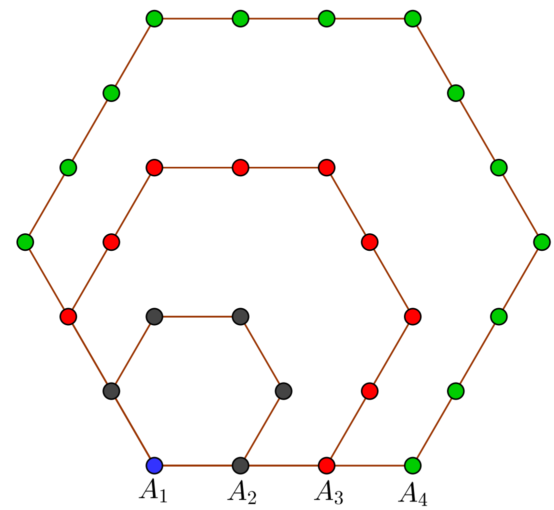
V začetku je bila točka

Marko Razpet

Figurativna števila, med katerimi so tudi večkotniška, so znana že zelo, zelo dolgo. Ljudje so že v sivi davnini razporejali enake predmete, npr. zrna semen ali kamenčke, v pravilne geometrijske figure in prej ali slej jih je zanimalo skupno število teh predmetov. V prispevku bomo namesto semen in kamenčkov razporejali točke, ki so na naših slikah namenoma pretirano odebeljene. Stari Grki, še posebno pitagorejci, za katere je bilo število bistveno, so poznali večkotniška števila, med katera spadajo tudi najpreprostejša – trikotniška. Vsem pa je skupna točka. Zato tudi tak naslov našega članka.



SLIKA 1.
Četrto šestkotniško število

Večkotniška števila, ki ustrezajo pravilnemu k-kotniku, sestavljajo zaporedje $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}, V_3^{(k)}, \dots$ Spodnji indeks označuje število točk na stranici. Za trikotniška števila je $k = 3$ in tedaj bomo pisali enostavneje: $T_n = V_n^{(3)}$.

Na sliki 1 je $k = 6$, kar pomeni, da predstavljamo šestkotniška števila $V_n^{(6)}$. Začnimo s točko A_1, ko jo bomo šteli za najpreprostejši večkotnik (slika 1), prvi po vrsti. Ta ima samo eno točko, kar pomeni $V_1^{(6)} = 1$. Za vsako naravno število $k \geq 3$ je $V_1^{(k)} = 1$.

Nadaljujemo s točkama A_1 in A_2, ki naj bosta oglišči pravilnega k-kotnika, drugega po vrsti, daljica A_1A_2 pa njegova stranica, recimo ji osnovnica. Preostalih oglišč ne bomo poimenovali, vse točke pa bomo risali odebeljeno. Vseh točk je šest, torej $V_2^{(6)} = 6$. V splošnem primeru je $V_2^{(k)} = k$.

Nato osnovnico A_1A_2 podaljšamo za faktor 2 prek A_2 do točke A_3 in daljico A_1A_3 vzamemo za osnovnico tretjega pravilnega k-kotnika, ki ga narišemo na istem bregu premice nosilke daljice A_1A_2, kot je drugi pravilni k-kotnik. Na vse stranice in v oglišča tretjega pravilnega k-kotnika dodamo nove točke v medsebojni razdalji $|A_1A_2|$. Dobimo figuro, ki vsebuje nove točke. Vsako seveda štejemo le enkrat. Število vseh točk na prvem, drugem in tretjem pravilnem k-kotniku je tretje k-kotniško število $V_3^{(k)}$. V primeru $k = 6$ je vseh točk $V_3^{(6)} = 15$.

Opišimo še en korak. Osnovnico A_1A_2 podaljšamo za faktor 3 prek A_2 in A_3 do točke A_4 in daljico A_1A_4 vzamemo za osnovnico četrtega pravilnega k-kotnika, ki ga narišemo na istem bregu premice nosilke daljice A_1A_2, kot sta drugi in tretji pravilni k-kotnik. Tudi tokrat na vse stranice in v oglišča novega, četrtega pravilnega k-kotnika dodamo nove točke v medsebojni razdalji $|A_1A_2|$. Spet dobimo figuro, ki vsebuje nove točke. Število vseh točk na prvem, drugem, tretjem in četrtem pravilnem k-kotniku je četrto k-kotniško število $V_4^{(k)}$. V primeru $k = 6$ je vseh točk $V_4^{(6)} = 28$. Postopek tako nadaljujemo, podaljšujemo osnovnico, nad njo konstruiramo pravilni k-kotnik, mu v oglišča in na stranice dodajamo nove točke v medsebojni razdalji $|A_1A_2|$, vse do osnovnice $A_1A_2\ldots A_n$, ki je $(n-1)$-krat daljša kot A_1A_2. Vseh točk je $V_n^{(k)}$, torej n-to k-kotniško število. Številu $V_n^{(k)}$ pravimo tudi n-to večkotniško število reda k.

