PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 2
Strani 66–69, 65

Vilko Domajnko:

DESCARTESOVA GEOMETRIJSKA METODA REŠEVANJA KVADRATNIH ENAČB

Ključne besede: matematika, enačbe, geometrija.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1032-Domajnko-Descartes.pdf

DESCARTESOVA GEOMETRIJSKA METODA REŠEVANJA KVADRATNIH ENAČB

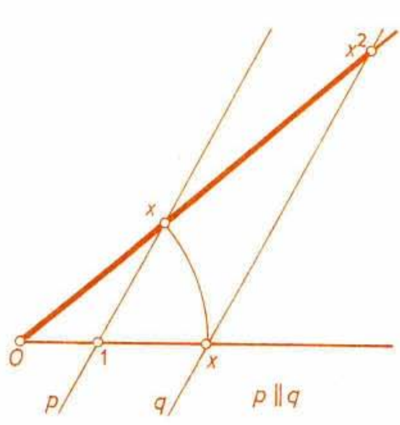
Leta 1637 je **Rene Descartes** (1596 - 1650) (slika 1) izdal svojo znamenito *Razpravo o metodi.* Knjigi, ki obdeluje predvsem področje filozofije, so dodana tri posebna poglavja: *Optika, Meteorji* in *Geometrija.* Z matematičnega stališča je najpomembnejše tretje poglavje, to je 116 strani dolga razprava o geometriji. Še več — to poglavje presega okvir *Razprav,* saj so matematiki danes skorajda enotnega mnenja, da gre začetke analitične geometrije iskati prav v Descartesovi *Geometriji.*

V začetnem poglavju *Geometrije* spregovori Descartes najprej o količinah in o njihoveme zapisu. Elegantno se uspe otresti dotakratne miselnosti, ki je bila še zmeraj dediščina starih Grkov, da če z x označimo neko številsko vrednost, pomenita potem oznaki x^2 in x^3 zmeraj le ploščino kvadrata s stranico dolžine x oziroma prostornino kocke z robom dolžine x. Descartes je količino x^2 definiral kot četrti člen v razmerju

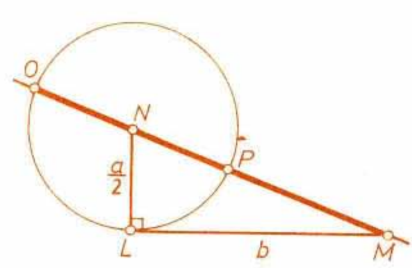
$$1 : x = x : x^2$$

Seveda lahko x^2 enostavno konstruiramo po geometrijski poti, če le poznamo vrednost števila x (glej sliko 2).

Svojo revolucionarno zamisel je Descartes ponazoril na primeru geome-



Slika 2



Slika 3

trijskega reševanja kvadratnih enačb. In ker je njegova metoda izvirna ter zanimiva, se seznanimo z njo nekoliko podrobneje.

Kvadratne enačbe je Descartes razdelil v tri različne tipe.

Enačba tipa

$$x^2 = ax + b^2 \ (a > 0) \tag{1}$$

V ravnini najprej načrtajmo pravokotni trikotnik NLM s katetama $\overline{NL} = \frac{a}{2}$ in $\overline{LM} = b$, kakor kaže slika 3, zatem pa še krog s središčem v točki N in s polmerom $\overline{NL}$. Premica skozi točki N in M seče krožnico v točkah O in P. Descartes trdi, da je dolžina daljice OM rešitev zgornje kvadratne enačbe (1).

Za dokaz trditve označimo $\overline{OM} = x$. Potem je $\overline{PM} = x - a$. Po izreku o šopu premic, presekanem s krožnico, je

$$x(x - a) = b^2 \text{ ali } x^2 = ax + b^2$$

in dolžina daljice OM torej zares zadošča enačbi (1). S pomočjo Pitagorovega izreka pa ni težko izračunati njene dolžine

$$\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Descartesova geometrijska metoda da tudi drugo rešitev $x^2 = -\overline{PM}$. Ker pa je ta negativna in ker je Descartes v svoji razpravi obstoj negativnih števil dosledno ignoriral, je seveda ni omenil.

