IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2017
Letnik 64
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 64 • ŠT. 1 • STR 1-40 • JANUAR 2017

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2017, letnik 64, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledala Janez Juvan in Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PROBLEM IZBIRE NAJBOLJŠE TAJNICE

MATIJA VIDMAR

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 60G40, 62L15

V problemu izbire najboljše tajnice zaporedoma intervjuvamo za eno samo odprto delovno mesto $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ kandidatov s ciljem, da izberemo najboljšega med njimi. O zavrnitvi ali sprejemu kandidata se moramo odločiti takoj po njegovem intervjuju. Za velike n je, v približku, optimalno zavrniti prvih n/e kandidatov in nato vzeti prvega, ki je boljši od vseh prejšnjih; najboljšega tako izberemo z verjetnostjo $1/e$. Problem ima natančno in eksplicitno rešitev za vse n.

SECRETARY PROBLEM

In the secretary problem we consecutively interview, for a single open position, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ applicants, with the goal of choosing the best. The decision of whether to reject or accept a given applicant must be made immediately following his interview. For large n, approximately, it is optimal to decline the first n/e candidates and then to hire the first one that is better than all his predecessors; the best being thus chosen with probability $1/e$. The problem admits a precise and explicit solution for arbitrary n.

Uvod in zamejitev problema

Pričnimo z natančnim opisom klasičnega problema izbire tajnice.

(i) Na voljo je eno prosto delovno mesto (tajnice).

(ii) Imamo n kandidatov, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ je znan *a priori* (je neslučajen). Nobena dva kandidata nista enako sposobna. Stopnja sposobnosti kandidatov nam ni znana *a priori*.

(iii) Kandidate intervjuvamo zaporedoma, pri čemer so vsi vrstni redi enako verjetni.

(iv) Po vsakem intervjuju lahko že intervjuvane kandidate linearno uredimo od najboljšega do najslabšega. Pravkar intervjuvanega kandidata takoj bodisi zavrnemo ali sprejmemo na delovno mesto in odločitve ne moremo več spremeniti. Na koncu ni nujno, da mesto zapolnimo.

(v) Odločitev o tem, ali kandidata sprejeti ali zavrniti, je odvisna samo od relativne razvrstitve kandidatov, ki so že bili intervjuvani.

(vi) Maksimizirati želimo verjetnost, da izberemo najboljšega kandidata.

Opisano je dobro znan problem iz teorije optimalnega ustavljanja, ležeč na preseku verjetnosti in optimizacije. Klasična monografija s tega področja je [1]. Natančneje ga uvrščamo na področje optimalnega ustavljanja verig Markova v diskretnem času, glej npr. [5, str. 135, primer 8.16], [7, str. 485]. Problem ima relativno kratko, a bogato zgodovino, katere objavljeni začetki segajo v drugo polovico 20. stoletja. Originalno avtorstvo ni jasno. Bralca, ki ga zanima natančnejši zgodovinski opis, napotimo npr. na pregledna članka [8, razdelek 3] in [9, razdelek 1.2]. V tem pogledu navedimo še, da je problem poznan tudi pod drugimi imeni: problem poroke oz. dote, problem lepotnega tekmovanja, problem najboljše izbire, če jih navedemo le nekaj. Njegova privlačnost je v tem, da ima preprosto, elementarno in eksplicitno rešitev. Zares imamo sledečo trditev, ki jo bomo dokazali v naslednjem razdelku.

Trditev 1. *Definirajmo*

$$r_n := \min\left\{ r \in \{1,\dots,n-1\} : \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1 \right\} \quad \textit{in}$$

$$P_n := \begin{cases} 1/2, & \textit{za } n=2 \\ \dfrac{r_n - 1}{n} \displaystyle\sum_{i=r_n-1}^{n-1} \frac{1}{i}, & \textit{za } n \geq 3 \end{cases}.$$

Potem je

> *»Zavrni prvih $r_n - 1$ kandidatov in nato izberi prvega, ki je boljši od vseh svojih predhodnikov, če ta obstaja.«*

optimalna strategija za obravnavani problem; pri tem je verjetnost, da izberemo najboljšega kandidata, enaka P_n. Zaporedje $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ pada proti in ima člene strogo večje od e^{-1}. Zaporedje $(\frac{r_n}{n})_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ pa ima člene prav tako strogo večje od e^{-1} in konvergira proti e^{-1}. Na kratko: $e^{-1} < P_n \downarrow e^{-1}$ in $e^{-1} < \frac{r_n}{n} \to e^{-1}$.

Intuitivno je dokaj jasno, da P_n pada z naraščajočim n. Morda presenetljivo pa je, da verjetnost P_n ne pada proti nič (marveč proti e^{-1}).

Problem je bil študiran v številnih razširitvah in variantah: število kandidatov je lahko slučajno namesto deterministično; na voljo je lahko več kot eno mesto in posledično želimo izbrati nekaj najboljših kandidatov; kvalitete kandidatov so lahko merljive in njihove vrednosti (vendar ne pripadnost posameznemu kandidatu) poznane *a priori*; odločitve lahko z določenim stroškom spreminjamo za nazaj; maksimiziramo lahko kvaliteto izbranega kandidata, kadar je ta merljiva; intervjuvamo v zveznem času itd.: glej članka [8, razdelki 4–7] in [9, razdelki 2–9] za nadrobnejši opis (v ruščini je dostopna tudi knjiga [4], ki je v celoti posvečena problemu tajnice in njegovim variacijam). Nekaj zanimivih verzij bo bralec našel v člankih [10, 11, 13, 6, 2, 14].

