B in C. Učitelj posameznemu učencu fotokopira **Uvod** in eno od aktivnosti **A**, **B** ali **C**. Učenci, ki so že kdaj preiskovali, lahko samostojno rešujejo aktivnost C, ostalim pa ponudimo vodeno, oziroma delno vodeno preiskovanje (A oziroma B). Namige, ideje za opazovanje in pomoč, ki so na koncu aktivnosti A in B zapisane na obarvani podlagi, učitelj izreže iz delovnega lista in jih učencu izroči le na njegovo željo.

Namen preiskovanja: učenci ugotovijo, da ulomke, ki imajo v imenovalcu le faktorja 2 in 5, lahko zapišejo s končno decimalno številko, vse ostale ulomke pa lahko napišejo s periodično decimalno številko.

Pričakovano matematično predznanje: *desetiški ulomek zapišejo z decimalno številko in obratno* je cilj 6. razreda v sklopu *Racionalna števila*.

Delovni list je namenjen učencem 7. razreda, saj s preiskovalno aktivnostjo realizirajo naslednje cilje iz učnega načrta:
- z žepnim računalom pretvorijo ulomek v decimalno število,
- nedesetiške ulomke zapišejo s periodičnim decimalnim zapisom,
- opazujejo vzorec in ugotovijo pravilo,
- rešijo odprte in zaprte probleme, razčlenijo problemsko situacijo in postavljajo raziskovalna vprašanja.

Ideje za nadaljevalne preiskovalne aktivnosti: Po tem ko učenci rešijo delovni list ***Končno decimalno število*** in spoznajo še periodična decimalna števila, lahko pri naslednjih urah preiskujejo vzorce števk v periodičnih decimalnih številih (za ulomke z enakim imenovalcem), nadarjeni učenci pa raziščejo, od česa je odvisna dolžina periode periodičnega decimalnega števila.

- Delovni list ***Potence***

Tudi pri sestavljanju delovnega lista ***Potence*** (Priloga 3) smo izhajali iz predpostavke, da učitelji na večini šol že uvajajo in izvajajo preiskovalne aktivnosti z uporabo numeričnega računala o tem, kako množimo/delimo/kvadriramo naravna/racionalna števila in kaj se pri tem zgodi s številom decimalk racionalnega števila oziroma številom ničel, s katerimi se končuje naravno število. V tem delovnem listu smo nadaljevali oziroma nadgradili te preiskave in se vprašali, kaj se pri **potenciranju** zgodi s številom decimalk racionalnega števila in s številom ničel, s katerimi se končuje naravno število.

Delovni list sestavlja **Uvod** in dve aktivnosti: **Aktivnost 1 (Število ničel)** in **Aktivnost 2 (Število decimalk)**.

Pričakovano matematično predznanje: *izračunajo vrednost potence naravnega števila* (cilj v 5. razredu), *uporabljajo računalo pri računskih operacijah z racionalnimi števili*, *zapišejo potenco in izračunajo njeno vrednost* (cilja v 6. razredu).

Delovni list je namenjen učencem 8. razreda, saj s preiskovalnimi aktivnostmi realiziramo naslednje cilje iz učnega načrta:
- zapišejo zmnožek enakih faktorjev kot potenco in obratno,
- poznajo pojme: osnova, eksponent, potenca in vrednost potence,
- izračunajo vrednost potence (osnova je lahko celo število, ulomek, decimalno število ali kvadratni koren števila),
- uporabljajo računalo za računanje s števili, ki so zapisana kot potence,
- razumejo zapise zelo velikih in zelo majhnih števil,
- opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu, vzorec nadaljujejo.

Refleksija po izvedbi

Učitelji so opisane aktivnosti preizkusili v razredu in uporabili predlagane delovne liste. Refleksijo po izvedbi učne ure, kjer so pri dejavnostih uporabili numerično računalo, nam je posredovalo 56 učiteljev. V nadaljevanju je zapisanih nekaj njihovih razmišljanj in ugotovitev.

so učenci po rešenem učnem listu zastavljali drug drugemu vprašanja in odgovarjali nanja. V razredu se je odvila diskusija med otroki. Sama sem bila opazovalec.

so tudi vedenjsko težavni učenci pokazali interes za reševanje naloge.

Dobro mi je uspelo, da ...

so učenci znali z računalom zapisati velika števila v obliki potence.

so učenci samostojno prišli do ugotovitve, katere ulomke lahko zapišejo v obliki končnega decimalnega števila in katerih ne.

so bili aktivni vsi učenci celo učno uro in jim je bilo zelo zanimivo.

Učni načrt predvideva uporabo numeričnega računala že v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju, saj je med standardi znanja za to obdobje zapisano: *uporablja žepno računalo*. Kljub temu se da iz odgovorov učitelje sklepati, da so tokrat učenci pri pouku prvič uporabljali žepno računalo.

Nekateri učitelji so bili prijetno presenečeni nad spretnostjo učencev in njihovim poznavanjem tega orodja:

bodo učenci tako zelo spretni pri uporabi žepnega računala.

so učenci že znali uporabljati kalkulator.

Nisem pričakovala/a, da …

bodo učenci z učnimi težavami tako spretni pri uporabi žepnega računala.

Spet drugi učitelji pa so pričakovali, da bodo učenci (rojeni v informacijski dobi), ki spretno rokujejo z različnimi elektronskimi napravami, spretni tudi pri uporabi žepnega računala.

bodo učenci imeli toliko težav z uporabo kalkulatorjev. Zelo so nespretni in večini učencev moraš pokazati, katero tipko naj pritisnejo.

bodo učenci držali žepno računalo kot mobitel kot mobitel ali katero od elektronskih igric. Dobila sem vtis, da se zato večkrat zatipkajo.

Nisem pričakovala/a, da …

nekateri učenci, kljub temu da ogromno časa preživijo na telefonih in računalnikih, niso najbolj vešči s kalkulatorji.

bodo učenci imeli težave s preprostimi tipkami, kot sta tipki za deljenje in množenje.

Nekateri učitelji so izrazili začudenje nad sposobnostmi učencev za preiskovanje matematičnih zakonitosti in so bili nad tem prijetno presenečeni.

bodo učenci s takšno željo in vnemo samostojno preiskovali in samostojno prišli do ugotovitev.

da bodo navodila pazljivo brali in jih upoštevali – računali so brez in z uporabo računala.

Nisem pričakovala/a, da …

bodo učenci s takim navdušenjem opazovali svoje rezultate, čeprav množenje naravnih števil z desetiško enoto obvladajo.

Spet drugi učitelji pa so od učencev pričakovali več.

Čeprav pri delu in urah dajem velik poudarek na »ocenimo rezultat«, me je presenetila velika nekritičnost učencev glede rezultatov, ki jih je ponudil kalkulator. So mu »slepo zaupali«. To kaže tudi na to, da je premnogim najbolj pomembno to, da se nalogo čim hitreje rešijo. Da pa se reši tudi pravilno, je bolj drugotnega pomena.

učenci ne bodo razumeli navodil.

Nisem pričakovala/a, da …

bodo imeli učenci toliko težav z ubeseditvijo pravil.

bodo nekateri učenci potrebovali več nalog oz. podanih primerov, iz katerih so potem sami ugotovili, kako se množi naravna števila, ki se končajo z 0.

Učitelji so po izvedbi učne ure preiskovanja s pomočjo žepnega računala zapisali tudi:

večkrat uporabila žepna računala, s pomočjo katerih bi samostojno raziskovali in odkrivali različne vzorce in pravila.

Lahko bi …

žepno računalo začeli uporabljati pri kakšni uri matematike v 4. oz. 5. razredu.

tudi sama pripravila podoben delovni list za druge vsebine.

naredila kartone z namigi za reševanje za tiste učence, ki imajo težave pri reševanju.

Učitelji so v anketi priznali, da premalo uporabljajo žepno računalo in to iz različnih razlogov. Ob tem, ko so v razredu preizkusili ponujene učne liste, so se marsikaj naučili in spremenili svoje mnenje.

Pri tem sem se naučil/a, da …

- je dobro učencem pustiti čas in da samostojno opravijo delo.
- je računalo uporabno tudi za obravnavo novih snovi.
- je računalo pri problemskih nalogah zelo dobrodošel pripomoček.
- lahko tudi učno šibkejši pridejo sami do neke ugotovitve-rešitve, ne pa da jim vse serviramo na pladnju.

Na koncu smo učitelje poprosili, da zapišejo še kaj, kar želijo podeliti z drugimi.

Kaj bi še želeli sporočiti?

- Spoznala sem, da je smiselno vključevati žepno računalo pri raziskovanju matematičnih pravil, saj lahko v krajšem času preizkusijo veliko možnosti in tudi pridejo samostojno do posplošitev. Za slabše učence pa je treba pripraviti namige.
- Včasih razmišljam, da bi učenci računali cel čas z ŽR (zelo dosti časa porabijo za računanje – so zelo nespretni, ne obvladajo poštevanke ...) tako da bi imeli več časa za razmišljanje, sklepanje, povezovanje ... reševanje problemov.

Zaključek

Raznolike strategije, ki jih učitelji uporabljajo za usvajanje novih vsebin, vključujejo med drugim tudi uporabo numeričnega žepnega računala. Opisane aktivnosti, ki so diferencirane in tako prilagojene raznolikim učencem, omogočajo, da učenci samostojno s preiskovanjem odkrivajo zakonitosti pri matematiki. Učitelj je le usmerjevalec, moderator učnega procesa.

Viri in literatura

Žakelj, A. idr. (2011). ***Učni načrt. Program osnovna šola. MATEMATIKA***. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod RS za šolstvo.

Refleksije učiteljev pri delu na daljavo v spletni učilnici za matematiko v osnovni šoli. https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=64

Množenje naravnih števil, ki se končujejo z ničlami

Uvod

Ponovi, kako množimo naravno število z 10, 100, 1000 ...

Najprej izračunaj na pamet, nato preveri z uporabo žepnega računala.

$7 \cdot 10 =$ _____ $7008 \cdot 10000 =$ _____

$1000 \cdot 60840 =$ _____ $1000 \cdot 100 =$ _____

Nekatera naravna števila se **končujejo** z ničlami. Npr. 50780, 1700, 602000.

Število 5078**0** se končuje z eno ničlo, število 17**00** se končuje z dvema ničlama, število 602**000** se končuje s tremi ničlami.

Še sam zapiši nekaj takih števil, ki se končujejo z ničlami. _____

_____

_____

_____

_____

_____

V nadaljevanju reši eno od aktivnosti **A**, **B**, **C** ali **Č**.

A popolnoma vodeno delo z asistenco učitelja, primerno za učence z učnimi težavami

B strukturirano delo z napotki in namigi

C preiskava za učence, ki so že vajeni takšnega dela

Č preiskava, primerna za nadarjene učence

Aktivnost A

1. Izračunaj z uporabo žepnega računala:

160 · 30 = _____ 540 · 70000 = _____

23000 · 70 = _____ 40200 · 900 = _____

3900 · 6000 = _____ 7000 · 72000 = _____

2. Pobarvaj vse ničle, s katerimi se **končujejo** števila. Primer: 16**0** · 3**0** = 48**00**

Preštej število teh ničel. Izpolni preglednico, v katero vpisuješ ugotovitve iz zgornjih primerov:

Uvodni primeri	Število ničel, s katerimi se **končuje** prvi faktor	Število ničel, s katerimi se **končuje** drugi faktor	Število ničel, s katerimi se **končuje** produkt
160 · 30 =	1	1	2
23000 · 70 =			
3900 · 6000 =			
540 · 70000 =			
40200 · 900 =			
7000 · 72000 =			

3. Kaj ugotoviš? Zapiši ugotovitev. _____

4. Svojo ugotovitev preveri na naslednjih primerih. Uporabi žepno računalo.

400 · 7000 = _____ 230 · 90000 = _____

60000 · 560 = _____ 71000 · 80 = _____

73900 · 86000 = _____ 70600 · 200 = _____

Ugotovitev: Pomnožimo števili pred ničlami prvega in drugega faktorja ter prepišemo ničle prvega faktorja in ničle drugega faktorja.

Primeri:

2000 · **3**0 = **6**0000 **4**00 · **7**0000 = **28**000000

500 · **2**0 = **10**000

Bodi pozoren, če se tudi produkt števil pred ničlami končuje z ničlo!

5 · 2 = 1**0**

5. Na podoben način še sam na pamet izračunaj naslednje primere.

$50 \cdot 5000 =$ _____

$600 \cdot 2000 =$ _____

$80 \cdot 500 =$ _____

$250 \cdot 2000 =$ _____

$50 \cdot 6000 =$ _____

$800 \cdot 9 =$ _____

$50 \cdot 60 =$ _____

$120 \cdot 500 =$ _____

6. Preveri z uporabo žepnega računala. Ali se tvoji izračuni ujemajo z izračuni, ki si jih naredil z uporabo žepnega računala?

7. Še sam sestavi nekaj primerov zase ali za sošolca. Najprej jih rešita na pamet, nato jih preverita z uporabo žepnega računala.

Aktivnost B

1. Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih produktov.

$160 \cdot 30 =$ _____ $540 \cdot 70000 =$ _____

$23000 \cdot 70 =$ _____ $40200 \cdot 900 =$ _____

2. Opazuj, s koliko ničlami se končujeta posamezna faktorja in s koliko ničlami se končuje vrednost produkta. Kaj ugotoviš? Zapiši ugotovitev.

Ugotovitev:

3. Z uporabo zapisane ugotovitve napovej vrednosti naslednjih produktov in jih zapiši.

$60 \cdot 7 =$ _____ $4 \cdot 800 =$ _____

$600 \cdot 7000 =$ _____ $4000 \cdot 800 =$ _____

$60 \cdot 700 =$ _____ $200 \cdot 50000 =$ _____

$60 \cdot 7000000 =$ _____ $25000 \cdot 80 =$ _____

Preveri z uporabo žepnega računala.

Izpiši primere produktov, pri katerih si se zmotil. _____

V primeru, da si se zmotil, ugotovi, zakaj si se zmotil. Preveri, ali tvoja zgoraj zapisana ugotovitev velja za vse primere, ali pa jo moraš še dopolniti.

4. Z uporabo žepnega računala izračunaj:

$500 \cdot 20 =$ _____ $80 \cdot 5000 =$ _____

$120 \cdot 2500 =$ _____ $1250 \cdot 80 =$ _____

Ali tudi za te štiri primere velja tvoja ugotovitev o številu ničel, s katerimi se končuje vrednost produkta dveh števil?

_____

Zakaj? _____

_____

Zapiši še sam podoben primer.

Če tvoja ugotovitev ni bila napisana dovolj natančno, jo dopolni in zapiši v spodnji okvir.

Dopolnjena ugotovitev:

5. Spoznaj še novo strategijo.

Števila, ki se končujejo z ničlami, lahko zapišemo kot produkt z 10, 100, 1000 ... Npr.:

$70000 = 7 \cdot 10000$ $\quad$ $230 = 23 \cdot 10$

Tako množimo:

$70000 \cdot 230 = (7 \cdot 10000) \cdot (23 \cdot 10) = (7 \cdot 23) \cdot (10000 \cdot 10) = 161 \cdot 100000 = 16100000$

Katere računske zakone smo pri tem uporabili? _____

Na podoben način pomnoži še naslednje primere.

$300 \cdot 90 = (__ \cdot 100) \cdot (__ \cdot 10) = (__ \cdot __) \cdot (100 \cdot 10) = ___ \cdot 1000 = ___$

$1300 \cdot 800 =$ _____

$20 \cdot 50 =$ _____

Kaj ugotoviš? _____

6. Pridobljeno znanje uporabi še na produktu več števil.

Napovej vrednost naslednjih produktov. Zapiši jih.