Enačba tipa

$$x^2 = -ax + b^2 \ (a > 0) \tag{2}$$

Tudi v tem primeru bomo uporabili sliko 3. Odmislimo na njej oznake iz prejšnjega poglavja, naj bo sedaj raje $x = \overline{PM}$. Očitno je potem iz istega razloga kot pri enačbi (1) $x(x + a) = b^2$, druga rešitev enačbe (3) pa je znova negativna.

Za ilustracijo si sedaj oglejmo reševanje enačbe

$$x^4 = -8x^2 + 15$$

V tem primeru je $\overline{NL} = 4$ in $\overline{LM} = \sqrt{15}$. Descartes svetuje, da na izdelani risbi označimo $\overline{PM} = x^2$. Ves problem se začne s konstrukcijo $\sqrt{15}$, ki jo prepustimo bralcu, zaključi pa se v konstrukciji kvadratnega korena iz dolžine daljice PM, kar kaže slika 4.

$$\overline{NL} = 4$$
$$\overline{LM} = \sqrt{15}$$
$$\overline{PM} = \overline{P'M'}$$
$$\overline{M'Q} = 1$$
$$\overline{M'R} = x = \sqrt{\overline{PM}}$$

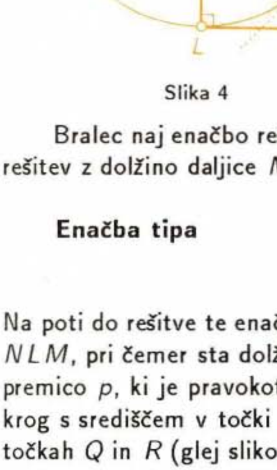
Slika 4

Bralec naj enačbo reši tudi po znani algebraični poti in primerja dobljeno rešitev z dolžino daljice $M'R$, ki jo je izmeril na svoji risbi.

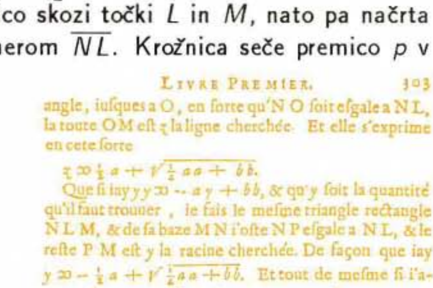
Enačba tipa

$$x^2 = ax - b^2 \ (a > 0) \tag{3}$$

Na poti do rešitve te enačbe Descartes spet začne s pravokotnim trikotnikom NLM, pri čemer sta dolžini katet $\overline{NL} = \frac{a}{2}$ in $\overline{LM} = b$. V točki M postavi premico p, ki je pravokotna na premico skozi točki L in M, nato pa načrta krog s središčem v točki N in s polmerom $\overline{NL}$. Krožnica seče premico p v točkah Q in R (glej sliko 5).



Slika 5


LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$.

Que si iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty - a x^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}}$ & ainsi des autres.

Enfin si i'ay

$z^2 \infty az - bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2} a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'ex-

Slika 6

Descartes trdi, da sta dolžini $\overline{MQ}$ in $\overline{MR}$ rešitvi enačbe (3).

Po izreku o šopu premic, presekanem s krožnico, je namreč $\overline{MR} \cdot \overline{MQ} = \overline{LM}^2$. Zaradi simetrične lege točk R in Q glede na točko S pa velja

$$\overline{MQ} + \overline{MR} = 2 \cdot \overline{NL} = a$$

Če označimo $\overline{MQ} = x$ ali pa $\overline{MR} = x$, dobimo $(a - x)x = b^2$, torej $x^2 = ax - b^2$. V obeh primerih sta dolžini $\overline{MQ}$ in $\overline{MR}$ zares rešitvi enačbe (3). Njuno numerično vrednost pa izračunamo takole

$$\overline{MQ} = \overline{MS} - \overline{SQ} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$
$$\overline{MR} = \overline{MS} + \overline{SQ} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

Vrednost pod korenom $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ je vsaj v principu lahko negativna, a pogled na risbo 5 nam pove, da ne more biti $b^2 > \frac{1}{4}a^2$.

Descartes je **enačbe tipa**

$$x^2 = -ax - b^2 \ (a > 0)$$

v svoji obravnavi kar izpustil, saj pri nobeni izbiri koeficientov a in b nimajo pozitivnih rešitev.