Posebej zabavna je primerjava s problemom podoktoranda, v katerem želimo, *ceteris paribus*, izbrati drugega najboljšega kandidata (»najboljši bo šel na univerzo Harvard«). Naj bo

$$k_n := [n/2] = \begin{cases} n/2, & \text{če je } n \text{ sod} \\ (n-1)/2, & \text{če je } n \text{ lih} \end{cases}.$$

Optimalna strategija v tem primeru je:

> »Zavrni prvih k_n kandidatov in nato izberi prvega, ki je drugi najboljši od vseh svojih predhodnikov, če ta obstaja.«

Pri tem je verjetnost, da izberemo drugega najboljšega kandidata, enaka $\frac{k_n(n-k_n)}{n(n-1)} \approx 1/4$. Lažje je izbrati najboljšega kot drugega najboljšega kandidata! Za dokaz glej [15] ali [13].

Rešitev problema izbire najboljše tajnice in njena analiza

Začnimo z nekaj uvodnimi opažanji in dogovori.

• Ker je odločitev, ali izbrati kandidata (in ustaviti intervjuje) ali nadaljevati intervjuje, odvisna samo od relativnega ranga kandidatov, ki so že bili intervjuvani, je različnih možnih pravil ustavljanja (tj. pravil izbire kandidata za odprto delovno mesto) končno mnogo. V posebnem optimalno pravilo obstaja.

• Za intervjuvanega kandidata bomo rekli, da je relativno najboljši, če je boljši od vseh kandidatov, ki so bili intervjuvani pred njim. Kadar pa bomo rekli, da je kandidat najboljši, bomo imeli v mislih, da je on najboljši izmed sploh vseh kandidatov. Razvidno je, da lahko v optimalni strategiji izbiramo vedno samo relativno najboljše kandidate.

• Denimo, da je j-ti kandidat relativno najboljši. Potem bomo v optimalni strategiji le-tega izbrali, če bo, pogojno glede na informacijo, ki smo jo prejeli do vključno njegovega intervjuja, verjetnost, da je on najboljši – označimo jo s P_j – vsaj tako velika kot verjetnost – označimo jo s Q_j –, da izberemo najboljšega kandidata, če z intervjuji nadaljujemo (in izbiramo optimalno). Sledi, da obstaja optimalna strategija oblike:

»Izberi kandidata j, če je ta relativno najboljši in je $P_j \geq Q_j$, sicer nadaljuj.«

- Končno trdimo, da obstaja optimalno pravilo oblike:

S(r): »Zavrni prvih $r-1$ kandidatov in nato izberi prvega relativno najboljšega, če ta obstaja.«

za neki $r \in \{1, \dots, n\}$. (Vsa možna pravila ustavljanja seveda niso take oblike. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ lahko npr. vedno izberemo po vrsti i-tega ali pa i-tega relativno najboljšega kandidata.)

Res. Po eni strani lahko izrazimo

$$P_j = \mathbb{P}(j\text{-ti kandidat je najboljši}|j\text{-ti kandidat je relativno najboljši})$$

$$= \frac{\mathbb{P}(j\text{-ti kandidat je najboljši})}{\mathbb{P}(j\text{-ti kandidat je relativno najboljši})} = \frac{1/n}{1/j} = j/n.$$

Po drugi strani je Q_j preprosto enak optimalni (tj. maksimalni, uporabljajoč najboljšo strategijo) verjetnosti, da izberemo najboljšega kandidata, če se že na začetku omejimo na strategije, v katerih izbiramo samo med kandidati z zaporednimi številkami $j+1, \dots, n$: namreč če nam za $i \in \{1, \dots, n\}$ slučajna spremenljvka X_i pove relativni rang i-tega kandidata med prvimi i kandidati, potem je (ker so vsi vrstni redi enako verjetni) porazdelitev $X_{j+1}, \dots, X_n$, pogojno na $X_1, \dots, X_j$, enaka brezpogojni porazdelitvi $X_{j+1}, \dots, X_n$.

V posebnem vidimo, da sta P_j in Q_j odvisna samo od j in n in gotovo je $Q_{j+1} \leq Q_j$ za $j < n$. Naj bo še $S := \{j \in \{1, \dots, n\} : P_j \geq Q_j\}$. Če je $j \in S$ in je $j < n$, potem je $Q_j \leq P_j = j/n$ in zato toliko bolj $Q_{j+1} \leq Q_j \leq j/n < (j+1)/n = P_{j+1}$, torej $j+1 \in S$. Sledi, da je $S = \{r, \dots, n\}$ za neki $r \in \{1, \dots, n+1\}$. Primer, ko je $r = n+1$, torej strategija ne-izbire sploh kateregakoli kandidata, je očitno strogo suboptimalna (saj npr. že strategija »izberi prvega kandidata« da strogo pozitivno verjetnost izbire najboljšega kandidata).