$2 \cdot 3 \cdot 4 =$ _____ $\quad$ $2 \cdot 7 \cdot 5 =$ _____

$20 \cdot 3 \cdot 40 =$ _____ $\quad$ $20 \cdot 70 \cdot 50 =$ _____

$2 \cdot 3000 \cdot 400 =$ _____ $\quad$ $2000 \cdot 700 \cdot 50 =$ _____

$20 \cdot 30 \cdot 40 =$ _____ $\quad$ $2 \cdot 70 \cdot 50000 =$ _____

$200 \cdot 30 \cdot 400 =$ _____ $\quad$ $200 \cdot 700 \cdot 500 =$ _____

$200 \cdot 300 \cdot 4 =$ _____ $\quad$ $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 =$ _____

$2000 \cdot 300 \cdot 40 =$ _____ $\quad$ $2000 \cdot 70 \cdot 500 \cdot 30 =$ _____

Preveri z uporabo žepnega računala.

Aktivnost C

V uvodu si se srečal z naravnimi števili, ki se končujejo z ničlami. Razišči, ali se tudi produkt dveh takih števil končuje z ničlami.

Če potrebuješ pomoč ali nasvet, prosi učitelja zanju.

Od česa je odvisno število ničel v dobljenem produktu?

Zapiši ugotovitev: _____

_____

Razišči še produkt več faktorjev, ki se končujejo z ničlami.

Zapiši ugotovitev: _____

_____

✂ .....

Pomoč: Pomnoži prvi dve števili, ki si ju zapisal pri zadnji aktivnosti v uvodu. Kaj opaziš?

Nasvet: Zapiši čim več različnih primerov. Sistematično zapisuj.

Aktivnost Č

Nekatera naravna števila se končujejo z ničlami.

Samostojno razišči, ali se vsota/razlika/produkt/količnik dveh/treh/štirih takih števil končuje z ničlami. Od česa je odvisno število teh ničel?

Zapiši ugotovitve: _____

_____

Kaj bi še lahko raziskal?

Izdelaj učni list za svojega sošolca.

Končno decimalno število

Uvod

Naslednje ulomke zapiši v obliki decimalne številke. Pomagaj si z žepnim računalom.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{11}{8} =$

$\frac{1}{3} =$

$\frac{4}{33} =$

$\frac{3}{20} =$

$\frac{5}{6} =$

Kaj si opazil? Zapiši vse ugotovitve: _____

_____

_____

V nadaljevanju reši eno od nalog:

A vodeno preiskovanje

B delno vodeno preiskovanje

C samostojno preiskovanje

Aktivnost A

Razišči, katere ulomke lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke in katerih ne.

Naslednje **okrajšane** ulomke z uporabo žepnega računala pretvori v decimalno številko.

$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{5}{11} =$	$\frac{13}{40} =$
$\frac{5}{6} =$	$\frac{7}{5} =$	$\frac{9}{20} =$
$\frac{1}{9} =$	$\frac{7}{10} =$	$\frac{1}{12} =$
$\frac{4}{25} =$	$\frac{11}{24} =$	$\frac{13}{50} =$

Obkroži ulomke, ki si jih zapisal s **končno** decimalno številko.

Zgornje ulomke razvrsti v spodnjo preglednico. V preglednico razvrsti tudi ulomke iz uvoda.

Ulomki, ki jih lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke.	Ulomki, ki jih ne moremo zapisati o obliki končne decimalne številke.
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{11}$

Razišči, kaj imajo skupnega ulomki, ki jih lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke.

Če imaš težave, prosi učitelja za **namig**.

Zapiši ugotovitev, v katerih primerih lahko ulomek zapišemo v obliki končne decimalne številke:

Preverimo, zakaj. Pri učitelju dobiš njegov zapis ugotovitve. Ali si zapisal pravilno?

Sedaj si oglej ulomke, ki so zapisani v desnem stolpcu preglednice. Kaj ugotoviš?

Če potrebuješ pomoč, prosi učitelja za **idejo za opazovanje**.

Zapiši ugotovitve: _____

_____

_____

Če ne ugotoviš ničesar, prosi učitelja za **pomoč**.

Zapiši povzetek: Katere okrajšane ulomke lahko zapišemo s končno decimalno številko in pri katerih ulomkih tega ne moremo storiti?

_____

_____

_____

_____

Namig 1: Opazuj njihove imenovalce.

Izpiši imenovalce ulomkov, ki si jih zapisal v obliki končne decimalne številke.

Kaj imajo skupnega ti imenovalci?

Namig 2: Razcepi te imenovalce na prafaktorje. Npr: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$25 =$

$8 =$

…

Zapiši ugotovitev, kaj imajo skupnega imenovalci ulomkov, ki jih lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke.

Namig 3: Koliko različnih in kateri faktorji so navzoči v teh imenovalcih?

Preverimo, zakaj. Ulomke z imenovalci, ki so sestavljeni **le** iz faktorjev 2 in 5, lahko razširimo do desetiškega ulomka, ki ga lahko zapišemo s končno decimalno številko.

Npr.:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = 1{,}2$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{125}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{35}{10 \cdot 10} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Na podoben način še sam nekaj ulomkov (ki si jih vpisal v levi stolpec preglednice) brez uporabe računala razširi na desetiški ulomek in jih zapiši v obliki decimalne številke.

Ideja za opazovanje. Opazuj njihove imenovalce.

Izpiši imenovalce ulomkov, ki jih ne moremo zapisati v obliki končne decimalne številke.

Tudi te imenovalce razcepi na prafaktorje.

Pomoč: Ali lahko ulomek z imenovalcem 3 razširimo z nekim naravnim številom do desetiškega ulomka (ulomka, ki ima v imenovalcu poljubno desetiško enoto, npr. do 10, 100, 1000 …)?

Oziroma, ali je katera desetiška enota 10, 100, 1000 … deljiva s 3?

Torej ulomka $\frac{1}{3}$ ne moremo razširiti na desetiški ulomek, ki bi ga zapisali kot decimalno število.

$\frac{1}{3} = \frac{?}{10}$

Podobno ugotovitev zapiši še za ostale ulomke iz desnega stolpca preglednice.

Aktivnost B

Razišči, katere ulomke lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke in katerih ne.

Sistematično izberi vsaj 20 okrajšanih ulomkov in jih z uporabo žepnega računala pretvori v decimalno številko.

Razvrsti jih v spodnjo preglednico.

Ulomki, ki jih lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke.	Ulomki, ki jih ne moremo zapisati o obliki končne decimalne številke.

Kaj imajo skupnega ulomki, ki jih lahko zapišeš v obliki končne decimalne številke?

Če potrebuješ **namig**, prosi zanj učitelja.

Zapiši ugotovitev, v katerih primerih lahko ulomek zapišemo v obliki končne decimalne številke in pri katerih ulomkih tega ne moremo storiti.

✂

Namig: Opazuj njihove imenovalce.

Aktivnost C

Nekatere ulomke lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke, npr: $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Pri nekaterih ulomkih pa dobimo neskončno decimalno število, npr. $\frac{2}{3} = 0{,}6666666666\ldots$

Samostojno razišči, katere okrajšane ulomke lahko zapišemo v obliki končne decimalne številke. Kaj jim je skupno?

Zapiši svoje ugotovitve.

Kaj bi še lahko raziskal?

Potence

Uvod

Naslednje produkte zapiši v obliki potence.

$6 \cdot 6 \cdot 6 =$ _____

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ _____

$5{,}7 \cdot 5{,}7 =$ _____

$0{,}32 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}32 =$ _____

$\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} =$ _____

$2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{4} =$ _____

Njihove vrednosti izračunaj z uporabo žepnega računala (uporabi tudi tipko za ulomke).

Aktivnost 1 (Število ničel)

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih potenc:

$5000^2 =$ _____

$70000^2 =$ _____

$30^4 =$ _____

$400^3 =$ _____

$900^3 =$ _____

$60^5 =$ _____

$30000^2 =$ _____

$1000^3 =$ _____

$200^4 =$ _____

$110^4 =$ _____

Primerjaj število ničel, s katerimi se končuje število, in število ničel, s katerimi se končuje vrednost potence tega števila. Kaj ugotoviš? Zapiši svojo ugotovitev:

_____

_____

Svojo ugotovitev preveri na naslednjih primerih. Najprej vrednost potenc poskusi napovedati oz. izračunaj na pamet, nato pa vrednost potenc izračunaj še z uporabo žepnega računala in po potrebi popravi svojo napoved.

$2^3 =$ _____

$3^4 =$ _____

$20^3 =$ _____

$30^4 =$ _____

$200^3 =$ _____

$300^4 =$ _____

$2000^3 =$ _____

$3000^4 =$ _____

$20000^3 =$ _____

$30000^4 =$ _____

$200000^3 =$ _____

$300000^4 =$ _____

Ali si na zaslonu žepnega računala zasledil drugačen zapis, kot si ga napovedal sam? _____

Torej lahko velika števila zapišemo v obliki potence, npr.: $8000000000000000000 = 8 \cdot 10^{18}$.

Zapiši še sam nekaj podobnih primerov in jih preveri z žepnim računalom.

Utrjuj različne zapise velikih števil:

Izračunaj vrednosti naslednjih produktov.

$5 \cdot 10^4 =$ _____ $8{,}3 \cdot 10^5 =$ _____

$7 \cdot 10^{11} =$ _____ $1{,}23 \cdot 10^8 =$ _____

$4 \cdot 10^{15} =$ _____ $3{,}0045 \cdot 10^{12} =$ _____

Zapiši kot produkt števila (med 1 in 10) z desetiško potenco.

40000000000 = _____ 95000000000 = _____

300000000000000000 = _____ 60870000000000000 = _____

700000000000000 = _____ 63500000000000000000 = _____

***Če ti ostane še kaj časa**

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih potenc. Nato vrednost še primerno zaokroži.
Primer: $23^9 \doteq 1{,}8 \cdot 10^{12}$

$9^{13} \doteq$ _____ $73{,}6^7 \doteq$ _____

$15^{22} \doteq$ _____ $7{,}9^{15} \doteq$ _____

Aktivnost 2 (Število decimalk)

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih potenc:

$0{,}4^3 =$ _____ $3{,}007^2 =$ _____

$1{,}02^4 =$ _____ $0{,}9^5 =$ _____

$7{,}2^5 =$ _____ $6{,}0008^2 =$ _____

$0{,}423^3 =$ _____ $0{,}71^4 =$ _____

Sistematično zbiraj podatke o številu decimalk, ki jih ima dano število, in številu decimalk, ki jih ima vrednost potence tega števila. Kaj ugotoviš?

_____

_____

_____

Svojo ugotovitev preveri na naslednjih primerih. Najprej vrednost potenc poskusi napovedati oz. izračunaj na pamet, nato pa vrednost potenc izračunaj še z uporabo žepnega računala in po potrebi popravi svojo napoved.

$5^3 =$ _____ $9^4 =$ _____

$0{,}5^3 =$ _____ $0{,}9^4 =$ _____

$0{,}05^3 =$ _____ $0{,}09^4 =$ _____

$0{,}005^3 =$ _____ $0{,}009^4 =$ _____

$0{,}0005^3 =$ _____ $0{,}0009^4 =$ _____

$0{,}00005^3 =$ _____ $0{,}00009^4 =$ _____

Ali si na zaslonu žepnega računala zasledil drugačen zapis kot si ga predvideval sam? _____

Torej lahko majhna števila zapišemo v obliki potence, npr.: $0{,}000000000125 = 1{,}25 \cdot 10^{-10}$.

Zapiši še sam nekaj podobnih primerov in jih preveri z žepnim računalom.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Utrjuj različne zapise majhnih števil:

Izračunaj vrednosti naslednjih produktov.

$5 \cdot 10^{-4} =$ _____ $4{,}8 \cdot 10^{-5} =$ _____

$7 \cdot 10^{-9} =$ _____ $1{,}203 \cdot 10^{-8} =$ _____

$4 \cdot 10^{-15} =$ _____ $7{,}45 \cdot 10^{-12} =$ _____

Zapiši kot produkt števila (med 1 in 10) z desetiško potenco.

0,00000009 = _____ 0,00000000098 = _____

0,00000000003 = _____ 0,00000000000013022 = _____

0,000000000000007 = _____ 0,000000000000004030201 = _____

***Če ti ostane še kaj časa**

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih potenc. Nato vrednost še primerno zaokroži.
Primer: $0{,}023^9 \doteq 1{,}8 \cdot 10^{-15}$

$0{,}3^{13} \doteq$ _____ $0{,}00006^7 \doteq$ _____

$0{,}15^{22} \doteq$ _____ $0{,}00904^{15} \doteq$ _____

Numerično računalo pri vsebini integral

Irena Rauter Repija
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Povzetek

V prispevku je opisana uporaba numeričnega računala pri raziskovanju geometrijskega pomena določenega integrala in njegovih lastnosti ter uporaba računala pri preverjanju rezultatov rešenih nalog.

Ključne besede: določeni integral, lastnosti določenega integrala, numerično računalo

Using a Calculator to Learn Integrals

Abstract

The article describes calculator use in studying the geometric concept of an integral and its characteristics as well as its use in the verification of the solved tasks.

Keywords: certain integral, characteristics of a certain integral, calculator

Uvod

V srednji šoli je numerično računalo pri pouku matematike skoraj nepogrešljiv pripomoček. Uporabljamo ga za računanje korenov poljubnih stopenj, za računanje vrednosti kotnih funkcij, logaritmov, za preverjanje rezultatov, pri usvajanju novega znanja ter pri preiskovanju in reševanju matematičnih problemov.

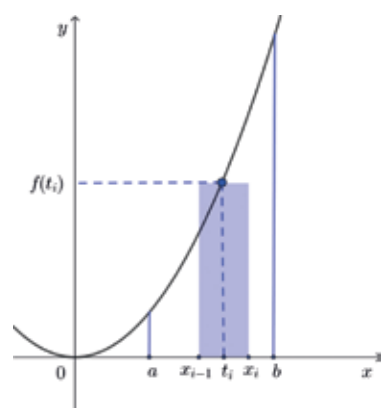
Najprej poglejmo, kako numerično računalo lahko uporabimo za preiskovanje geometrijskega pomena določenega integrala in njegovih lastnosti. Na šoli imamo komplet numeričnih računal, ki jih lahko uporabljamo pri pouku matematike. Večina učencev pa pri opisanem pouku uporablja kar svoje računalo. Na šolskem računalniku imamo nameščen emulator za šolski komplet računal, ki ga uporabimo pri demonstraciji uporabe računala.

Do definicije in geometrijskega pomena določenega integrala

Za uvod v obravnavano snov z dijaki običajno najprej pogledamo eno izmed aktivnih slik, ki prikazuje, kako s pomočjo ploščine pravokotnikov pridemo do ploščine lika med grafom funkcije in abscisno osjo. Dijaki do takrat že znajo izračunati ploščino štirikotnika in nedoločeni integral, ne poznajo pa še zveze med določenim in nedoločenim integralom. Zatem zapišemo definicijo določenega integrala.

Definicija določenega integrala:

Določeni integral zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$, je limita vsote $\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i$, kjer je t_i poljubna točka z intervala $[x_{i-1}, x_i]$, ko gredo širine vseh delnih intervalov Δx_i proti 0, število delilnih točk pa v neskončnost:



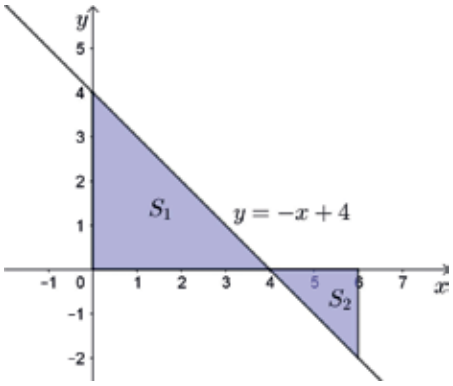
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

(Bon Klanjšček, 2012).

Preden zapišemo geometrijski pomen določenega integrala, z numeričnim računalom raziščimo, kako je ploščina lika, ki ga graf zvezne funkcije oklepa z abscisno osjo na danem intervalu, povezana z vrednostjo določenega integrala.

V ta namen vzemimo funkcijo f s predpisom $f(x) = -x + 4$ in poglejmo lik, ki ga graf funkcije f na intervalu [0,6] oklepa z abscisno osjo, kot prikazuje slika 1.