Najlaže je najti izraz za n-to trikotniško število T_n, ki je očitno kar vsota prvih n zaporednih naravnih števil:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Zaporedje trikotniških števil se prične takole:

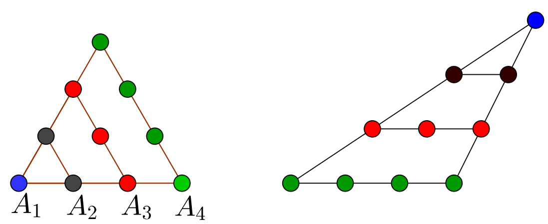
- 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.

Od vseh relacij, ki veljajo za trikotniška števila, zapišimo samo očitno rekurzijo $T_n = T_{n-1} + n$. Trikotniška števila so pomembna zato, ker lahko z njimi na preprost način izrazimo katerokoli večkotniško število. Ravno to bomo naredili v nadaljevanju.

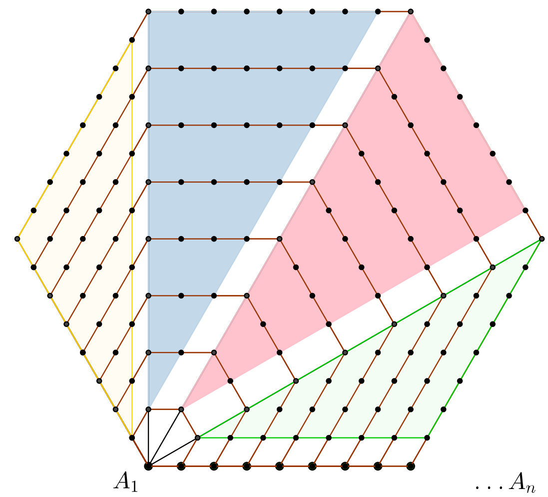
Kot zanimivost povejmo, da število $n(n+1)$, ki nastopa v formuli za trikotniško število, imenujemo *podolžno število*.

Ni pa nujno, da pri ponazoritvi večkotniških števil vztrajamo pri pravilnih večkotnikih. Na sliki 2 imamo primer, ko trikotniško število predstavimo z raznostraničnim trikotnikom.

Diofant iz Aleksandrije, ki je živel v 3. stoletju našega štetja, nam je zapustil obširno razpravo *O večkotniških številih*. Njegovi zapisi se nam zdijo precej zapleteni, ker v njegovem času še niso zapisovali in računali tako, kot mi dandanes. Večinoma so si pomagali z geometrijsko razlago. Dokazal je enakost (4), kar bomo ponovili, pri čemer bomo seveda uporabljali moderno pisavo.



SLIKA 2.
Četrto trikotniško število



SLIKA 3.
Deveto šestkotniško število

Kako torej lahko izrazimo večkotniška števila s trikotniškimi? Pomagamo si s sliko 3, kjer so narisani pravilni šestkotniki z vsemi potrebnimi točkami. Enako bi postopali z vsakim pravilnim k-kotnikom in njegovimi $V_n^{(k)}$ točkami. Narišemo vse diagonale iz oglišča A_1. Teh je očitno $k-3$ in delijo pravilni k-kotnik na $k-2$ trikotnikov. Paziti moramo, da točk ne bi dvakrat šteli. Zato smo trikotnike na sliki različno obarvali in jih med seboj ločili z vzporednicami diagonalam. Vsak tak trikotnik ima na stranici $n-1$ točko in zato vsebuje T_{n-1} točk. Posebej smo izločili točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Teh je n, na $k-2$ trikotnikih pa je $(k-2)T_{n-1}$ točk. S tem smo našli izraz

$$V_n^{(k)} = n + (k-2)T_{n-1}. \quad (2)$$

Pretvorimo ga lahko tudi v druge oblike, npr.:

$$V_n^{(k)} = T_n + (k-3)T_{n-1} = \frac{n}{2}(2 + (k-2)(n-1)). \quad (3)$$

Za $k = 4$ dobimo štirikotniška ali kvadratna števila Q_n, za $k = 5$ petkotniška ali pentagonalna števila P_n, za $k = 6$ šestkotniška ali heksagonalna števila H_n. Izrazi zanje so:

$$\begin{aligned} Q_n &= V_n^{(4)} = n^2, \\ P_n &= V_n^{(5)} = \frac{1}{2}n(3n-1), \\ H_n &= V_n^{(6)} = n(2n-1). \end{aligned}$$