Do sedaj smo torej identificirali relativno preprost enoparametričen razred $\{\mathrm{S}(r) : r \in \{1, \dots, n\}\}$ pravil ustavljanja, v katerem leži tudi (neko, morda jih je več) optimalno pravilo. Pot naprej je jasna: določiti verjetnost, označili jo bomo s P_r^n, da zmagamo (tj. da izberemo najboljšega kandidata) uporabljajoč pravilo S(r), in poiskati maksimum P_r^n za $r \in \{1, \dots, n\}$.

V ta namen naj bo $r \in \{1, \dots, n\}$ in denimo, da zasledujemo strategijo S(r). Očitno je $P_1^n = \mathbb{P}(\text{prvi kandidat je najboljši}) = 1/n$. Naj bo $r > 1$. Dogodek, da zmagamo, razpade na disjunktno unijo dogodkov, da izberemo i-tega kandidata po vrsti in da je ta najboljši; seveda izbiramo samo kandidate z indeksi $i \in \{r, \dots, n\}$. Iz končne aditivnosti verjetnosti sledi

$$P_r^n = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(\text{izberemo } i\text{-tega kandidata in ta je najboljši}).$$

Denimo, da je i-ti kandidat najboljši za neki $i \in \{r, \dots, n\}$. Potem je, na dogodku, da je i-ti kandidat najboljši, to, da ga izberemo, istovetno s tem, da noben izmed kandidatov z indeksi $r, \dots, i-1$ ni bil izbran, tj. da je najboljši izmed prvih $i-1$ kandidatov med prvimi $r-1$ kandidati. Dobimo, da je

$$\begin{aligned}
P_r^n &= \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(i\text{-ti kandidat je najboljši in najboljši izmed prvih} \\
&\qquad\qquad i-1 \text{ kandidatov je med prvimi } r-1 \text{ kandidati}) \\
&= \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(\text{najboljši izmed prvih } i-1 \text{ kandidatov je med prvimi} \\
&\qquad\qquad r-1 \text{ kandidati} | i\text{-ti kandidat je najboljši}) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \mathbb{P}(i\text{-ti kandidat je najboljši}) \\
&= \sum_{i=r}^{n} \frac{r-1}{i-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{r-1}{n} \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{i-1} = \frac{r-1}{n} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$P_r^n = \begin{cases} \frac{r-1}{n} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i}, & \text{za } r \in \{2, \dots, n\} \\ 1/n, & \text{za } r = 1 \end{cases}.$$

Raziščimo odvisnost P_r^n od r. Naj bo $\diamond \in \{>, =\}$. Potem je za vse $r \in \{2, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned}
P_{r+1}^n \diamond P_r^n &\Leftrightarrow \frac{r}{n} \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond \frac{r-1}{n} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&\Leftrightarrow (r-1+1) \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond \left(1 + (r-1) \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i}\right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond 1.
\end{aligned}$$

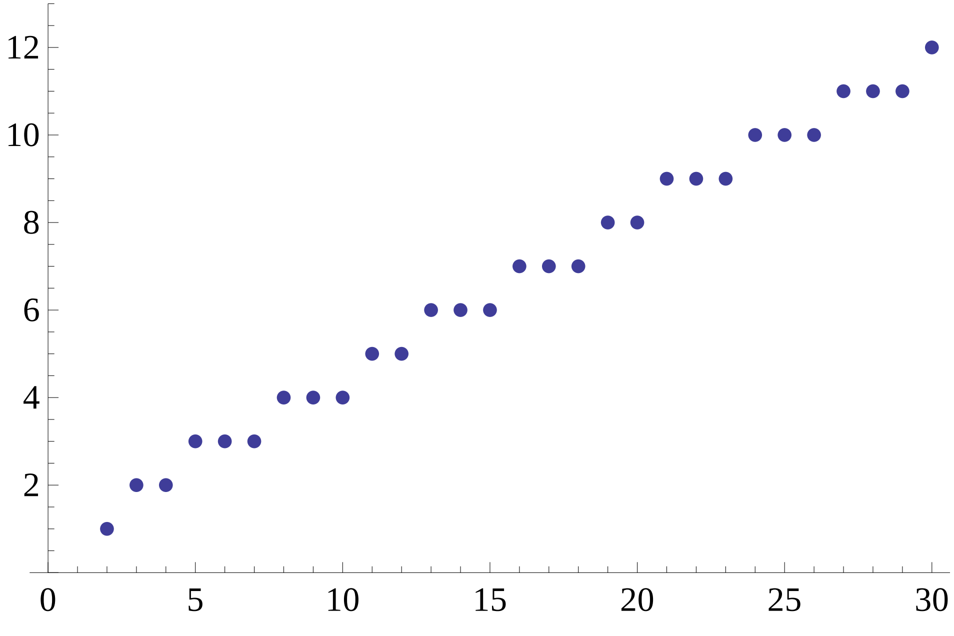
Ekvivalenca $P^n_{r+1} \diamond P^n_r \Leftrightarrow \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond 1$ velja tudi pri $r = 1$, saj je $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond \frac{1}{n} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \diamond 1$. Če povzamemo: za vse $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ velja $P^n_{r+1} > P^n_r$, če in samo če je $\sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} > 1$, in velja $P^n_{r+1} = P^n_r$, če in samo če je $\sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} = 1$.