Ker ima funkcija f na intervalu [0, 4] pozitivne vrednosti in na intervalu [4, 6] negativne vrednosti, zaradi lažjega razumevanja razdelimo lik med grafom funkcije f in abscisno osjo pri $x = 4$ na dva dela. Ploščino lika S_L, ki ga sestavljata dva pravokotna trikotnika s ploščinama S_1 in S_2 (slika 1) izračunajmo z uporabo obrazca za računanje ploščine pravokotnega trikotnika, za računanje



Slika 1: Lik med grafom funkcije in abscisno osjo.

določenega integrala pa uporabimo numerično računalo, kot je prikazano na sliki 2.

Izračunane ploščine in dobljene vrednosti določenega integrala zapišimo v preglednico 1.

Preglednica 1:

$S_1 =$	$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$
$S_2 =$	$\int_4^6 (-x+4)\,dx =$
$S_L =$	$\int_0^6 (-x+4)\,dx =$

Slika 2: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Izpolnjena preglednica 1:

$S_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	$\int_0^4 (-x+4)\,dx = 8$
$S_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$	$\int_4^6 (-x+4)\,dx = -2$
$S_L = S_1 + S_2 = 8 + 2 = 10$	$\int_0^6 (-x+4)\,dx = 6$

Dijaki nato primerjajo izračunane ploščine in vrednosti določenega integrala. Ugotovimo, da sta na intervalu [0, 4] ploščina in določeni integral oba pozitivna, na intervalu [4, 6] pa je določeni integral negativen. Vprašamo se, zakaj je prišlo do tega. Pogledamo definicijo določenega integrala, kjer vidimo, da je predznak določenega integrala odvisen od predznaka funkcijskih vrednosti na danem intervalu. Na intervalu [4, 6] so vse funkcijske vrednosti negativne, zato je tudi vrednost določenega integrala negativna. Posebej poglejmo, zakaj na intervalu [0, 6] pride do razlike med izračunano ploščino lika in vrednostjo določenega integrala. Ploščina je na celotnem intervalu enaka vsoti ploščin, medtem ko je vrednost določenega integrala enaka razliki med ploščinama likov, ki ležita nad in pod abscisno osjo. Vse skupaj strnemo v geometrijski pomen določenega integrala:

- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod nenegativna ($f \geq 0$), je integral $\int_a^b f(x)dx$ enak ploščini lika, ki je omejen z abscisno osjo, grafom funkcije f ter premicama $x = a$ in $x = b$.
- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod negativna ($f < 0$), je integral $\int_a^b f(x)dx$ negativen in enak nasprotni vrednosti ploščine lika, omejenega z grafom funkcije f, abscisno osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$.
- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ pozitivna in negativna, je določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ enak razliki med ploščinami likov, ki ležijo nad osjo x, in ploščinami likov, ki ležijo pod osjo x (liki so omejeni z grafom funkcije in abscisno osjo na danem intervalu).

(Bon Klanjšček, M. in ostali, 2012).

Raziskujemo lastnosti določenega integrala

Z numeričnim računalom (slika 3 in slika 4) izračunamo še nekaj vrednosti, ki so vezane na lastnosti določenega integrala. Rezultate zapišemo v preglednico 2 in preglednico 3.

Preglednica 2:

$\int_0^4 \big((-x) + (4)\big)\,dx =$	$\int_0^4 (-x)\,dx + \int_0^4 (4)\,dx =$
$\int_0^4 2 \cdot (-x+4)\,dx =$	$2 \cdot \int_0^4 (-x+4)\,dx =$

Slika 3: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Preglednica 3:

$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$	$\int_0^3 (-x+4)\,dx + \int_3^4 (-x+4)\,dx =$
$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$	$\int_4^0 (-x+4)\,dx =$
$\int_1^1 (-x+4)\,dx =$	$\int_4^4 (-x+4)\,dx =$

Slika 4: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Z dijaki se nato pogovorimo o dobljenih rezultatih in zapišemo naslednje lastnosti določenega integrala.

- Določeni integral vsote dveh funkcij je enak vsoti določenih integralov posameznih funkcij:
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
- Določeni integral zmnožka funkcije s številom je enak zmnožku števila in določenega integrala funkcije:
$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
- Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in točka c poljubna točka na tem intervalu, je:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- Če meji določenega integrala med seboj zamenjamo, integral spremeni predznak:
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$
- Če sta meji enaki, ima integral vrednost 0.
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(Bon Klanjšček, 2012).

Prvi del, v katerem smo raziskovali geometrijski pomen in lastnosti določenega integrala, zaključimo z zapisom osnovne formule integralskega računa, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom. Nato nekatere vrednosti določenega integrala, ki smo jih prej dobili z računalom, utemeljimo še računsko.

Osnovni izrek integralnega računa (Newton-Leibnizova formula)

Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, je $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, kjer je F poljuben nedoločeni integral funkcije f: $F'(x) = f(x)$ (Bon Klanjšček, M. in ostali, 2012).

Preverimo naslednje vrednosti določenega integrala z računanjem določenega integrala po osnovni formuli integralskega računa:

$$\int_0^4 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^4 = \left(-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = 8$$

$$\int_4^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_4^6 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right) = -2$$

$$\int_0^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^6 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = 6$$

Vidimo, da so izračune vrednosti enake kot v izpolnjeni preglednici 1.

Za vajo izračunamo še določena integrala:

$$\int_0^3 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^3 = \left(-\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = \frac{15}{2}$$

$$\int_3^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^4 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right) = -\frac{3}{2}$$

Vidimo, da je z izbiro delilne točke pri $x = 3$ vrednost določenega integrala na $[0, 6]$ ravno tako enaka 6.

$$\int_0^6 (-x+4)\,dx) = \int_0^3 (-x+4)\,dx + \int_3^6 (-x+4)\,dx = \frac{15}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$$

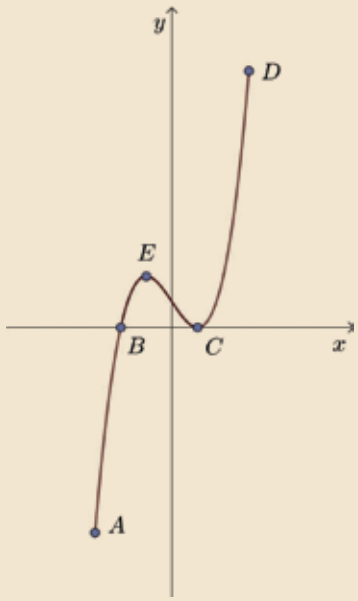
Tudi te rezultate lahko preverimo na sliki 1 s pomočjo ploščin in ustreznim predznakom določenega integrala.

V nadaljevanju si oglejmo še en primer uporabe numeričnega računala, in sicer kako numerično računalo uporabljamo za preverjanje rezultatov.

Pri reševanju naslednje naloge bomo vse rešitve utemeljili računsko, nato pa rezultate preverili še z računalom.

Naloga

Na sliki je narisan graf funkcije $f\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ in na njem točke A, B, C, D in E (slika 5).



Slika 5: Graf funkcije *f*.

a) Izračunajte koordinate točk A, B, C, D in E.

b) Natančno izračunajte koordinati presečišča grafa funkcije f s premico $x - \sqrt{2} = 0$.

c) Izračunajte absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y = 3$. Rezultat zapišite na dve mesti natančno.

č) Zapišite vrednosti spremenljivke x, za katere je $f(x) \geq 0$.

d) Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Rešitev naloge

a) Izračunajte koordinate točk A, B, C, D in E.

Točki A in D:

Računsko

Ker je funkcija f definirana na intervalu $[-3, 3]$, sta abscisi točk A in D enaki $x_A = -3$ in $x_D = 3$. Izračunajmo njuni ordinati.

$$y_A = f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-3) + 1 = -8$$

$$y_D = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3 + 1 = 10$$

Zapišemo koordinati točke A in D: $A(-3, -8)$ in $D(3, 10)$

Rezultat preverimo z računalom

Slika 6 prikazuje, kako z računalom preverimo ordinato točke A. Nato še enkrat uporabimo ukaz CALC in preverimo ordinato točke D.

Vnesemo izraz in uporabimo ukaz CALC.	Izberemo $x = -3$.	Ordinata točke A je -8.

Slika 6: Računanje ordinate točke A z numeričnim računalom.

Točki B in C:

Računsko

V točkah B in C graf funkcije f seka abscisno os. Z uporabo Hornerjevega algoritma izračunamo ničli funkcije f.

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 2)\,(x - 1)^2 = 0$$

$$x_1 = -2 \text{ in } x_{2,3} = 1$$

Zapišemo koordinati točke B in C: $B(-2, 0)$ in $C(1, 0)$.

Rezultat preverimo z računalom

Na računalu izberemo ukaz za računanje ničel polinoma tretje stopnje.

Vnesemo vrednosti koeficientov a, b, c in d.	Preberemo eno ničlo: $x_1 = -2$	Preberemo drugo ničlo: $x_2 = 1$

Slika 7: Računanje ničel z numeričnim računalom.

Točki E in C:

Računsko

Izračunamo prvi odvod funkcije f ter izračunamo abscisi stacionarnih točk.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x-1)(x+1)$$

$$\frac{3}{2}(x+1)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

Izračunamo pripadajoči ordinati $y_E = f(-1) = 2$ in $y_C = f(1) = 0$ ter zapišemo koordinati točk E in C: $E(-1, 2)$ in $C(1, 0)$.

Rezultat preverimo z računalom

Zapišemo odvod funkcije f in izraz izenačimo z 0.	Izberemo ukaz SOLVE.	Preberemo absciso prve točke $x_E = -1$ in nato še absciso druge točke $x_C = 1$.

Slika 8: Računanje ničel odvoda z numeričnim računalom.

Z numeričnim računalom preverimo ordinati točk E in C na podoben način, kot smo to naredili za ordinato točke A.

b) Natančno izračunajte koordinati presečišča grafa funkcije f s premico $x - \sqrt{2} = 0$.

Računsko

Iz enačbe $x - \sqrt{2} = 0$ izrazimo $x = \sqrt{2}$ ter izračunamo ordinato presečišča.

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}^3 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 1$$

$$y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Zapišemo koordinati presečišča: $P\left(\sqrt{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

Rezultat preverimo z računalom

Vnesemo izraz in uporabimo ukaz CALC.	Vstavimo $x = \sqrt{2}$.	Preberemo ordinato presečišča $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Slika 9: Računanje ordinate presečišča z numeričnim računalom.

c) Izračunajte absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y = 3$. Rezultat zapišite na dve mesti natančno.

Računsko

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 3$$

$$x^3 - 3x - 4 = 0$$

Hitro se lahko prepričamo, da enačba nima celoštevilskih rešitev. Iz narisanega grafa lahko razberemo, da bo abscisa presečišča nekje med $x = 2$ in $x = 3$. Uporabimo metodo bisekcije in izračunamo rešitev $x = 2{,}2$ na dve mesti natančno.

Rezultat preverimo z računalom

Z računalom imamo več možnosti za preizkus.

Uporabimo lahko ukaz za reševanje polinomske enačbe 3. stopnje $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ali pa zapišemo enačbo $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 3$ in z ukazom SOLVE dobimo približek $x = 2{,}2$. Lahko pa rezultat preverimo, kot prikazuje slika 9.

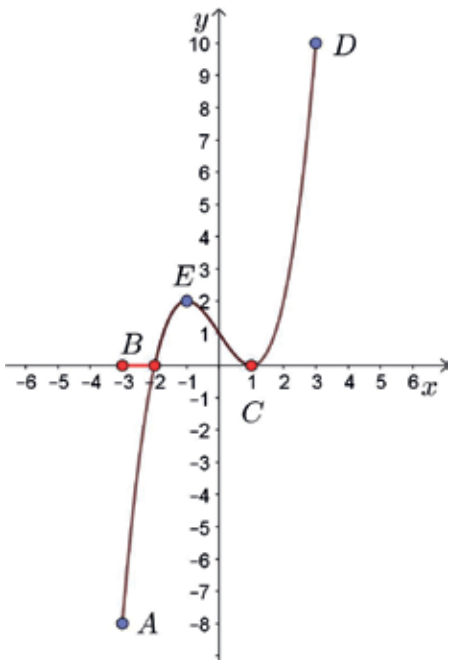
Vnesemo izraz in uporabimo ukaz SOLVE.	Vstavimo $y = 3$.	Preberemo absciso presečišča 2,2.

Slika 10: Računanje abscise presečišča z numeričnim računalom.

č) Zapišite vrednosti spremenljivke x, za katere je $f(x) \geq 0$.

Rešitev preberemo z grafa

Potem, ko smo izračunali koordinate točk na grafu funkcije f, lahko iz slike preberemo $f(x) \geq 0$ rešitev neenačbe: $x \in [-3, -2] \cup \{1\}$



Rezultat preverimo z računalom

Na računalu izberemo ukaz za reševanje polinomske neenačbe tretje stopnje $ax^3 + bx^2 + cx + d \leq 0$.

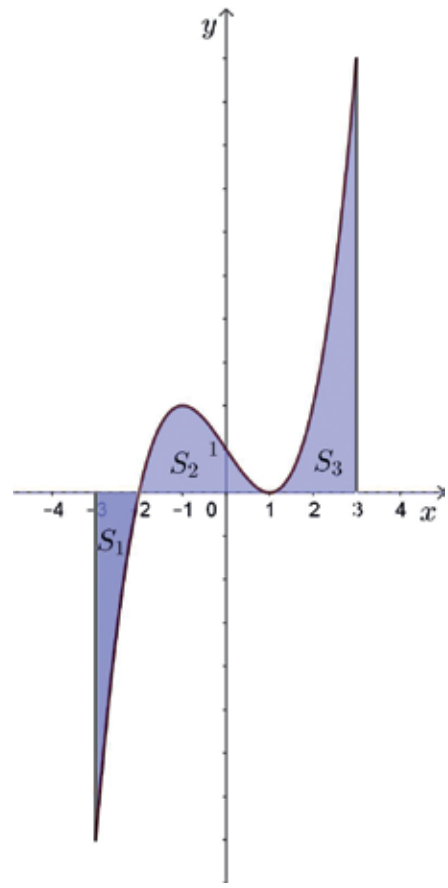
Vnesemo koeficiente a, b, c in d.	Preberemo rešitev: $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$

Slika 11: Reševanje polinomske neenačbe z numeričnim računalom.

Rezultat, ki je prikazan na računalu za funkcijo f, ki je definirana le na intervalu [3, 3], ni pravilen. Tega se moramo zavedati in predlagane rešitve pravilno uporabiti:
$x \in [-3, -2] \cup \{1\}$

d) Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Računsko



Slika 12: Lik med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Najprej izračunajmo ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ oklepa z abscisno osjo na intervalu $[-3, -2]$:

$$\int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \Big|_{-3}^{-2} =$$

$$\left(\frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{3}{4}(-2)^2 + (-2)\right) - \left(\frac{1}{8}(-3)^4 - \frac{3}{4}(-3)^2 + (-3)\right)$$

$$= -\frac{27}{8}$$

Izračunani integral ima na intervalu [–3, –2] negativno vrednost, saj na tem intervalu graf funkcije f leži pod abscisno osjo. Ploščina lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na tem delu enaka $S_1 = \frac{27}{8}$.

Na podoben način lahko za vajo izračunamo še preostala dva določena integrala ter rezultate vpišemo v preglednico. V preglednico zapišemo še vrednosti pripadajočih ploščin.

Izpolnjena preglednica:

$\int_{-3}^{-2} f(x)\ dx = -\frac{27}{8}$	$S_1 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$
$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = \frac{27}{8}$	$S_2 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$
$\int_{1}^{3} f(x)\ dx = 6$	$S_3 = 6$
$\int_{-3}^{3} f(x)\ dx = 6$	$S_L = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$

Rezultat preverimo z računalom

Z računalom izračunamo določene integrale, npr.:

Slika 13: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Zaključek

Predstavljena uporaba numeričnega računala je samo ena od možnosti, ki jih lahko uporabimo v razredu za raziskovanje in reševanje problemov ter utrjevanje znanja. Aktivno učenje dijakom pomaga, da so sami vključeni v proces izgradnje matematičnega znanja, da vsebine bolje razumejo in si jih lažje zapomnijo. Glede na zmožnosti in interese dijakov ter glede na zahtevnost posameznega programa preiskovane lastnosti podkrepimo še z dokazi.