Na koncu velja omeniti, da predstavljeni izsek iz Descartesovege dela ni njegov najznačilnejši vzorec. Tokrat je bila lahkoumljivost te vsebine tista, ki je pisca spodbudila k pričujočemu članku.

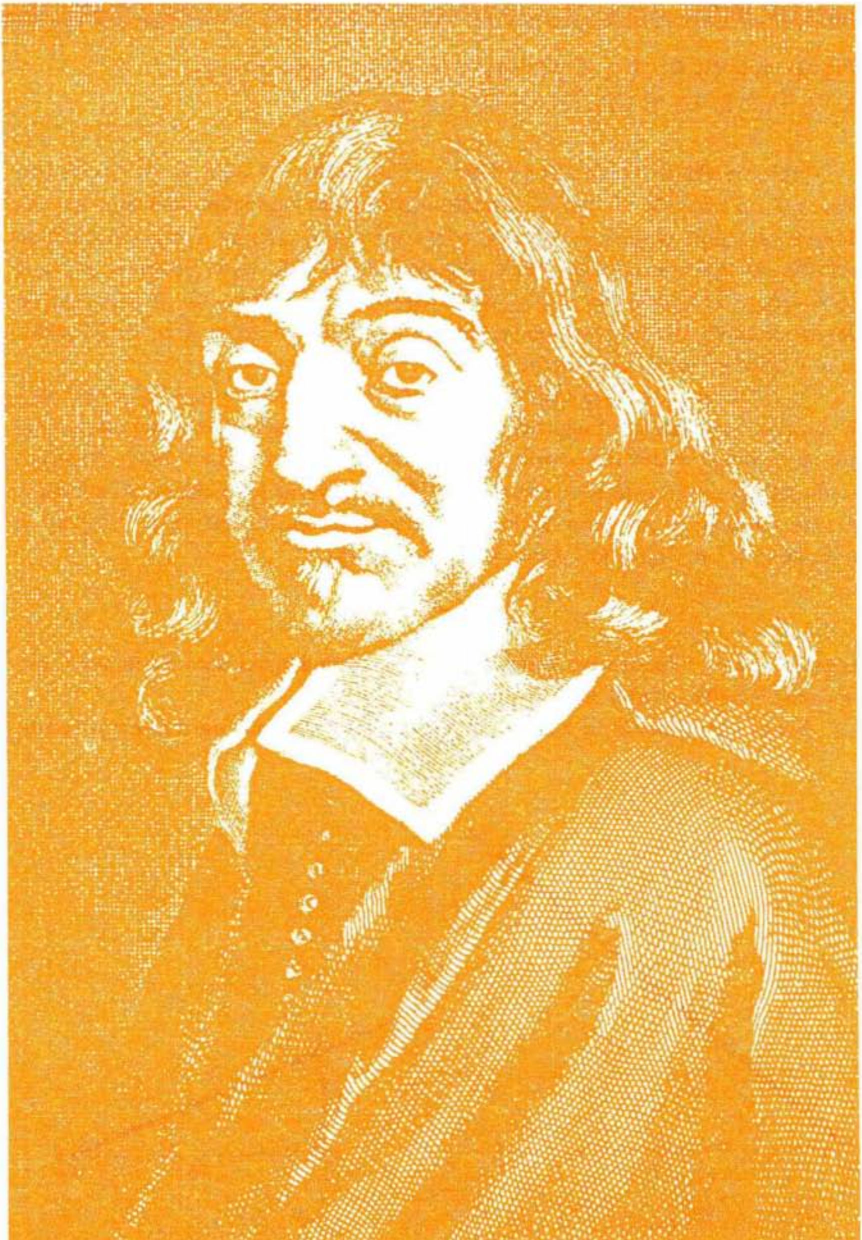
In nenazadnje — tudi bralec naj za svoj kratek čas grafično poišče rešitve naslednjih enačb:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad x^8 + 4x^4 - 8 = 0$$
$$x^2 + 3x - 8 = 0 \qquad x - 8\sqrt{x} + 8 = 0$$

Vilko Domajnko

Literatura:

1. *The Geometry of Rene Descartes*, Dover Publications, New York, 1954
2. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968



Slika 1. René Descartes (1596-1650)