Sedaj imamo, kot sledi. Za $n = 2$ sta optimalna r dva, $1 = r_2$ in 2, verjetnost zmage je $1/2$. Za $n > 2$ vsota

$$S_{n,r} := \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i}$$

ni enaka 1 za noben $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ (segmenti harmonične vrste se ne seštejejo v ena, razen prvega člena: glej [12, str. 157], [3]), strogo pada v r, je strogo večja od 1 za $r = 1$ in je enaka $\frac{1}{n-1}$ (torej strogo manjša od 1) za $r = n-1$. Sledi, da je edini optimalen r enak

$$\min\left\{r \in \{1, \ldots, n-1\} : \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} < 1\right\} = \min\left\{r \in \{1, \ldots, n-1\} : \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1\right\} = r_n.$$



Slika 1. Optimalen r_n kot funkcija n: raste, vsakič največ za 1.

Prvih nekaj vrednosti r_n s pripadajočimi optimalnimi verjetnostmi $P^n_{r_n} = P_n$ je zbranih v spodnji tabeli.

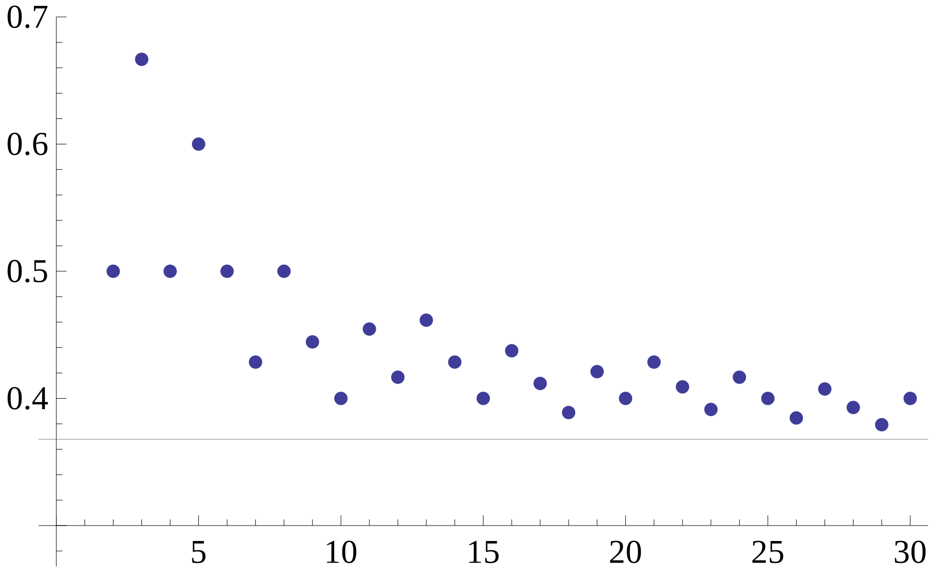
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_n	1	2	2	3	3	3	4	4	4
P_n	0,500	0,500	0,458	0,433	0,428	0,414	0,410	0,406	0,399

Končno raziščimo nekaj lastnosti optimalne rešitve in tako zaključimo dokaz trditve iz uvoda.

(A) Funkcija $\mathbb{N}_{\geq 2} \ni n \mapsto r_n$ narašča z n, vsakič največ za 1 (tj. $0 \leq r_{n+1} - r_n \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$). To sledi neposredno iz definicije r_n: vsota $S_{n,r}$ narašča v n in $S_{n+1,r+1} \leq S_{n,r}$.

(B) Funkcija $\mathbb{N}_{\geq 2} \ni n \mapsto P_n = P^n_{r_n}$ pada, strogo na $\mathbb{N}_{\geq 3}$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in označimo $r := r_n$. Velja $P_2 = 1/2 = P_3$; preveriti moramo še, da je $P_n > P_{n+1}$ za $n \geq 3$. V slednjem primeru je $r > 1$. Iz (A): $r_{n+1} = r$ ali pa $r_{n+1} = r + 1$. Naj bo najprej $r_{n+1} = r$. Pokazati moramo, da je $\frac{r-1}{n} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i} > \frac{r-1}{n+1} \sum_{i=r-1}^{n} \frac{1}{i}$, kar sledi iz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i} > \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} \right) \Leftarrow \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{1}{i} > 1,$$



Slika 2. Optimalno razmerje r_n/n kot funkcija n: konvergira k, in je strogo nad, e^{-1} (horizontalna linija).

in to je res po definiciji r_n. Naj bo sedaj $r_{n+1} = r+1$. Pokazati moramo, da je $\frac{r-1}{n}\sum_{i=r-1}^{n-1}\frac{1}{i} > \frac{r}{n+1}\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i}$, kar sledi iz