Učitelji matematike od dijakov pričakujemo, da vse rešitve nalog utemeljijo računsko in rezultate kritično ocenijo. Ob tem večkrat pozabimo, da je današnja generacija dijakov drugačna, tako rekoč rojena s tehnologijo. Naša naloga je, da se s smiselno rabo tehnologije pri pouku skušamo čim bolj približati njihovemu načinu učenja in razmišljanja v procesu usvajanja novih vsebin, tudi pri utrjevanju, poglabljanju in ocenjevanju znanja.

Vir

Bon Klanjšček, M. idr. (2012). *Matematika 4. Zbirka nalog za gimnazije.* Ljubljana: DZS.

Moessnerjevo sito

dr. Marko Razpet

Aleksandrijski učenjak Eratosten iz Kirene, grško Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος (276–194 pnš.), je bil vodja slovite aleksandrijske knjižnice, narisal je zemljevid takrat znanega sveta, genialno in razmeroma natančno je izračunal velikost Zemlje. Matematiki pa ga poznamo predvsem po postopku, kako iz zaporedja naravnih števil izločiti praštevila. Temu slikovito pravimo *Eratostenovo sito*.

Z naravnimi števili so se ljudje vedno radi ukvarjali, tudi nematematiki. Veliko zanimivih lastnosti naravnih števil so odkrili razvedrilni ali rekreativni matematiki. Eden takih je bil Nemec Alfred Moessner iz Gunzenhausna na Bavarskem, o katerem ne vemo prav veliko, razen da je iznašel postopek, kako iz naravnih števil izluščiti zaporedje k-tih potenc. Postopek imenujemo *Moessnerjevo sito*. Moessner ga je leta 1951 brez dokaza objavil v neki publikaciji Bavarske akademije znanosti. Že istega leta je znani nemški matematik Oscar Perron (1880–1975) objavil dokaz o pravilnosti Moessnerjevega postopka. Preden nadaljujemo, povejmo, da so členi $s_1, s_2, s_3, \ldots$ zaporedja delnih vsot danega številskega zaporedja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definirani takole:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

Da pridemo do zaporedja kvadratov $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, po Moessnerju najprej zapišemo primerno dolgo zaporedje naravnih števil, nato pa v njem prečrtamo vsak drugi člen, začenši z drugim. Za dobljeno okleščeno zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot in že smo pri zaporedju kvadratov.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	8	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17
1		3		5		7		9		11		13		15		17
1		4		9		16		25		36		49		64		81

Do zaporedja kubov $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ pridemo po Moessnerju tako, da najprej zapišemo primerno dolgo zaporedje naravnih števil, nato pa v njem prečrtamo vsak tretji člen, začenši s tretjim. Za dobljeno okleščeno zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot, nato pa v njem prečrtamo vsak drugi člen, začenši z drugim, in za novo zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot. Dobimo zaporedje kubov.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	~~3~~	4	5	6	7	8	9	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17
1	2		4	5		7	8		10	11		13	14		16	17
1	3		7	12		19	27		37	48		61	75		91	108
1	3		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	75		91	~~108~~
1			7			19			37			61			91	
1			8			27			64			125			216	

Prav tako pridemo do bikvadratov (četrtih potenc). Prečrtamo vsak četrti člen v zaporedju naravnih števil. Zapišemo zaporedje delnih vsot dobljenega zaporedja in v njem prečrtamo vsak tretji člen. Zapišemo zaporedje delnih vsot novega zaporedja in v njem prečrtamo vsak drugi člen. Nazadnje zapišemo zaporedje delnih vsot slednjega zaporedja. Dobimo zaporedje bikvadratov.

Sedaj, ko obvladamo postopek, lahko v tabeli nekaj vrstic izpustimo.

1	2	3	~~4~~	5	6	7	8	9	10	11	~~12~~	13	14	15	~~16~~	17
1	3	~~6~~		11	17	~~24~~		33	43	~~54~~		67	81	~~96~~		113
1	4			15	~~32~~			65	~~108~~			175	~~256~~			369
1				16				81				256				625

Algebra bločnih diagramov

Urška Puncer

Povzetek

Modeliranje je postopek, s katerim realni proces pretvorimo na matematični model. Modeliranje se velikokrat uporablja na elektro področju pri vodenju sistemov. Za preučevani proces pretvorimo obstoječe enačbe v bločni diagram, potem pa ga s pravili algebre poenostavimo v čim bolj osnovno obliko. V prispevku je prikazana ura matematike, v kateri dijaki s pomočjo delovnega lista spoznajo osnovne pojme ter pravila algebre, ki veljajo za bločne diagrame. Pravila dokažemo z uporabo računskih zakonov ter ekvivalentnim preoblikovanjem enačb.

Ključne besede: bločni diagram, računski zakoni, ekvivalentno preoblikovanje enačb

Algebra of Block Diagrams

Abstract

Modelling is the process by which a real process is transformed into a mathematical model. Modelling is widely used in the field of electrical engineering in the management of systems. For the studied process, the existing equation is transformed into a block diagram and then simplified with algebraic rules in the most basic form. We can prove the rules using the commutative, associative and distributive laws and turning simple equations.

Key words: block diagram, commutative, associative and distributive laws

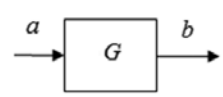
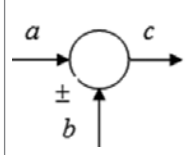
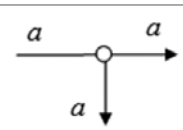
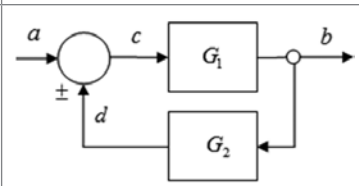
Uvod

Na vseh nivojih srednješolskega izobraževanja se pri matematiki obravnavajo številske množice. Od naravnih števil dalje se pri vsaki množici pojavljajo komutativnostni zakon za seštevanje in množenje, asociativnostni zakon za seštevanje in množenje ter distributivnostni zakon. Dijaki vedno sprašujejo, zakaj je zakone sploh treba obravnavati, saj so na ravni števil tako očitni. V algebri bločnih diagramov sem našla primer, da dijakom pokažem, da so ti zakoni pomembni tudi v praksi.

Ura je prilagojena za konec prvega letnika tehniške šole. Temo obravnavamo v skupinah s tremi ali štirimi dijaki. Po razporejanju sledi kratek uvod o modeliranju.

Modeliranje je postopek, s katerim realni proces pretvorimo na matematični model. Modeliranje se velikokrat uporablja na elektro področju pri vodenju sistemov. Za preučevani proces pretvorimo obstoječe enačbe v bločni diagram, potem pa ga s pravili algebre poenostavimo v čim bolj osnovno obliko. Prednost bločnih diagramov je njihova nazornost in preglednost.

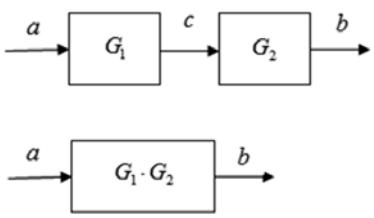
Za obravnavanje teme sem pripravila delovni list (Priloga 1), na katerem so najprej zapisani in prikazani osnovni pojmi (Slika 1) ter enačbe (Slika 2–9), ki jih predstavljajo.

Ime	Simbol	Matematična enačba
Blok (Na levi strani je vhodni signal, na desni pa izhodni signal. Blok na sredini pove zvezo med vhodom in izhodom.)		$b = a \cdot G$
Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)		$c = a \pm b$
Razcepišče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)		
Povratna zanka		

Slika 1: Osnovni pojmi (prirejeno po Zupančič, 2018)

Potem sledi tabela, v kateri so osnovne povezave med bloki in pravila algebre bločnih diagramov. Vsa ta pravila najprej dokažemo z uporabo osnovnih računskih zakonov, ekvivalentnim preoblikovanjem enačb ter osnovnih sistemov enačb. Na koncu se pogovorimo, katera pravila smo uporabili. Nekaj primerov naredimo skupaj. Potem jih spodbudim k samostojnemu delu po skupinah, sama pa hodim med skupinami, jih spodbujam k razmišljanju in odgovarjam na vprašanja.

Za dokazovanje izpišemo enačbe iz zgornjega diagrama in jih preoblikujemo v enačbo, ki ustreza spodnjemu diagramu.

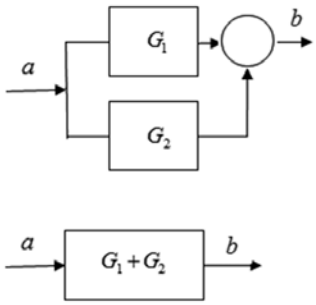
	Ime	Ekvivalentna diagrama	Kaj smo uporabili?
1	Redukcija zaporedne vezave		

Slika 2

Za prvi diagram (Slika 2) velja $b = c \cdot G$ in $c = a \cdot G_1$.

Enačbi združimo in dobimo $b = c \cdot G_2 = (a \cdot G_1) \cdot G_2 = a \cdot (G_1 \cdot G_2)$.

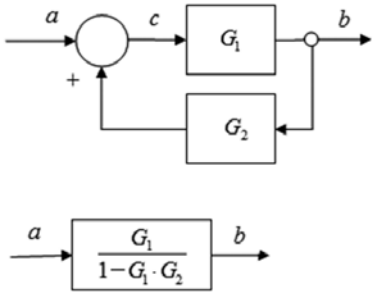
Uporabili smo asociativnostni zakon za množenje.

2	Redukcija vzporedne vezave		

Slika 3

Za prvi diagram (Slika 3) velja $b = a \cdot G_1 + a \cdot G_2$. Izpostavimo a in dobimo $b = a \cdot (G_1 + G_2)$.

Uporabili smo izpostavljanje skupnega faktorja.

3	Redukcija zanke		

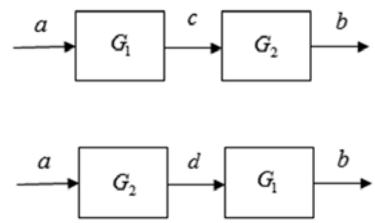
Slika 4

Za prvi diagram (Slika 4) veljata enačbi $b = c \cdot G_1$ in $c = a + b \cdot G_2$. Če enačbi združimo, dobimo $b = c \cdot G_1 = (a + b \cdot G_2) \cdot G_1 = a \cdot G_1 + b \cdot G_2 \cdot G_1$. Iz enačbe izrazimo b in dobimo

$$b - b \cdot G_2 \cdot G_1 = a \cdot G_1$$
$$b \cdot (1 - G_2 \cdot G_1) = a \cdot G_1$$
$$b = \frac{G_1}{1 - G_2 \cdot G_1} \cdot a; \quad G_1 \cdot G_2 \neq 1.$$

Za $G_1 \cdot G_2 = 1$ velja $b \cdot 0 = a \cdot G_1$, torej $a = 0$.

Uporabili smo sistem enačb, distributivnostni zakon, izpostavljanje skupnega faktorja in obravnavanje linearne enačbe s parametri.

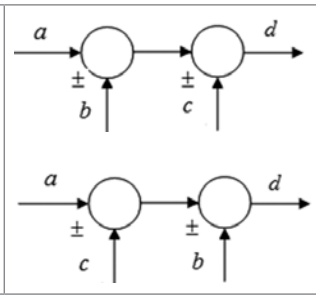
4	Zamenjava vrstnega reda zaporednih blokov		

Slika 5

Iz prve točke sledi, da lahko enačbi prvega diagrama (Slika 5) združimo in zapišemo kot $b = a \cdot G_1 \cdot G_2$.

$b = a \cdot G_1 \cdot G_2 = a \cdot G_2 \cdot G_1 = d \cdot G_1$, kjer je $d = a \cdot G_2$. To pa sta enačbi drugega diagrama.

Uporabili smo komutativnostni zakon za množenje.

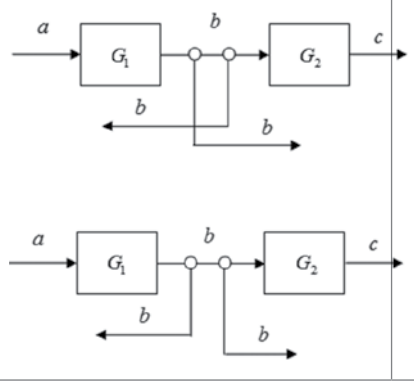
5	Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk		

Slika 6

Prvemu diagramu (Slika 6) pripada enačba $d = (a \pm b) \pm c$. Nato jo preoblikujemo in dobimo
$d = (a \pm b) \pm c = a + (\pm b \pm c) = a + (\pm c \pm b) = (a \pm c) \pm b$, kar je enačba drugega diagrama.

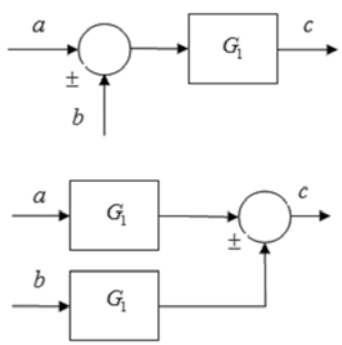
Uporabili smo asociativnostni in komutativnostni zakon za seštevanje.

Pri tej točki dijake opozorim na izpostavljanje znaka za seštevanje pred oklepajem.

6	Zamenjava vrstnega reda zaporednih razcepišč	

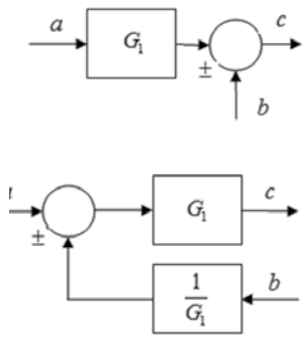
Slika 7

Razcepišče pomeni (Slika 7), da isti signal deluje na različnih mestih, zato lahko razcepišča med sabo menjamo.

7	Premik sumacijske točke za blok	

Slika 8

Zapišemo enačbo (Slika 8), ki pripada prvemu diagramu, uporabimo distributivnostni zakon in dobimo enačbo, ki pripada drugemu diagramu. $c = (a \pm b) \cdot G_1 = a \cdot G_1 \pm b \cdot G_1$.

8	Premik sumacijske točke pred blok	

Slika 9

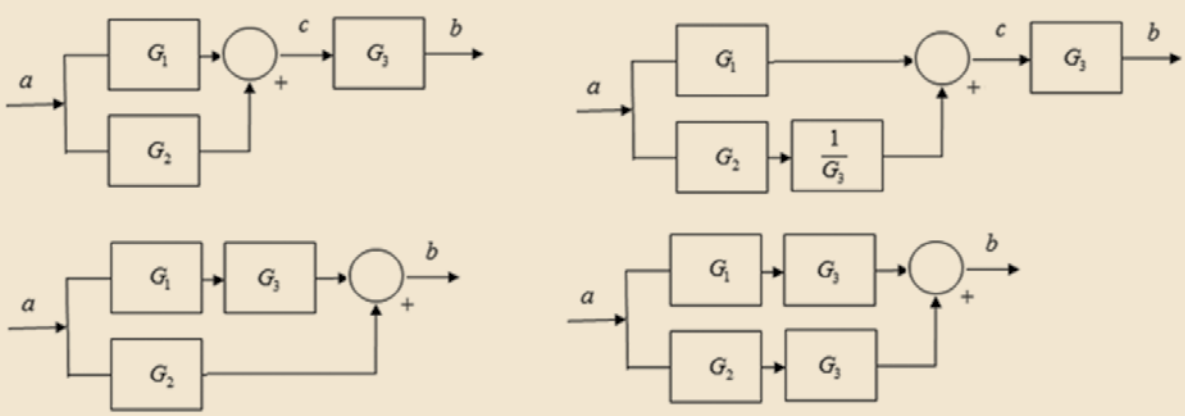
Ob uporabi izpostavljanja skupnega faktorja in obratne vrednosti pokažemo (Slika 9), da velja

$$c = a \cdot G_1 \pm b = a \cdot G_1 \pm b \cdot \frac{1}{G_1} \cdot G_1 = \left(a \pm b \cdot \frac{1}{G_1}\right) \cdot G_1.$$

Po pregledu tabele s pravili sledi naloga, v kateri ta pravila uporabimo.