Za večkotniška števila je Diofant izpeljal z geometrijsko metodo enakost

- $8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 = (2+(2n-1)(k-2))^2$. (4)

Sedaj jo lahko preverimo tako:

- $$\begin{aligned} &8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 = \\ &4n(k-2)(2+(k-2)(n-1)) + ((k-2)-2)^2 = \\ &= 8n(k-2) + 4n(k-2)^2(n-1) + (k-2)^2 - \\ &\quad 4(k-2)+4. \end{aligned}$$

Združimo na desni strani prvi in četrti ter drugi in tretji člen, število 4 pa postavimo na prvo mesto:

- $$\begin{aligned} &8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 = \\ &4 + (8n-4)(k-2) + (4n(n-1)+1)(k-2)^2 = \\ &4 + 4(2n-1)(k-2) + (2n-1)^2(k-2)^2 = \\ &(2+(2n-1)(k-2))^2. \end{aligned}$$

Enakost (4) nam pomaga odgovoriti na vprašanje, kdaj je dano število N večkotniško reda k. To je takrat, ko je $8(k-2)N + (k-4)^2 = Q^2$ za neko naravno število Q. Ker mora po (4) biti $Q = 2+(2n-1)(k-2)$, dobimo enačbo $2n-1 = (Q-2)/(k-2)$, ki ima rešitev

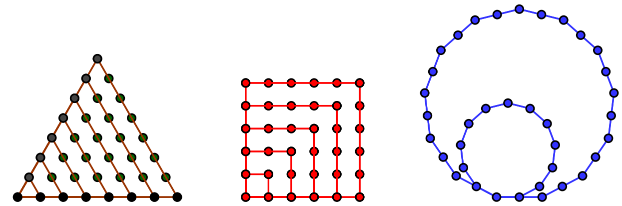
- $$n = \frac{Q+k-4}{2(k-2)}.$$

V poštev pridejo seveda le naravne rešitve.

Za primer si poglejmo število $N = 36$. Da bo to število k-kotniško, mora biti število $288(k-2)+(k-4)^2$ kvadratno, denimo Q^2. S poskušanjem najdemo za $k = 3, 4, 13, 36$ ustrezne Q, in sicer $17, 24, 57, 104$, in ustrezne n, ki so $8, 6, 3, 2$. To pomeni, da je število 36 hkrati osmo trikotniško, šesto štirikotniško ali kvadratno, tretje trinajstkotniško (slika 4) in, trivialno, drugo šestintridesetkotniško.

1. naloga. Dokažite, da nobeno podolžno število ni kvadratno.

2. naloga. Za katere k je število $N = 1225$ večkotniško reda k in katero po vrsti?



SLIKA 4.
Število 36 je trikotniško, štirikotniško in trinajstkotniško.

3. naloga. Preverite naslednjo trditev. Če sta j in k naravni števili, večji kot 2, in je njuna vsota sodo število, potem velja enakost

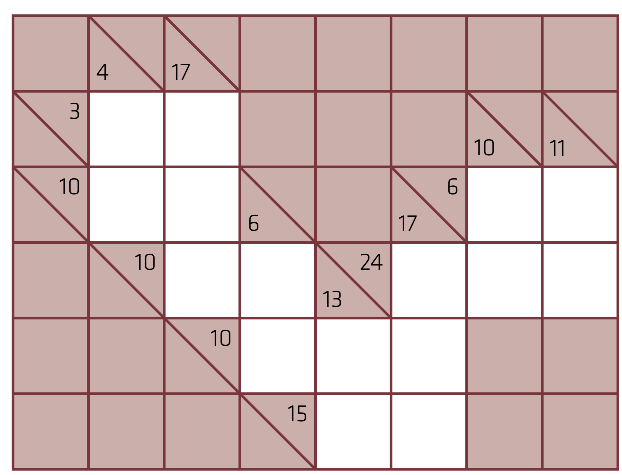
- $V_n^{(j)} + V_n^{(k)} = 2V_n^{((j+k)/2)}$.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×