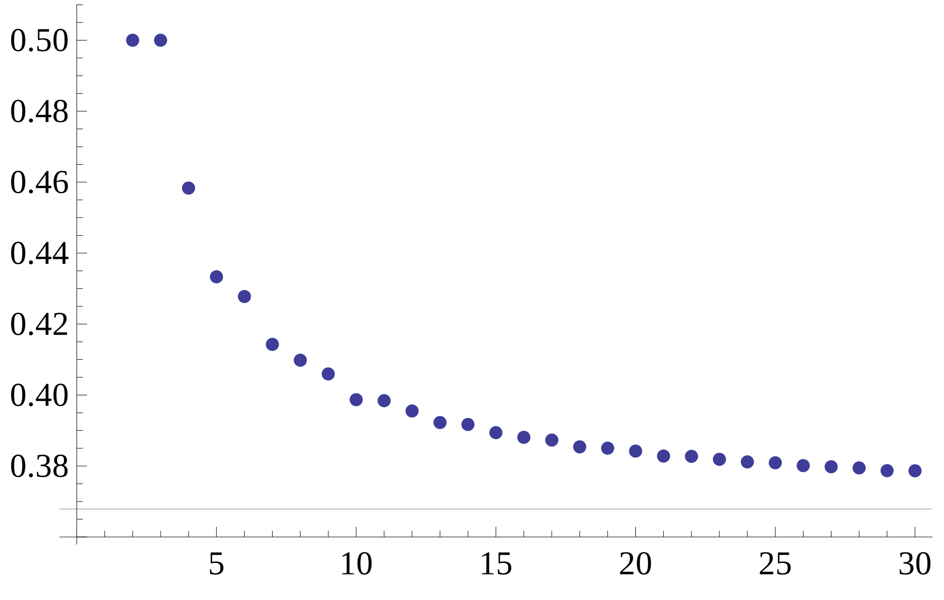
$$\frac{r-1}{n}\left(\frac{1}{r-1}+S_{n,r}\right) > \frac{r}{n+1}\left(S_{n,r}+\frac{1}{n}\right)$$
$$\Leftarrow \left(\frac{1}{n}-\frac{r}{n\,(n+1)}\right) > S_{n,r}\left(\frac{r}{n+1}-\frac{r-1}{n}\right) \Leftarrow 1 > S_{n,r},$$

in to je res po definiciji r_n.

(C) Imamo: $e^{-1} < r_n/n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Res, vsoto $S_{n,r} = \sum_{i=r}^{n-1}\frac{1}{i}$ moremo za $r \in \{1,\dots,n-1\}$ takole oceniti:

$$\ln\left(\frac{n}{r}\right) = \int_r^n \frac{dx}{x} \le S_{n,r} \le \int_r^n \frac{dx}{x-1} = \ln\left(\frac{n-1}{r-1}\right),$$

kjer razumemo $\ln(a/0) = \infty$ za $a > 0$. Ker po definiciji r_n velja $S_{n,r_n} \le 1$, sledi iz zgornje ocene, da je $\ln\left(\frac{n}{r_n}\right) \le 1$, torej $n/e \le r_n$. Po drugi strani za $r := \lceil\frac{n-1}{e}+1\rceil$ (tu je za $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x\rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \ge x\}$) velja $\ln\left(\frac{n-1}{r-1}\right) \le 1$ in zato iz zgornje ocene (če je le $r \le n-1$) $S_{n,r} \le 1$, od koder, spet po definiciji r_n sledi r_n, $r_n \le \lceil\frac{n-1}{e}+1\rceil$. Skratka, $n/e \le r_n \le \lceil\frac{n-1}{e}+1\rceil$



Slika 3. Optimalna verjetnost $P^n_{r_n}$ kot funkcija n: strogo pada na $\mathbb{N}_{\ge 3}$ proti e^{-1} (horizontalna linija).

in želena konvergenca optimalnega razmerja r_n/n sledi. Stroga neenakost $e^{-1} < r_n/n$ velja preprosto zaradi iracionalnosti e.

(D) $e^{-1} < P_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Konvergenca sledi iz (C), ker za $n > 2$ velja $P_{r_n}^n = \frac{r_n-1}{n}\sum_{i=r_n-1}^{n-1}\frac{1}{i}$ in ker po definiciji r_n velja $\sum_{i=r_n-1}^{n-1}\frac{1}{i} \to 1$ (saj $r_n \to \infty$ po (C)), ko gre $n \to \infty$. Da je $e^{-1} < P_n$, lahko potem ugotovimo iz (B).

Rezultate si naposled predstavimo še grafično: glej slike 1, 2 in 3.

LITERATURA

[1] A. B. Aries in A. N. Shiryaev, *Optimal stopping rules*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[2] J. N. Bearden, *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs*, Journal of Mathematical Psychology **50** (2006), 1, 58–59.

[3] H. Belbachir in A. Khelladi, *On a sum involving powers of reciprocals of an arithmetical progression*, Annales Mathematicae et Informaticae **34** (2007), 29–31.

[4] B. A. Berezovskiy in A. V. Gnedin, *Problemi najboljše izbire (v ruščini)*, Akademia Nauk USSR, 1984.

[5] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2012.

[6] F. R. Bruss, *Sum the odds to one and stop*, The Annals of Probability **28** (2000), 3, 1384–1391.