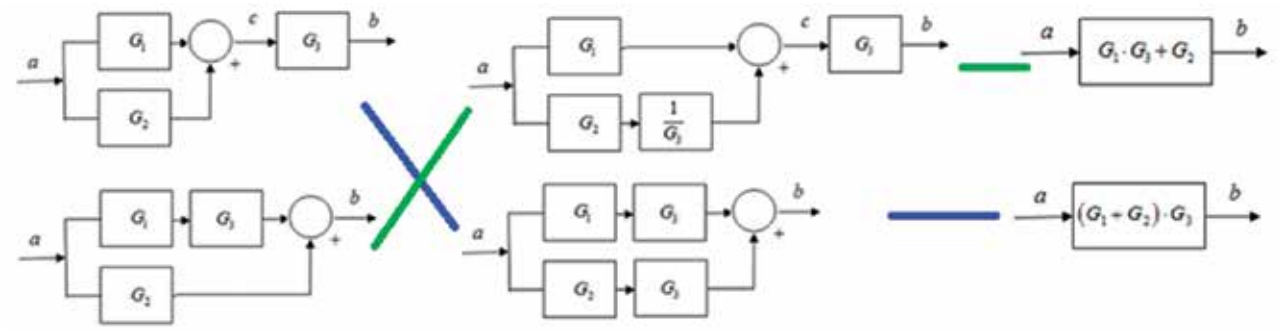
Naloga

Na sliki so štirje diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih poenostavi do osnovne oblike.



Rešitev naloge:

Odziv dijakov na uro je bil pozitiven. Všeč jim je bilo predvsem to, da smo se dotaknili njihovega področja, pri tem pa utrdili matematično predznanje.



Zaključek

Algebro bločnih diagramov uporabljajo na področju elektrotehnike, vendar sem delovni list sestavila povsem splošno, tako da je primeren tudi za druge smeri. V opisani uri se dijaki urijo v dokazovanju, preoblikovanju enačb, uporabljajo številske zakone ter diagrame povezujejo z enačbami in obratno. Pri temi spoznajo uporabnost računskih zakonov, ki so jim na ravni števil tako samoumevni. Tema je zelo primerna za skupinsko delo, saj je snov za vse popolnoma nova in med dijaki ni večjih razlik v predznanju.

Viri

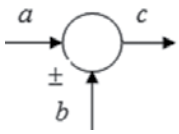
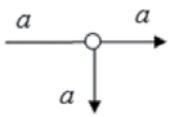
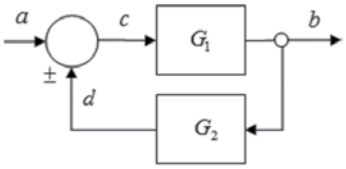
Puncer, U. (2018). Bločna algebra. Zbornik razširjenih povzetkov KUPM 2018. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Str. 86, 87.

http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/AVS/AVS.pdf (21. 3. 2018).

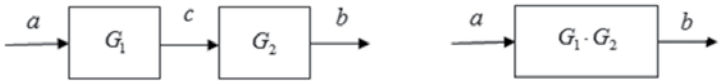
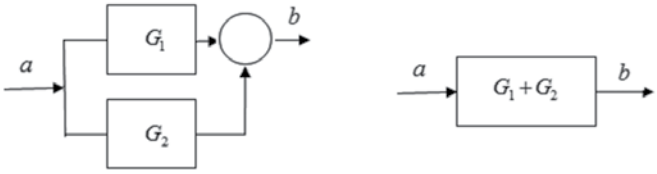
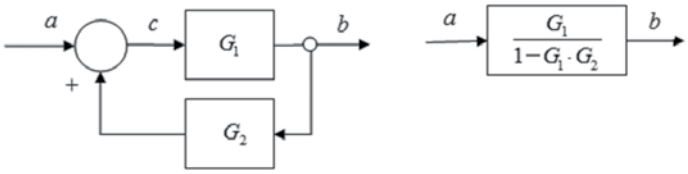
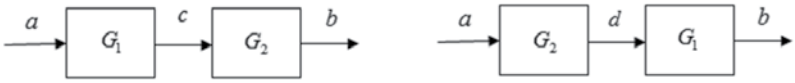
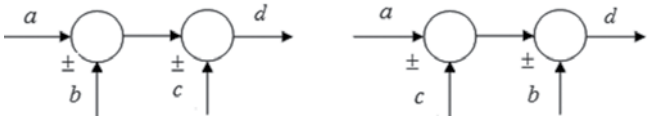
https://www.slideshare.net/tendeo/control-chap3 (21. 3. 2018).

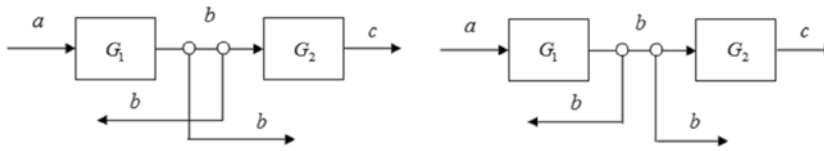
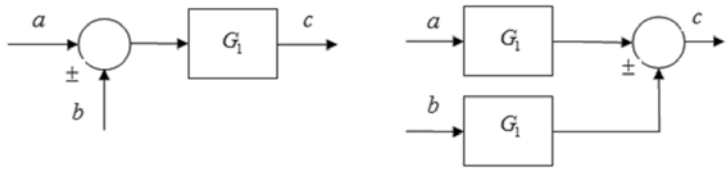
https://www.tutorialspoint.com/control_systems/control_systems_block_diagram_algebra.htm (21. 3. 2018).

Osnovni pojmi:

Ime	Simbol	Matematična enačba
Blok (Na levi strani je vhodni signal, na desni pa izhodni signal. Blok na sredini pove zvezo med vhodom in izhodom.)		$b = a \cdot G$
Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)		$c = a \pm b$
Razcepišče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)		
Povratna zanka		

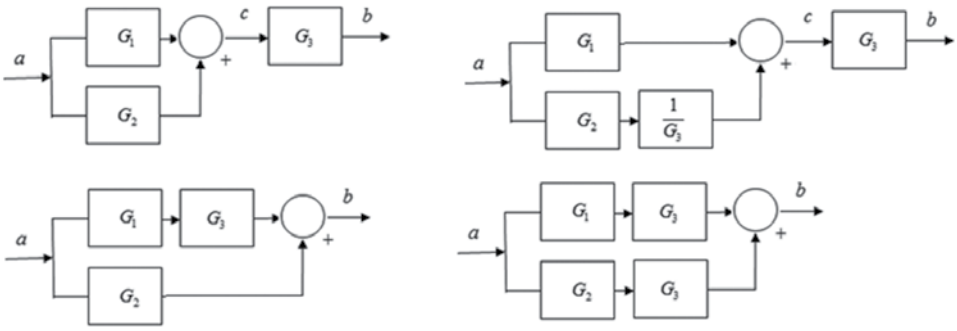
Osnovna pravila algebre:

	Ime	Ekvivalentna diagrama in dokaz ekvivalence	Kaj smo uporabili?
1	Redukcija zaporedne vezave		
2	Redukcija vzporedne vezave		
3	Redukcija zanke		
4	Zamenjava vrstnega reda zaporednih blokov		
5	Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk		

6	Zamenjava vrstnega reda zaporednih razcepišč		
7	Premik sumacijske točke za blok		
8	Premik sumacijske točke pred blok		

Naloga:

Na sliki so štirje diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih poenostavi do osnovne oblike.



Računamo gostoto človeka

Magda Pipenbaher
Osnovna šola Franca Lešnika-Vuka Slivnica pri Mariboru

Povzetek

Kako nadgraditi pouk nadarjenim učencem in v njih spodbuditi razmišljanje ter zanimanje za iskanje potrebnih ter zadostnih podatkov, vključiti medpredmetno povezavo, z uporabo že pridobljenega znanja iz različnih področij pridobiti s preiskovanjem nove rezultate, nova spoznanja? Nadarjeni učenci 9. razredov so samostojno raziskali ter izračunali približek gostote človeškega telesa. Nadarjenim učencem 7. razredov pa je to uspelo z navodili in s smernicami.

V skupinah so učenci, ki imajo dobro razvito miselno-spoznavalno področje, učno-storilnostno področje, dobro motivacijo in so močni na socialno-čustvenem področju.

Ključne besede: medpredmetna povezava, valj in krogla, gostota človeškega telesa

Accounting the humanity

Abstract

How can we make classes more interesting for talented students to stimulate their thinking and interest that would incite them to look for the necessary and sufficient information, include cross-curricular connections and use the knowledge they have already gained in different other areas in researching and acquiring new results and new findings? The gifted ninth graders independently studied and calculated the average density of the human body, while the gifted seventh graders accomplished the same with instructions and guidance.

The groups included students with well-developed mental cognitive processes, learning-performance processes, good motivation and social-emotional learning.

Keywords: cross-curricular connection, cylinder and sphere, density of the human body

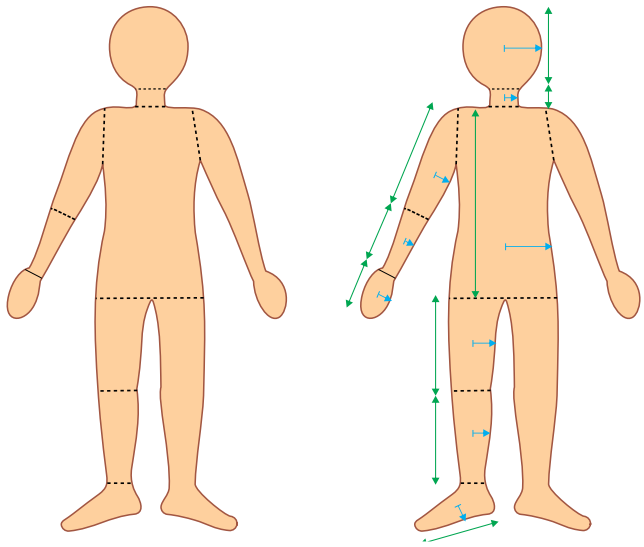
Raziskovanje učencev 9. razreda

Opazovanje

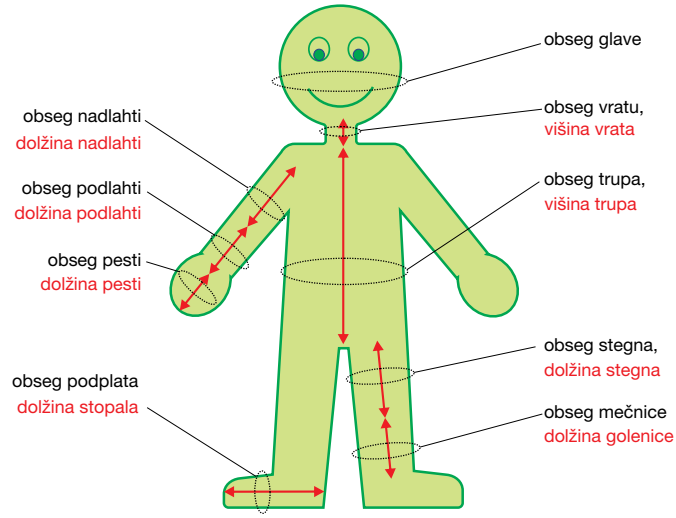
Z opazovanjem svojega telesa so učenci 9. razredov sklepali, da so posamezni deli naših teles podobni valju in glava krogli. Da lahko izračunajo gostoto telesa, morajo izračunati prostornino telesa in telesu stehtati maso. Shemo človeškega telesa (Augarde, 2009) je bilo treba razdeliti na geometrijska telesa, katerih prostornino znajo izračunati, zato so shemo razdelili na kroglo in valj. Svoje ugotovitve so zapisali v obliki, kot je prikazano v preglednici 1.

Preglednica 1: Preglednica delov telesa in njihovo števila.

Oštevilčeni del telesa	Del telesa	Število delov telesa
1.	glava	1
2.	vrat	1
3.	trup	1
4.	nadlahet	2
5.	podlahet	2
6.	dlan	2
7.	pest	2
8.	stegno	2
9.	meča	2
10.	stopalo	2



Slika 1: Človeško telo.



Slika 2: Shema – delitev človeškega telesa.

Meritve

Na osnovi sheme – delitev človeškega telesa, so učenci izpolnili preglednico 2 z meritvami in izračunom prostornine posameznega dela telesa. Merili so s šiviljskim metrom.

Izračun

Potrebna je bila še masa učenca, na katerem so opravili meritve. Masa učenca je 42,2 kg in prostornina 43 dm³. Sledil je izračun gostote telesa 0,98 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, ki je presenetljivo dober približek gostote človeškega telesa.

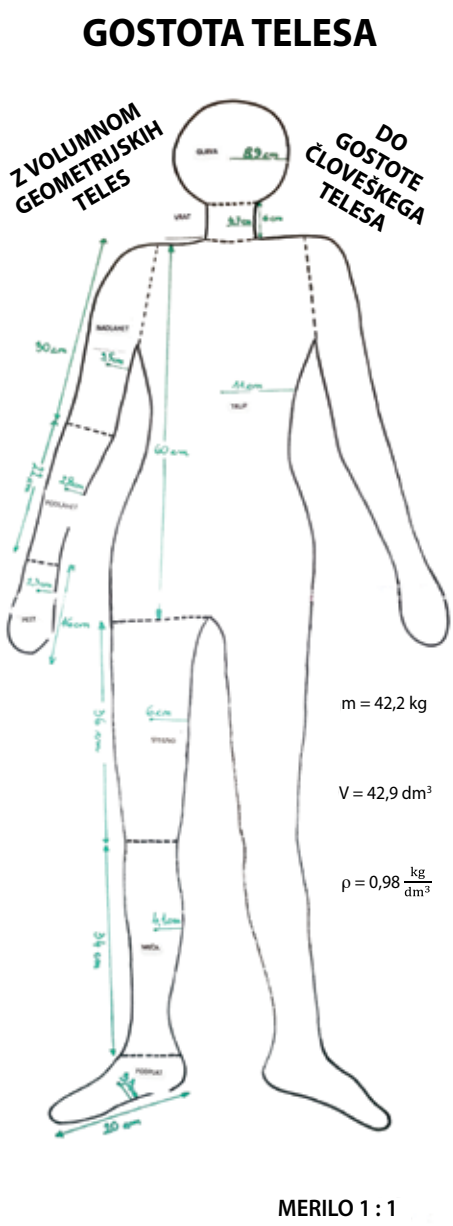
Raziskovanje učencev 7. razreda

Nadarjeni učenci 7. razredov so z ustreznimi pisnimi navodili in s preprosto uvodno razlago v literaturi (Vorderman, 2014) poiskali potreben obrazec za prostornino valja ($V = \pi r^2 v$), prostornino krogle ($V = \frac{4\pi r^3}{3}$), obseg kroga ($o = 2\pi r$), konstanto ($\pi = 3{,}14$), obrazec za izračun gostote ($\varsigma = \frac{m}{V}$ ($\frac{kg}{dm^3}$)). V pomoč so dobili sliki številka 1 in 2 ter prazni preglednici 1 in 2. Računali so s kalkulatorjem in zaokrožili rezultat na dve decimalni mesti. Tudi sedmošolci so prišli do dobrega približka gostote človeškega telesa, to je 1,05 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ (Johnson, 1996).