[7] E. B. Dynkin, *The optimum choice of the instant for stopping a Markov process*, Selected Papers of E. B. Dynkin with Commentary (A. A. Yushkevich, G. M. Seitz, in A. L. Onishchik, ur.), CWorks / American Mathematical Society, American Mathematical Society, 2000.

[8] T. S. Ferguson, *Who solved the secretary problem?*, Statistical Science **4** (1989), 3, 282–289.

[9] P. R. Freeman, *The secretary problem and its extensions: A review*, International Statistical review **51** (1983), 2, 189–206.

[10] J. P. Gilbert in F. Mosteller, *Recognizing the maximum of a sequence*, Journal of the American Statistical Association **61** (1966), 313, 35–73.

[11] M. Hlynka in J. N. Sheahan, *The secretary problem for a random walk*, Stochastic Processes and their Applications **28** (1988), 2, 317–325.

[12] P. Hoffman, *The man who loved only numbers: The story of Paul Erdos and the search for mathematical truth*, Hyperion Books, 1998.

[13] J. S. Rose, *A problem of optimal choice and assignment*, Operations Research **30** (1982), 1, 172–181.

[14] D. A. Sardelis in T. M. Valahas, *Decision making: A golden rule*, The American Mathematical Monthly **106** (1999), 3, 215–226.

[15] R. J. Vanderbei, *The postdoc variant of the secretary problem*, 2012, dostopno na: `www.princeton.edu/~rvdb/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf`, ogled: 5. 2. 2017.

NAKLJUČNO GIBANJE DELCEV NA NIHAJOČI MEMBRANI V CHLADNIJEVEM POSKUSU

IGOR GRABEC

Amanova d. o. o.
Tehnološki park, Ljubljana

PACS: 02.50.Ey, 02.60.-x, 05.40.Fb

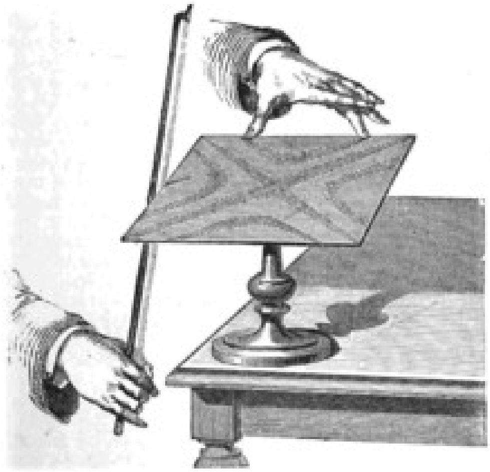
V prispevku je statistično okarakterizirano naključno poskakovanje kremenčevih kamenčkov na nihajoči membrani v Chladnijevem poizkusu. Posnetki trajektorij kažejo, da so skoki krožno porazdeljeni in naključni. Povprečna dolžina horizontalnega premika v skoku je približno sorazmerna amplitudi nihanja nad kritičnim nivojem in znaša okoli eno četrtino ustrezne višine skoka. Horizontalno premikanje delcev je opisano z modelom naključnega gibanja, ki ga poganjajo nihanja podlage. Numerični primeri kažejo dobro ujemanje med eksperimentalnimi in simuliranimi podatki.

RANDOM WALK OF PARTICLES ON A VIBRATING MEMBRANE OF CHLADNI EXPERIMENT

Bouncing of marble sand particles on a vibrating membrane of a Chladni experiment is statistically characterized in the article. Records of trajectories reveal that bounces are circularly distributed and random. The mean length of their horizontal displacement is approximately proportional to the vibration amplitude above the critical level and amounts about one fourth of the corresponding jump height. The horizontal drifting of particles is described by a model of vibration driven random walk. Numerically simulated examples yield a good agreement with experimental data.

Uvod

Nastajanje vzorcev zaradi gibanja peščenih delcev na nihajočih površinah je prvi omenil Robert Hook že leta 1680, vendar je preteklo celo stoletje, preden je Ernst Chladni (1756–1827) ta pojav uporabil za prikazovanje nihanja glasbenih inštrumentov [1, 2]. Njegove inovacije so nato pospešile razvoj znanosti o nihanjih in akustiki. Čeprav se Chladnijevo prikazovanje nihanj še vedno uporablja v proizvodnji in karakterizaciji glasbenih inštrumentov [2], sam pojav nastanka vzorca doslej še ni bil fizikalno zadovoljivo opisan. To je še posebej presenetljivo, ker je bilo poskakovanje delcev pogosto predmet raziskav kaotične dinamike in gibanja zrnatih snovi [3]. Zato je osnovni namen tega članka s poskusi in statistično analizo lastnosti gibanja delcev v Chladnijevem poskusu zapolniti to vrzel.



Slika 1. Nastanek Chladnijevega vzorca na nihajoči plošči. Povzeto iz: `en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni`.

Osnovne značilnosti Chladnijevega poskusa

Nepopolnost fizikalnega opisa gibanja delcev v Chladnijevem poskusu je posledica kompleksnosti njegove dinamike, ki zahteva upoštevanje kaotičnih pojavov, naključnih lastnosti oblike delcev, trkov z drugimi delci, izgubljanje energije zaradi trenja itd. Kljub temu pa lahko sklepamo, da se delci gibljejo v zaporednih skokih iz področij močnih nihanj v področja vozelnih linij, kjer je amplituda nihanja zanemarljiva [2]. Namen članka je podati argumente za to sklepanje na osnovi statistične karakterizacije poskakovanja, zato so tukaj raziskane in opisane lastnosti gibanja delcev na krožni nihajoči membrani. Naš končni cilj je opredelitev enostavnega modela za opis nastanka Chladnijevega vzorca. Zaradi poenostavitve obravnavamo primere z majhno gostoto delcev, pri katerih je dovolj, da raziščemo lastnosti gibanja posameznih delcev.

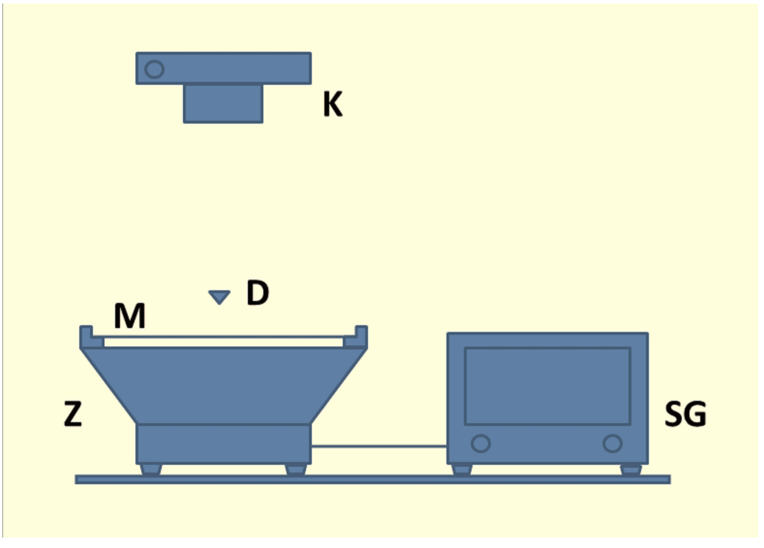
Slika 1 kaže oblikovanje Chladnijevega vzorca na nihajoči plošči, posuti s tanko plastjo peska. Chladni je vzbujal nihanje z drgnjenjem violinskega loka ob rob plošče, dandanes pa se za to uporablja predvsem električno vzbujanje, na primer z zvočnikom.

Chladnijevi poskusi so običajno izvedeni s peščenimi delci naključnih oblik. Zato je razvoj Chladnijevega vzorca naključen proces in v skladu s tem najprej opišemo njegove lastnosti statistično z eksperimentalnimi podatki. Poskakovanje splošno vključuje vertikalne in horizontalne premike. Slednji so pomembni za oblikovanje Chladnijevega vzorca, zato v nadaljevanju raziščemo samo njihove lastnosti.

Dinamika poskakovanja vključuje metanje delcev z nihajoče površine z vertikalnim pospeškom $a(\mathbf{r}) = \omega^2 z(\mathbf{r})$, kakor tudi prosto padanje s pospeškom g. Pri tem je ω krožna frekvenca in $z(\mathbf{r})$ amplituda nihanj na položaju s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$. Poskakovanje se dogaja nad kritično amplitudo $z_c = g/\omega^2$, kjer pospešek $a(\mathbf{r})$ preseže gravitacijskega. Zato uporabimo za opis poskakovanja relativno amplitudo pospeška: $A(\mathbf{r}) = [a(\mathbf{r}) - g]/g$, ki je enaka relativni amplitudi nihanja nad z_c : $A(\mathbf{r}) = z(\mathbf{r})/z_c - 1$. Poskakovanje obstaja, če je $A > 0$. Ob vozelnih linijah je $A < 0$ in poskakovanje, vzbujeno v območju z $A > 0$, tam preneha.

Poskusi in analiza

Sistem za izvedbo poskusov je prikazan na sliki 2. Poskakovanje delcev povzroča nihanje krožne membrane s polmerom $r_o = 152$ mm, debelino 1 mm, gostoto 1134 kg/m^3 in horizontalno napetostjo 0,194 N/mm. Membrana je vpeta horizontalno v okvir, pritrjen na ohišje zvočnika. Njen prvi osnovni način nihanja s frekvenco $f = 36{,}8$ Hz vzbuja zračni tlak iz zvočnika, ki ga poganja sinusna napetost iz signalnega generatorja. Radialno odvisnost amplitude nihanj opišemo z izrazom $z(\mathbf{r}) = z_o J_o(2{,}4r/r_o)$, pri čemer je z_o amplituda pri $r = 0$ in J_o Besselova funkcija s prvo ničlo pri 2,4. Amplituda napetosti generatorja je nastavljena tako, da je kritična amplituda odmika membrane $z_c = 0{,}18$ mm pri kritičnem radiju $r_c = 95$ mm. V tem primeru



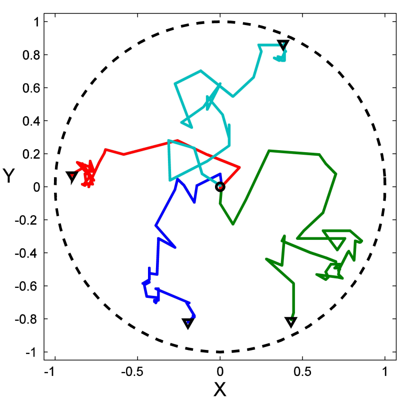
Slika 2. Shema eksperimentalnega sistema. SG – signalni generator, Z – zvočnik, M – membrana, D – delec, K – kamera.