Učenci so izdelali plakat v merilu 1 : 1. Na papir so obrisali telo učenca, pri katerem so potekale vse meritve obsegov delov telesa. Na osnovi meritev so naredili zloženke z imenom dela telesa, meritvami in izračunanimi prostorninami, ki so jih prilepili na plakat na ustrezen del telesa.

Preglednica 2: Meritve in izračuni prostornine posameznega dela telesa.

Oštevilčeni del telesa	Del telesa	Število delov telesa	Obseg (*o*) [cm]	Višina (*v*) [cm]	Polmer ($r = \frac{o}{2\pi}$) [cm]	Prostornina [cm³]
1.	glava	1	56,0	6	8,9	2951,5
2.	vrat	1	29,5	/	4,7	416,2
3.	trup	1	69,0	60	11,0	22796,4
4.	nadlahet	2	2,0	30	3,5	2308
5.	podlahet	2	17,5	22	2,8	1083,2
7.	pest	2	14,5	16	2,3	332,2
8.	stegno	2	38,0	36	6,0	8138,8
9.	golenica	2	26,0	34	4,1	3589,2
10.	stopalo	2	21,0	20	3,3	1367,8
	SKUPAJ	/	/	/	/	42983,3



Slika 3: Gostota telesa.

Skupni pogovor z učenci 7. in 9. razreda

Sledil je pogovor z obema skupinama učencev. Zastavila sem jim vprašanje, ali bi lahko gostoto človeškega telesa izračunali še na kateri drug način. Med nadarjenimi učenci se je vnela debata in s skupnimi idejami so devetošolci ugotovili, da obstaja še druga možnost, ki bi zahtevala bistveno manj računanja. Stehtati bi morali učenca in mu izmeriti prostornino tako, da bi se potopil v posodo, napolnjeno z vodo, v kateri je prostornina vode znana. Dvig vode v posodi bi predstavljal prostornino učenca. Imeli bi dva podatka, potrebna za izračun gostote človeškega telesa. Tega v učilnici, žal, ni bilo mogoče izvesti.

Zaključek

Z dvema skupinama učencev z različnim predznanjem smo preiskavo uspešno izvedli in realizirali zastavljene cilje. Devetošolci so samostojno poiskali ustrezne podatke, formule, narisali sheme, tabele, izmerili in izračunali gostoto, medtem ko so učenci sedmih razredov potrebovali pri celotnem procesu pridobivanja podatkov vse do realizacije zastavljenega cilja nekoliko več razlage, smernic in napotkov.

Viri in literatura

Augarde, Steve. (2009). *Leonardo da Vinci.* Murska Sobota: Pomurska založba.

Johnson, Keith. (1996). *Fizika: razlage fizikalnih pojavov*. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

Stockley, Corinne. (2015). *Slikovni priročnik*. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

Vorderman, Carol idr. (2014). *Matematika: po korakih do odličnega znanja*. Ljubljana: Mladinska knjiga.

Spomini na akademika prof. dr. Ivana Vidava (1918–2015)

mag. Milena Strnad

Povzetek

Članek na željo urednice prinaša nekaj spominov avtorice na našega akademika prof. dr. Ivana Vidava, velikega matematika in velikega človeka. Za vse tiste, ki ne poznajo dobro njegove življenjske poti, najprej navede le najpomembnejše prelomnice v profesorjevem življenju. S tem pokaže, da je bil prof. Vidav od mladih nog do konca življenja predan matematiki. Članek vseskozi poudarja nenavadno profesorjevo skromnost. Posebej ga predstavi tudi kot izrednega predavatelja.

Memories on academician prof. dr. Ivan Vidav (1918–2015)

Abstract

The present paper on request of the editor brings the autor's memories on Slovenian academician and great mathematician prof. dr. Ivan Vidav. For all those who do not know well his life, the paper begins with fundamental facts on professor's life which also shows that he was dedicated to mathematics even as a youngster. Emphasize is on his unusual modesty and especially on his ability of being extraordinary lecturer.

Oris profesorjevega življenja

Ivan Vidav je bil rojen leta 1918 na Občinah nad Trstom v Italiji zavednim slovenskim staršem kot najmlajši od petih otrok. Družina se je, ko je imel Ivan dve leti, preselila v vas Krčevina v bližini Maribora. Po uspešno končani osnovni šoli je nadaljeval študij v štajerski prestolnici, kjer se je ves čas bivanja preživljal z inštrukcijami, da je razbremenil starše in jim tudi finančno pomagal. Leta 1937 je z odliko maturiral in takoj nadaljeval študij matematike in fizike na takratni Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani.

Študijski program te smeri, ki je takrat obsegal predmetna področja *teoretično matematiko*, *uporabno matematiko* in *uporabno fiziko*, je poslušal pri priznanih profesorjih. Matematiko pri *akademiku dr. Josipu Plemlju* (1873–1967), soustanovitelju Univerze v Ljubljani in njenem prvem rektorju, ter pri priznanem matematiku *dr. Rihardu Zupančiču* (1878–1949), fiziko pa pri izumitelju na področju elektrotehnike in letalstva *prof. Juliju Nardinu* (1877–1959) in *akademiku prof. dr. Antonu Peterlinu* (1908–1993), ki je v Ljubljani leta 1947 ustanovil Institut Jožef Stefan.

Reven študent Ivan je že v prvem letniku študija opozoril nase s svojim izjemnim matematičnim talentom in znanjem, zato ni naključje, da ga je profesor Plemelj vzel k sebi v svoj kabinet za pomožnega asistenta. Dal mu je nalogo, da naj skrbi za izposojo knjig in naj postavi na noge nastajajočo matematično knjižnico. Profesor Plemelj mu je s tem omogočil dostop do matematične literature in tudi do pogostih pogovorov z njim o problemih z različnih matematičnih področij izven študijskega programa.

Naneslo je, da je nekako ob koncu Vidavovega tretjega letnika profesor Plemelj v enem od njunih pogovorov omenil nerešen *Kleinov problem* o petih singularnih točkah s področja analitičnih funkcij. Lahko si predstavljamo, kako je bil profesor Plemelj presenečen, ko mu je študent Vidav po vrnitvi s počitnic v pogovoru omenil, *da je rešil tisto uganko* [2]. S tem si je Vidav v Plemljevih očeh pridobil velikanski ugled in spoštovanje ter si nehote pridobil temo za doktorsko disertacijo, še preden je diplomiral.

Tako je, pa ne samo zaradi vojnih razmer, Ivan Vidav še pred zaključkom četrtega letnika, v aprilu leta 1941, z odliko na vseh predmetnih področjih diplomiral na Univerzi v Ljubljani, takoj zatem, v maju leta 1941, pa tudi promoviral za doktorja filozofije z disertacijo *Kleinovi problemi v teoriji linearnih diferencialnih enačb*.

Plemljeva zasluga pri takojšnji prepoznavnosti dr. Vidava tudi navzven je bila, da je poskrbel, da je Vidavova disertacija izšla tudi kot poseben zvezek pri Slovenski akademiji znanosti in umetnosti. To, da je življenje naključno povezalo ne samo dva velika slovenska matematika, ampak tudi velika človeka, pove dejstvo, da si profesor Plemelj ni nikoli lastil nobenih zaslug pri Vidavovi rešitvi Kleinovega problema.

Mladi doktor znanosti Ivan Vidav je zatem opravil postdoktorski študij še na Univerzi v Rimu, kjer je študiral od novembra leta 1941 do junija leta 1942. Kmalu zatem je bil deportiran v Gonars, skupaj z drugimi študenti, s katerimi je bil nastanjen v ljubljanskem Oražnovem domu. To je bila zanj bridka življenjska izkušnja, čeprav je bil iz ujetništva že po dobrem mesecu rešen s

posredovanjem Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Ko se je pozneje ukvarjal s teorijo aproksimacij, se je v letih 1952 in 1954 tudi nekajkrat izpopolnjeval pri *prof. Szolemu Mandelbrojtu* v Parizu.

Dve leti po diplomi in doktoratu je leta 1943 na domači ustanovi napredoval iz pomožnega Plemljevega asistenta v honorarnega, vsaka nadaljnja tri leta pa je stopil še za stopničko višje: postal je docent in nato izredni profesor, leta 1954 je bil izvoljen za rednega profesorja za matematiko na Filozofski fakulteti[1] Univerze v Ljubljani, kjer je vse do svoje upokojitve leta 1986 na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo predaval različne predmete na vseh stopnjah študija. Po upokojitvi je še polno desetletje svoje znanje razdajal svojim doktorandom in študentom na podiplomskem študiju različnih smeri in vodil razne postdoktorske seminarje.

Leto po njegovi upokojitvi je Univerza v Ljubljani profesorja Vidava, ki je bil že vse od leta 1958 izredni, od leta 1962 pa tudi redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, počastila še s svojim najvišjim priznanjem, z izvolitvijo v *zaslužnega profesorja*, trideset let zatem pa mu je podelila še *častni doktorat*.

Profesor Vidav se ni prevzel niti ob prejemu številnih znanstvenih in državnih priznanj, ki so spremljala njegovo bogato strokovno kariero in so izhajala iz njegovega širokega, globokega znanja ter izjemne intuicije njegovega raziskovanja na številnih strokovnih področjih, od *diferencialnih enačb*, *funkcionalne analize* in njene uporabe v *transportni teoriji nevtronov* ter *algebre*, niti ob pridobljenem mednarodnem ugledu[2].

Profesor Ivan Vidav je umrl v Ljubljani 6. septembra 2015.

Profesor Vidav – oče slovenskih matematikov

Profesorja Ivana Vidava upravičeno imenujemo 'oče' slovenskih matematikov, raziskovalcev in učiteljev, tako kot imenujemo prof. Josipa Plemlja 'oče' ljubljanske univerze.

Profesor Vidav je kot izjemen matematik in raziskovalec na univerzi ne le nadaljeval pot profesorja Plemlja, ampak jo je kot izvrsten poznavalec tudi novih matematičnih smeri še obogatil. S svojim širokim znanjem je postavil ambiciozen program študija matematike in ga z izjemno dovršenimi predavanji, ki jih je podprl s svojimi univerzitetnimi učbeniki in z odgovornim in vestnim delom, postavil na visoko raven.

Kot predavatelj več matematičnih predmetov je izobrazil številne generacije slovenskih matematikov, ki so postali odlični raziskovalci ali pa srednješolski profesorji. Po Plemljevem zgledu je med njimi prepoznaval najboljše. Te je jemal pod svoje okrilje, da so pri njem doktorirali in se navzeli njegovega odnosa do matematike. Nekateri so pozneje postali njegovi sodelavci, ki so tako kot profesor Vidav hkrati poučevali in raziskovali, drugi pa so nadaljevali svoje uspešne kariere na različnih področjih drugod.

Med številnimi funkcijami, ki jih je profesor Vidav opravljal, omenimo le, da je bil več let tudi predstojnik matematičnega oddelka. Skoraj pet desetletij je na ljubljanski univerzi bdel nad študijskimi programi matematike, ki so se z leti spreminjali, delili in dograjevali. Tako se je v študijskem letu 1985/86 iztekajočemu prvotnemu programu *Matematika s fiziko pedagoške smeri* pridružil nov program *Matematika* v treh različnih smereh, *uporabna*, *pedagoška* in *teoretična*, leto zatem pa še program *Računalništvo z matematiko pedagoške smeri*.

Vse te zunanje spremembe, ki so doletele profesorjevo ustanovo, pa niso spremenile Vidavovega pogleda na matematiko. S svojo izjemno osebnostjo je dosegel to, da se 'duh njegove šole' ohranja v vseh danes obstoječih smereh študija matematike tudi po njegovem odhodu.

Obseg profesorjevega delovanja

Profesor Vidav je pustil globoke sledi v razvoju slovenske matematike v 20. stoletju. Napisal je prve visokošolske učbenike matematike in ustanovil ter skrbel za matematične knjižne zbirke. Že v zgodnjih šestdesetih letih je napisal odlične knjižice *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, *Algebra* ter *Števila in matematične teorije*[3], ki jih je namenil popularizaciji matematike. Vseskozi je objavljal tudi članke v društveni reviji *Obzornik za matematiko in fiziko*, v reviji za mladino *Presek* in v tujih revijah.

Neizbrisen pečat je profesor Vidav pustil tudi v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, pri katerem je bolj ali manj aktivno sodeloval vse od njegove ustanovitve leta 1949 do svoje visoke starosti. Deloval je v različnih vodstvenih funkcijah, med drugim je bil tudi predsednik društva. Dolga leta je urejal Obzornik za matematiko in fiziko in bdel nad matematičnimi tekmovanji. Leta 1988 je postal častni član društva.

S svojimi dovršenimi predavanji, ki jih je znal prilagoditi dometu znanja poslušalcev, je dodal društvu še posebno težo, vsem učiteljem, ki so ga prihajali množično poslušat iz vse Slovenije,[4] pa je z njimi posredno 'vlival' dodatno energijo za njihovo poučevanje in jih posredno animiral, da so številni med njimi veliko postorili za popularizacijo matematike med učečo se mladino, ki je dosegala in še dosega izjemne uspehe na različnih matematičnih tekmovanjih doma in v tujini.

Dodam naj še to, da je profesor Vidav z veseljem predaval srednješolskim profesorjem tudi potem, ko je skrb za izpopolnjevanje učiteljev fizike in matematike s sekretarjev za pedagoško dejavnost pri DMFA Slovenije prešla pod okrilje ustreznih oddelkov Fakultete za matematiko in fiziko.

Profesor Vidav je zaslužen tudi za odstranitev preprek naše ljubljanske alme mater, ki je vse do leta 1985/86 srednješolskim profesorjem na FMF preprečevala dostop do kvalitetnega podiplomskega študija, usmerjenega le v matematiko. S tem je naredil

1 Poudariti velja, da je v tem času Filozofska fakulteta Univerze v Ljubljani organizacijsko preživela več transformacij. Tako je bil leta 1960 študij matematike in fizike preimenovan v Fakulteto za naravoslovje in tehnologijo (FNT), leta 1995 pa v današnjo Fakulteto za matematiko in fiziko (FMF).

2 Podrobnejši vpogled v življenje in delo profesorja Vidava prinašajo jubilejni zbornik [3] in več člankov v Obzorniku, npr. [1, 2], ter knjiga [4].

3 Nekaj del profesorja Vidava je izšlo pri SAZU, knjige iz zbirke SIGMA pa sprva pri Mladinski knjigi, dokler niso prešle pod okrilje nekdanjega društvenega založništva, ki se danes imenuje DMFA – založništvo, kjer je tudi sicer izdal največ del.

4 Na njegovo predavanje leta 1990 je prišlo 120 učiteljev.

velik korak naprej v smislu zmanjševanja razkoraka med uporabnimi in teoretičnimi ter pedagoškimi matematiki.

S tem ko je v prvi skupini[5] te smeri profesor sam prevzel kar dva od petih predmetov, *Analitično geometrijo v prostoru* in *Teorijo mere*, ter sodeloval v komisiji pri nekaterih magistrskih izpitih in zagovorih magistrskih nalog, se je prepričal, da je tudi ta program mogoče izvesti na primerno visoki ravni. Pozneje je po en predmet profesor Vidav predaval še trem skupinam magistrskih študentov, a ne v zaporednih letih.

Jasno je, da je (in bo) na magistrskem študiju pedagoške smeri (tako kot pri vseh drugih smereh na FMF) tudi osip,[6] zagotovo pa so vsi, ki so absolvirali vsaj prvi ali pa celo oba letnika in niso prišli čisto do cilja, v tem času pridobili veliko znanja in postali še boljši srednješolski profesorji.

Profesorjevo neizgovorjeno sporočilo učiteljem

Na magistrskem študiju matematike pedagoške smeri[7], ki ni vključeval nobenega predmeta iz didaktike, metodike ali psihologije, ampak samo poglobitev in razširitev matematičnega znanja, nam je profesor Vidav s svojimi popolnimi predavanji ne le razumljivo podajal obravnavano matematično snov, ampak nam je s svojim zgledom kvalitetnega poučevanja vsako uro posebej pokazal izvedbo vseh, za dobro poučevanje potrebnih veščin iz prej omenjenih predmetov. Ob tem je nam učiteljem hkrati postavljal tudi ogledalo za presojo našega poučevanja. Nehote nas je s svojo pojavnostjo opozarjal tudi na pogosto pozabljeno dejstvo, da igra pomembno vlogo pri učiteljevi uspešnosti poučevanja tudi njegova osebnost, iz katere izhaja odnos do predmeta in do slušateljev. Prav vsem, tudi tistim, ki niso na koncu magistrirali, a so ga poslušali, je tudi zato dal veliko.

Vsem bralcem, ki niste imeli sreče, da bi bili študentje profesorja Vidava, naj naslednji kratek opis njegovih predavanj ponudi vsaj delček vpogleda v profesorjev poučevalski dar.

Profesor Vidav je našo predavalnico na podiplomskem študiju vsakič spremenil v resnični 'hram, svetišče učenosti', v katerem smo se dobro počutili. To je dosegel s prepletom razumljivo podane snovi, z berljivim in do potankosti prostorsko premišljenim zapisom povedanega na tabli, ki ga je vedno tekoče izvedel brez kakršnihkoli napak v natančno predpisanem času. Tega ni presegel nikoli, niti takrat, ko se je v njegovo realizacijo prikradla zunanja motnja. Ta se je zgodila, ko je prihajajočega profesorja na hodniku pred predavalnico ustavil in zapletel v očitno pomemben pogovor tudi naš nepozabni profesor, izjemen retorik *prof. dr. Niko Prijatelj*, ki je šele tik po končanem odmoru zapustil našo predavalnico. Z malo navihanim pričakovanjem, kako se bo iztekla naslednja ura, smo v tišini čakali profesorja Vidava. V predavalnico je s skoraj 15-minutno zamudo stopil brez naglice in takoj začel umirjeno predavati na svoj ustaljeni način, s kratko ponovitvijo bistvene vsebine iz prejšnjega predavanja, na katero se je navezovala najavljena vsebina novega. Potem so sledili izreki, leme in dokazi. Predavanje je profesor (tako kot vsa druga prej in pozneje) zaključil točno, in to vsebinsko zaokroženo, ne da bi hitel ali se vedel kakorkoli drugače. Bili smo očarani, tako kot smo bili tudi vedno znova in znova, ko smo med predavanji sledili pravi profesorjevi umetnosti brisanja table, s katerim si je pridobil prazen prostor za nadaljevanje zapisa. To je počel tako premišljeno, da so na tabli ostajale zapisane vse potrebne trditve, na katere se je v razvoju predavanja skliceval, na koncu predavanja pa je na tabli ostalo zapisano bistvo obravnavane snovi. In to je počel brez kakršnekoli predloge ali zapisa na listku. Skratka, vsaka ura njegovih predavanj je vključevala tudi vrhunsko izvedbo vseh teoretično predpisanih in zvezno izvedenih didaktičnih korakov.

Na izpitih je bil strog, a spoštljiv sogovorec in ne izpraševalec, ki ti nažene strah v kosti. Prav začutil si, kako se veseli, če je šel odgovor v pravo smer, in kar slutil si, da bi trpel, če ne bi bilo tako. Skratka, jasno je pokazal, da pri študentu išče znanje in ne neznanja.

Utrinki z mojih strokovnih srečanj s profesorjem

Dokler sem profesorja Vidava poznala le skozi njegova dela in prihajala z njim v stik le kot poslušalka njegovih predavanj ali njegova študentka, sem v njem videla predvsem vrhunskega matematika in izjemnega predavatelja, ki na katedru ni nikoli nastopal kot igralec, ampak je preprosto 'izginil' in postal kar 'Matematika sama'. Misli so vrele iz njega in se z njegovo roko pregledno zapisovale na tablo. Vse je bilo popolno, a brez vsakršnega pridiha predavateljeve želje, da bi on stopil v ospredje, ampak je to mesto prepustil vsebini predavanja.

Pozneje sem se s profesorjem srečevala na Fakulteti za matematiko in fiziko kot sekretarka za pedagoško dejavnost DMFA Slovenije in več let tudi kot organizatorka permanentnega izobraževanja matematike na FMF. Do njega sem prihajala s prošnjami za njegova predavanja, ki naj bi jih imel za srednješolske učitelje. V najinih kratkih in jedrnatih pogovorih se mi je profesor Vidav razkril kot izjemno vljuden, prijazen gospod, z uglajenim nastopom, v katerem ni bilo niti najmanjše sledi vzvišenosti. Vedno me je zbrano poslušal in mi ni nikoli segel v besedo.

Najino sodelovanje se je pričelo tako, da je profesor mojo prvo prošnjo odklonil, a ne v smislu zavrnitve kar tako, ampak zaradi svoje zaskrbljenosti, češ da sam ni zmožen izbrati prave teme, ki bi utegnila zanimati poslušalce in bi bila hkrati zanje tudi razumljiva. To je utemeljil s svojim dolgoletnim odmikom od srednje šole, iz katere je, kot je poudaril, »že davno vse pozabil«, in me blagohotno usmeril z mojo prošnjo k svojim mlajšim kolegom. Sklonila sem glavo, ob slovesu pa sem mu samo mimogrede omenila, da bi srednješolske profesorje gotovo zanimalo kaj s področja stožnic, ker mi v tistem trenutku ni nič drugega padlo

5 Prvi skupini je v 32 letih, od leta 1985 do uveljavitve bolonjske reforme leta 2008, sledilo še 23 razpisov, ne vedno v zaporednih letih. Do zdaj se je na vse razpise skupaj prijavilo 120 slušateljev, ki so bili razporejeni v 19 skupin, od katerih nobena ni številčno presegla prve, ki je štela 17 slušateljev.

6 V prvo skupino se nas je vpisalo 17, v drugem letniku nas je bilo 14, magistriralo nas je šest. V 32 letih obstoja te smeri jih je od 120 vpisanih magistriralo 55.

7 Sprva se je ta smer študija imenovala Tretja stopnja.

na pamet. Prijetno presenečena sem že kak dan zatem od profesorja dobila naslov predavanja *Racionalne in celoštevilske točke na stožnicah.*

To mi je potrdilo, da je bila profesorjevo stiska glede izbire snovi resnična, zato sem v bodoče vsako leto prišla k njemu vedno že s seznamom možnih tem. Tega sem sestavila skupaj z učitelji, ko so prihajali množično iz vse Slovenije na vsa društvena predavanja in pozneje na matematične seminarje permanentnega izobraževanja.

Le konec leta 1991 profesor med predlaganimi temami za naslednje leto ni našel sebi primerne. To mi je sporočil pisno in svojo odločitev utemeljil s tem, da so po njegovi presoji vse teme metodičnega značaja, in zaključil: »V tem oziru pa nimam nobenih praktičnih izkušenj.«

Iz zapisanega se lahko razbere, da je profesor vsako delo, ki ga je sprejel, opravil z velikim občutkom odgovornosti. To pa je glede na njegove izjemne sposobnosti pomenilo, da je bilo predavanje vedno popolno.

Profesor je imel v obdobju najinega sodelovanja za srednješolske profesorje naslednja predavanja:

1987: *Racionalne in celoštevilske točke na stožnicah*, ki ga je ponovil tudi na Tehnični univerzi v Mariboru;

- 1989: *Kvadratne enačbe*;
- 1990: *Kompleksna števila v algebri, analizi in geometriji;*
- 1991: *Zveznosti in diferenciabilnosti;*
- 1993: *Diofantske enačbe v srednji šoli.*

To zadnje predavanje se mi je najbolj zasidralo v spomin. Ko sem se mu po predavanju zahvalila, me je takrat petinsedemdesetletni profesor presenetil z vprašanjem: »Ali vas, gospa profesor, tokrat jaz lahko nekaj prosim?« Po moji pritrditvi je nadaljeval: »Lepo prosim, da me več ne prosite za novo predavanje. Težko vam bi ga odrekel, a mislim, da je čas, da se umaknem. Ni več spodobno, sem prestar.«

Iz globokega spoštovanja do profesorja in hvaležnosti za vse, kar je že naredil tudi za srednješolske profesorje, ga nisem začela prepričevati, ampak sem njegovi prošnji ustregla.

Utrinki z zasebnih srečanj s profesorjem

Da zdaj profesor Vidav živi v mojem spominu predvsem kot izjemno skromen, a velik človek, se da razbrati že iz vsega doslej povedanega. To njegovo lastnost, ki sem jo do takrat doživljala bolj kot zadržanost, sem prepoznala šele pozneje, po številnih osebnih prijateljskih stikih, ki jih je po naključju počasi spletlo življenje, med profesorjem, mojim možem Janezom in menoj.

Zgodilo se je, da sva bila konec januarja leta 1989 z možem zelo na hitro in nepričakovano poklicana v tujino na zahteven možev zdravstveni poseg. Takoj sva odletela, a nekateri problemi, ki so ostali doma, so zahtevali rešitev. Med njimi sta bila vsebinsko in časovno neopredeljeno predavanje profesorja Vidava za srednješolske učitelje in zapolnitev vrzeli pri trinajstem društvenem seminarju iz fizike, ki ga je za 10. in 11. februar organiziralo DMFA Slovenije ob sodelovanju Oddelka za fiziko FNT, Instituta Jožef

Slika 1: Najprej samo kolega, potem tudi prijatelja (Foto: Peter Legiša, 1998)

Stefan, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ter Zavoda za šolstvo SRS. Vrzel bi nastala zaradi moževe odsotnosti.

Profesorju Vidavu sem se zato pisno opravičila in mu ob tem samo omenila problem, ki je nastal zaradi moževe odsotnosti.

Profesor Vidav ni samo z uvidevnostjo sprejel mojega opravičila, ampak je poskrbel, da sta bila zapleta razrešena. Uredil je vse potrebno glede izvedbe svojega predavanja z naslovom *Kvadratne enačbe*, hkrati pa tudi poskrbel, da je namesto moža na hitro vskočil drug fizik, mene pa razbremenil kontaktiranja z organizatorji seminarja, kar ni bilo tako preprosto, kot je zdaj v digitalnem času.

S tem aktivnim in človeško toplim odzivom, ki je presegel normalen kolegialni odziv, je profesor Vidav naredil prvi korak v smeri prijateljskega zbližanja z mojim možem, katerega plodno delo je pozorno spremljal. Pozneje je to vez še poglabljal s svojimi občasnimi telefonskimi klici, s katerimi je od daleč spremljal moževo okrevanje, in vse to nadgradil s pošiljanjem prisrčnih voščil z dobrimi željami, ki nama jih je od takrat dalje pošiljal ob vsakem pomembnem prazniku do konca svojega življenja.

Po letu 1994 se je to naše dopisovanje spontano nadgradilo v pogostejše telefonske pogovore in tudi v občasna srečanja pri nas

Slika 2: Na proslavi profesorjeve devetdesetletnice leta 2008 (Foto: Marko Razpet)

doma ali pa pri profesorju Vidavu. To je med nami tremi spletlo tople prijateljske vezi, profesor je začel spremljati tudi moje delo, pisanje srednješolskih in pozneje osnovnošolskih učbenikov, med obema profesorjema (tako sta drug drugega vedno naslavljala) pa je še poglobilo njuno medsebojno globoko občudovanje in spoštovanje.

Profesorjevo že omenjeno uglajeno vedenje naj ilustrira opis poteka vsakokratnega našega srečanja.

Vedno, ko smo se dogovorili za srečanje, sva zaradi težav s parkiranjem šla po profesorja oba, ga pripeljala v najin dom in pozneje pospremila nazaj.

Profesor nikoli ni prestopil najinega praga brez lepega šopka, ki ga je do prihoda spretno skrival. Po skromni pogostitvi, ki je bila vedno postranskega pomena, je nastopil glavni del druženja. Začeli smo razpravljati o tekočih dogodkih ali se spominjali starih in ob tem obujali spomine na svoja doživetja. Pogosto so ti pogovori zašli v zgodovinske vode, pogovarjali smo se tudi o temah z drugih področij.

Večkrat pa sta oba moža, oba strokovnjaka na svojih področjih, začela razpravljati o raznih problemih, ki so povezovali obe njuni znanstveni veji, matematiko in fiziko. Kar kresale so se misli, padale so domneve, postavljala so se vprašanja. In če je ob tem padla kaka pohvala na profesorjev račun, mu je postalo kar nekam nerodno in jo je vedno poskušal vsaj omiliti, če že ne povsem ovreči.

Enako skromno je profesor Vidav deloval tudi vsakič, ko sem ga obiskala pri njem doma na Ilirski ulici 7 ali pozneje v Domu starejših občanov na Taboru 10, ko sem mu prinesla pravkar izdani učbenik[8] ali kake druge malenkosti, ki bi mu utegnile koristiti, ali samo kako rožico.

Vedno me je pričakal že pri vratih, saj sem se mu najavila tako v stolpnici kot pozneje pri vratarju v domu. Po najinem pozdravu je vedno pričel najin pogovor z vprašanjem: »Kako je kaj z zdravjem in počutjem gospoda profesorja?« Potem se je zanimal za njegovo trenutno delo ali pohvalil Janezov zapis v časopisu ali članek, če je pravkar izšel. O vsem je bil na tekočem. Vedno je občudoval Janezovo zmožnost hitrega pisanja, ob tem pa vsakič dodal, da je on žal po naravi vse preveč len in da dejansko ne dela nič. Noben moj upravičeni ugovor, da to ni ravno tako, ni bil sprejet.

Zaleglo ni niti to, da sem mu omenila, da vidim na njegovi mizi vedno polno papirja, popisanega s svinčnikom, na polici pa vedno druge tuje matematične knjige. Vedno me je zavrnil rekoč: »Veste, matematika je sicer zelo stara gospa, ampak ima rada le mlajše gospode. To, kar počnem zdaj sam, je pa samo igra. Zdaj veliko poslušam radio, berem časopis Delo, da vem, kaj se dogaja.« Potožil je, da sicer rad seže po knjigi, a da ima s tem težave zaradi oči. Te so se začele pojavljati že pred prihodom v dom in so bile tudi vzrok, da je opustil gledanje televizije.

To, da je kljub slabemu vidu vedno pregledal tudi vse moje učbenike in pohvalil moje delo, mi je in mi še vedno veliko pomeni.

Z zanimanjem je profesor Vidav poslušal vse o novostih, ki so se v teh letih dogajale v osnovni in srednji šoli. Samo enkrat sem profesorja vprašala za nasvet, kako bi lahko najbolj razumljivo razložila neko snov pri pisanju učbenika za deveti razred, in mu ob tem nasula nekaj svojih idej, a sem ostala brez odgovora. Dejal je, da si ne upa ničesar svetovati niti glede poučevanja v gimnaziji, kaj šele za devetletno šolanje, ker ni podkovan v metodiki.

Vedno sva delček pogovora namenila tudi njegovemu zdravju. Največkrat pa mi je pripovedoval razne utrinke iz svojega otroštva in o bridkih izkušnjah, ki jih je doživljala njegova družina med vojno. Pogosto je povedal tudi kak utrinek iz svoje internacije v Gonarsu. O tem je kdaj stekla beseda tudi pri nas doma. Čeprav je na te slabe izkušnje gledal zelo racionalno, pa se je v njegovi pripovedi pogosto zaznala tudi žalost. Ob tem je navadno poudaril, da je bilo to izkustvo zanj grenko in težko, a malenkostno glede na številne druge sotrpine, ki so v Gonarsu preživeli veliko več časa kot on.

Skoraj pa ni minilo srečanje, kjerkoli je že bilo, da ni obujal spominov na prigode s profesorjem Plemljem. Izostale niso niti anekdote. Povedal je, da mu je profesor Plemelj nekoč potožil: »Ja, zdaj pa vem, da sem star, saj mi je nekdo na polnem tramvaju, ko sem vstopil, odstopil sedež.« Iz pripovedi se je vedno čutilo, da profesor Vidav ni nikoli pozabil naklonjenosti in pomoči svojega profesorja, ki je je bil deležen v mladosti, in njegovih velikih uspehov. Vedno je dal vedeti, da mu je bil profesor Plemelj vseskozi vodnik, svetovalec, vzornik in pozneje, ko sta postala sodelavca, tudi dober prijatelj.

Po letu 2003, ko je odšel od nas tudi profesor Prijatelj, je pogosto tekla beseda tudi o njem. Z možem sta nekajkrat nadaljevala prekinjene filozofske razprave, ki sta jih nekoč oba moža, vsak posebej, obravnavala s profesorjem Prijateljem.

Meni je navadno pripovedoval, kako je v Gonarsu spoznal profesorja Prijatelja, največkrat pa je obujal spomine na njune zanimive pogovore, te je najbolj pogrešal, z njunih pogostih sprehodov na Ljubljanski grad ali ob Ljubljanici pod njim. Opisoval je tudi zanimive dogodivščine, ki sta jih doživljala na skupnih izletih z avtom po Sloveniji. Ob tem sva se včasih tudi nasmejala. Po pripovedi sem sklepala, da je bil profesor Prijatelj za profesorjem Plemljem njegov največji prijatelj in da te vrzeli, ki je nastala za njima, ni zapolnil nihče.

Večkrat je na teh srečanjih profesor Vidav omenil svoje staranje, ki poteka povsem v nasprotju z njegovimi pričakovanji. Dejal je: »Predstavljal sem si, da je staranje zvezna funkcija, zdaj pa ugotavljam, da to ne drži, ker ima skoke«. Povedano je podkrepil s slikama grafov obeh funkcij, ki jih je narisal z roko po zraku.

Prišel pa je čas, ko profesor, ki je rad hodil na sprehode ob Ljubljanici ali do tržnice, ni več zapustil Doma starejših občanov. Tako so izostala tudi naša srečanja pri nas doma. Ni se dal pregovoriti. Vedno znova in znova mi je na šaljiv način na vabila odgovarjal z razlago: »Veste, to je tako. Zdaj živim v drugi državi, v domu, izgubil pa sem potni list in zato ne morem nikamor.« Domnevam, da je k tej odločitvi veliko pripomogla tudi profesorjeva zelo slaba izkušnja, ko sta ga nekoč, ko je odhajal iz banke,

8 Profesorju sem prinašala na vpogled vse zanimive nove matematične knjige in učbenike, ki sem jih izdala kot urednica ali soavtorica ali avtorica pri DZS.

obstopila dva moža in ga oropala. Tako se je kar več let sprehajal samo še po sobi, po stopnicah in poleti po balkonu.

Profesor Vidav je bil prežet s skromnostjo in v poznih letih tudi nekako vdan v usodo. Nikoli se ni pritoževal ne nad težkimi dogodki v svojem življenju ne nad bivanjem v Domu starejših občanov. Nikoli ni niti z besedo omenil, da je verjetno z vsemi številnimi zadolžitvami, ki jih je vestno opravljal poleg svojega pisanja in predavanj na univerzi, društvu in drugod, zavestno žrtvoval veliko svojega ustvarjalnega časa takrat, ko je bil še mlad. Nasprotno, vedno je poudarjal, da je imel v življenju veliko srečo.

Vsakič, ko sem mu prinesla kako domačo dobroto, jo je po pregovarjanju s hvaležnostjo sicer sprejel, a vedno poudaril, da zares ne potrebuje ničesar, ker v domu zelo lepo skrbijo zanj. Ima vsega dovolj in preveč. Z veseljem pa je sprejel kako dobroto, ki je bila primerna, da jo je delil s svojimi sostanovalci iz nadstropja na vsakotedenskih srečanjih, ki so ga razveseljevala.

Od profesorja sem samo enkrat slišala, da se je iskrivo in z rahlim nasmeškom pohvalil, da je edini prebivalec svoje »nove domovine«, ki še ni nikoli uporabil dvigala, čeprav je bival sprva v tretjem in potem v drugem nadstropju. V zvezi s tem je dejal, da ne razume sostanovalcev, ki pa obratno kot on, četudi bi lahko, nikoli ne uporabljajo stopnic.

Pripoved o spominih na profesorja pa ne bi bila celovita, če bi zamolčala, da mi je profesor Vidav enkrat v letu 2011 izročil svojo razpravo o elegantni matematični rešitvi sicer znanega in tudi na nek način že rešenega fizikalnega problema iz relativnostne teorije s prošnjo, naj jo nesem možu v presojo. Izkazalo se je, da je bil ta zapis dozorel sad ene njunih najbolj živahnih razprav pri nas doma. Še danes čutim posebno vznemirljivo vzdušje, ki se je naselilo v sobo ob njuni živahni in prav razvneti razpravi. Moža je profesorjevo odkritje, do katerega je prišel pri 93 letih, navdušilo, saj se mu je zdela profesorjeva matematična rešitev fizikalnega problema elegantna in zanimiva. Kot nematematik pa si vseeno ni drznil dati končne ocene. Ko je pridobil pohvalo in odobravanje o napisanem od tudi izjemnega matematika, sem navdušenje obeh prenesla profesorju Vidavu, a ta se je ob mojem poročilu samo nasmehnil. Dobila sem vtis, da je zadovoljen, a samo za hip. Takoj zatem je zamahnil z roko in rekel: »Ne, ne! Ta zapis ni dozorel za objavo«. Razumljivo, profesor Vidav ni dal od sebe ničesar, kar po njegovi strogi presoji ni bilo dovršeno.

Da to ni bil osamljen primer uspešnega profesorjevega raziskovanja v visoki starosti in odklonitve objave, pokaže profesorjev duhovit komentar njegove rešitve Eulerjevega algebraičnega problema v prispevku [2. str. 180] profesorja Milana Hladnika, ki jo je profesor utemelji takole: »To je tako, kot bi šel čez Triglav na Šmarno goro.«

Sklepna misel

Več desetletij trajajoča druženja niso pokazala samo znanih dejstev, da je bil profesor Vidav vrhunski, pronicljiv matematik, odličen znanstvenik in učitelj ter skromen, a pokončen mož, ki je stal za svojimi odločitvami, ampak se je pokazalo tudi to, da se je pod njegovim videzom zadržanosti skrival iskriv, duhovit in pronicljiv sogovorec, predvsem pa tankočuten, dober, razumevajoč in radodaren mož, ki je tudi finančno, preko sklada, podpiral nadebudne študente.

Ugotovitev, da je profesor Vidav ostal prodoren raziskovalec tudi v visoki starosti, čeprav je to venomer zanikal, pa pokaže, da je vse življenje ohranil svoje visoke kriterije predvsem do svojega dela in ostal skromen mož, ki ni iskal pohval in čudenja, ampak popolnost.

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem prof. dr. Petru Legiši in prof. dr. Marku Razpetu za fotografiji, kolegu Aleksandru Simoniču, dipl. mat., za tehnično pomoč in Danijeli Čibej, prof., za lektoriranje.

Viri in literatura

[1] J. Globevnik. (2015). *V spomin akademiku Ivanu Vidavu (1918–2015)*. Obzornik za matematiko in fiziko, **62**, št. 5, 180–183.

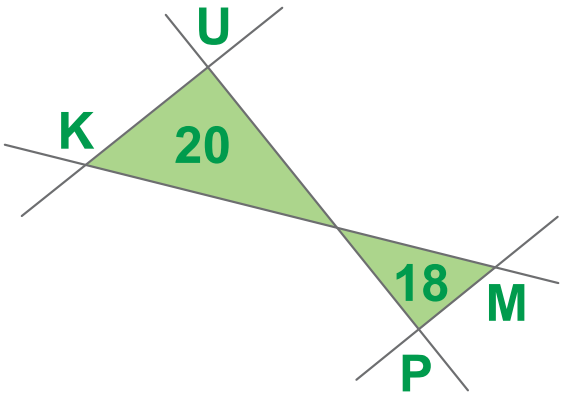
[2] M. Hladnik. (2015). *Razmišljanja o profesorju Ivanu Vidavu*. Obzornik za matematiko in fiziko, **62**, št. 5, 183–187.

[3] I. Vidav. (2008). *Jubilejni zbornik Ivan Vidav – 90 let*. Ljubljana: DMFA – založništvo.

[4] I. Vidav. (2016). *O deljenju z ostankom in še o čem*. Ljubljana: DMFA – založništvo.

Utrinki s 4. mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike 2018

mag. Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo



V Kongresnem centru Laško je 27. in 28. junija 2018 potekala **4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike** KUPM 2018. Namenjena je bila učiteljem, ki poučujejo matematiko od 1. razreda osnovne šole do zaključnega letnika srednje šole, ter strokovnjakom na področju matematičnega izobraževanja. Dogodka se je udeležilo čez 500 učiteljev. Konferenco je povezovala vodja programskega odbora mag. Mojca Suban, da je organizacijsko vse teklo, pa ima največ zaslug vodja organizacijskega odbora mag. Sonja Rajh.

Osrednje vsebine konference so bile:
- Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem
- Algebra
- Odnos do učenja in poučevanja matematike

Delo na konferenci je potekalo v obliki plenarnih predavanj z vabljenimi predavatelji, predstavitev, okrogle mize, delavnic in natečaja. Dr. Martin Kindt nam je pokazal različne povezave med algebro in geometrijo, ki jih lahko uporabljamo pri razumevanju algebrskih vsebin. Vidik, da začetno algebro lahko razumemo kot oblikovanje posplošitev iz konkretnih aritmetičnih dejstev in da vsebini vzorci in zaporedja ponujata možnosti za razvoj algebraičnega mišljenja, nam je predstavila dr. Vida Manfreda Kolar.

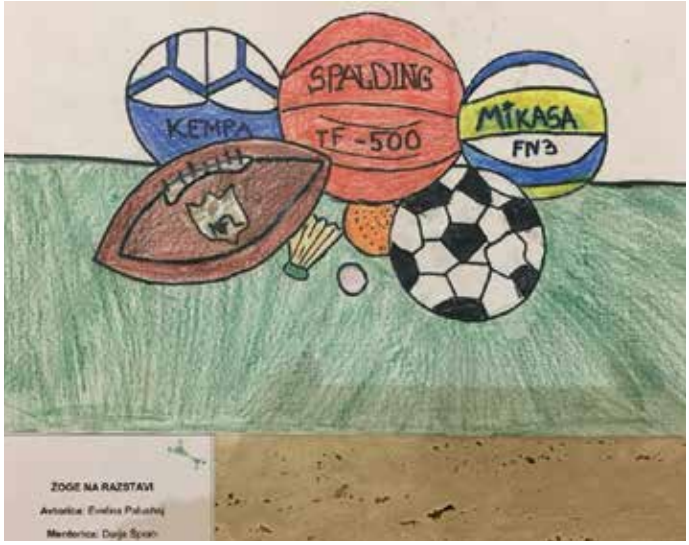
O tem, kako uvajati različne pristope poučevanja s preiskovanjem so nam spregovorili hrvaški partnerji v projektu Meria dr. Matija Bašič in dr. Željka Milin Šipuš ter mag. Mojca Suban. Barbara Japelj je delila z nami rezultate mednarodnih raziskav, ki kažejo, da je znanje naših otrok vrhunsko in kaj narediti, da bi do njega prišli prav vsi.

Predavatelja iz Zagreba M. Bašič in Ž. Milin Šipuš

Plenarni predavatelj M. Kindt

Delavnice na konferenci

Delavnice na konferenci



Slika iz natečaja »Žogomatika«

Na delavnicah in sekcijskih predstavitvah smo imeli možnost prisluhniti številnim primerom iz prakse.

Dr. Uroš Kuzman nam je dogodek še humoristično dopolnil s prispevkom *Matematika za nematematike*. Če se vprašamo, kako dvigniti motivacijo za učenje matematike, bi večina odgovorila - težko. Ker pa on pravi, da tudi v matematiki velja težko ≠ nemogoče, se je vredno truditi dalje.

Uroš Kuzman: Matematika za nematematike

Na natečaju so zato učitelji lahko sodelovali z učenci, kjer so izbirali med dvema naslovoma:

- »IVAN VIDAV – pomemben soustvarjalec matematike v Sloveniji«
- »ŽogoMatika«

Izdelek iz natečaja »Žogomatika«

V letu 2018 poteka 100. obletnica rojstva slovenskega matematika Ivana Vidava. Namen natečaja je bil ozaveščanje o pomembnosti odkritij na področju znanosti, spoznavanje zgodovinskega razvoja matematike in znanih matematikov ter ustvarjanje na razpisano temo. Prof. dr. Marko Razpet nam je predstavil svoj pogled na prof. dr. Ivana Vidava.

M. Razpet o dr. Ivanu Vidavu

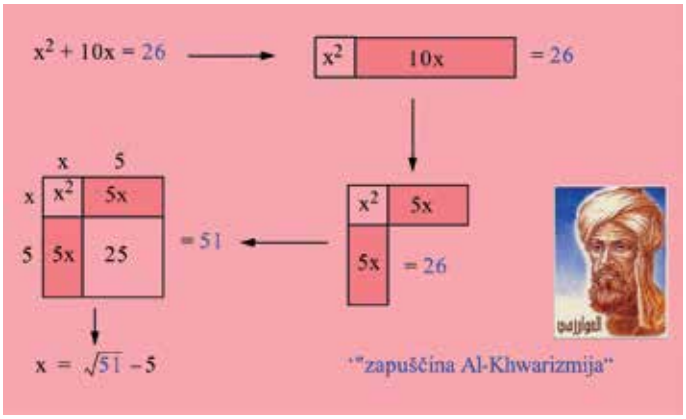
Naša sodelavka Amela Sambolić Beganović je poskrbela za enotno podobo članic Predmetne skupine za matematiko na ZRSŠ.

Zahvaljujemo se vsem predavateljem, sodelavcem ZRSŠ in udeležencem konference, ki ste pomagali ustvariti ta dogodek. Vidimo in srečamo se spet na naslednji konferenci. Vabljeni.

Še več utrinkov in gradiva najdete na spletni strani konference: https://www.zrss.si/kupm2018/. in na Facebooku: https://www.facebook.com/kupmzrss/.

Članice Predmetne skupine za matematiko in Silva Kmetič

Iz plenarnega predavanja M. Kindta



Reševanje kvadratne enačbe iz predstavitve M. Kindta

Mathematics in school

2 2018, Volume 24

CONTENTS

Mateja Sirnik
Editorial

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Jerneja Bone
Primary School Teachers on Calculator Use 2

Apolonija Jerko
Calculator Use by Students with Learning Difficulties 11

Sonja Rajh
Learning New Content in Primary School Mathematics Class Using a Calculator 17

FROM THE CLASSROOM

Irena Rauter Repija
Using a Calculator to Learn Integrals 39

Marko Razpet
Moessner's Sieve 46

Urška Puncer
Algebra of Block Diagrams 47

Magda Pipenbaher
Accounting The Humanity 53

MATHEMATICS THROUGH HISTORY

Milena Strnad
Memories on Academician Prof. Dr. Ivana Vidava (1918–2015) 56

NEWS

Mateja Sirnik
From the 4th International Conference on Learning and Teaching Mathematics KUPM 2018 62

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje v podporo učenju

Priročnik za učitelje in druge strokovne sodelavce

Priročnik obsega **7 zvezkov**, zbranih v mapi, cena 12,40 €

- **Zakaj formativno spremljati**
- **Nameni učenja in kriteriji uspešnosti**
- **Dokazi**
- **Povratna informacija**
- **Vprašanja v podporo učenju**
- **Samovrednotenje, vrstniško vrednotenje**
- **Formativno spremljanje v vrtcu**

Že 5. ponatis!

Priročniki po predmetih in področjih

Formativno spremljanje na RAZREDNI STOPNJI

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Formativno spremljanje pri ZGODOVINI

11,90 €

11,90 €

11,90 €

izid 2019

Napovedujemo:

Formativno spremljanje pri DELU SVETOVALNIH DELAVCEV

Formativno spremljanje kot PODPORA UČENCEM S POSEBNIMI POTREBAMI

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:
- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (http://www.zrss.si)

revije ZRSŠ facebook ZRSŠ twitter ZRSŠ

ISSN 1318-010X