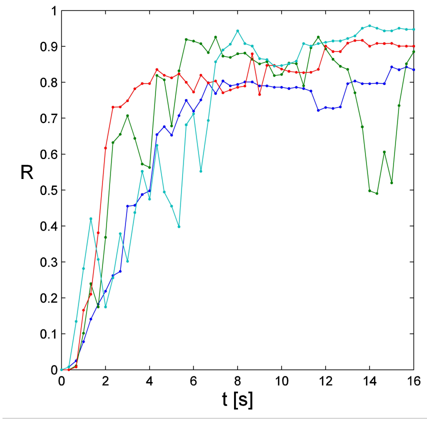
je $z_o = 2z_c$ in območje relativne amplitude $-1 \leq A \leq 1$.

Testno množico delcev tvori $N = 30$ kremenčevih kamenčkov z obliko podobno tetraedru. Porazdelitev višine χ je približno normalna s srednjo vrednostjo $\langle\chi\rangle = 1{,}55$ mm in standardno deviacijo $\Delta\chi = 0{,}38$ mm. V poskusih opazujemo poskakovanje posameznih delcev, ki jih položimo v center mirujoče membrane in nato vzbudimo nihanje. Trajektorije delcev posnamemo s fotografsko kamero v časovnih razmikih $\delta t = 1/3$ s. Celotni posnetek trajektorije tvori 45 slik, posnetih v času 15 s. Iz vzorčne množice posnetkov vektorjev horizontalnega položaja $\{r_n(\tau); 1 \leq n \leq 30,\ 1 \leq \tau \leq 45\}$ določimo ustrezne relativne radije $R_n(\tau) = r_n(\tau)/r_c$, amplitude $A_n(\tau)$, premike $\mathbf{s}_n(\tau) = \mathbf{r}_n(\tau+1) - \mathbf{r}_n(\tau)$ pri $t = (\tau - 1)\delta t$ in vektorje normaliziranega premika $\mathbf{S}_n(\tau) = \mathbf{s}_n(\tau)/r_c$. Srednje vrednosti $\langle\ldots\rangle = \sum_n(\ldots)/N$ in standardne deviacije $\Delta(\ldots) = [\mathrm{Var}(\ldots)]^{1/2}$ [4, 5] spremenljivk R, A ter S so osnovne karakteristike pojava poskakovanja delcev.

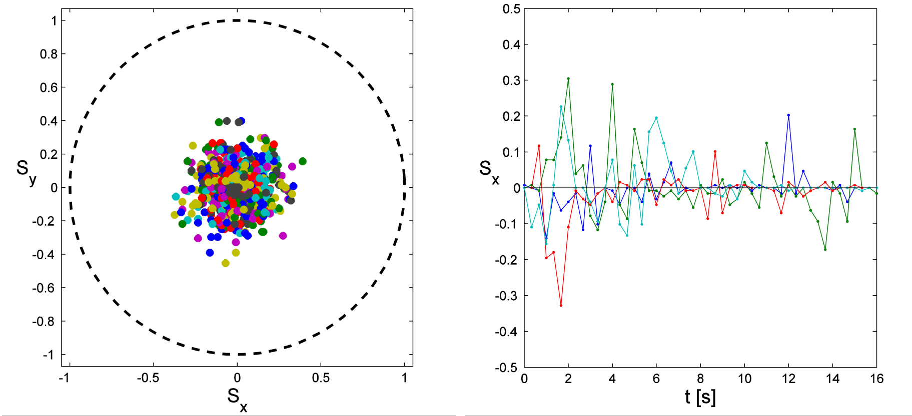
Slika 3 levo kaže štiri vzorce trajektorij od $r = 0$ k r_c, slika 3 desno pa časovno odvisnost ustreznega relativnega radija $R = r/r_c$. Obe sliki nakazujeta naključnost in trend poskakovanja.

Slika 4 levo kaže porazdelitev vseh izmerjenih vrednosti normaliziranega premika S ob različnih časih, slika 4 desno pa časovno odvisnost njegove x-komponente S_x vzorcev iz slike 3 levo. Osnovne lastnosti S_x so prikazane na sliki 5. Slika 5 levo nakazuje, da so vrednosti S_x približno simetrično porazdeljene okoli 0 pri dani vrednosti amplitude A, širina porazdelitve pa narašča z A. Povezavo med standardno deviacijo ΔS_x in srednjo vrednostjo $\langle A\rangle$ vseh delcev kaže slika 5 desno. Ustrezna regresijska premica $\Delta S_x = \kappa\langle A\rangle$ s $\kappa \approx 0{,}16$ nakazuje, da je širina porazdelitve približno sorazmerna s

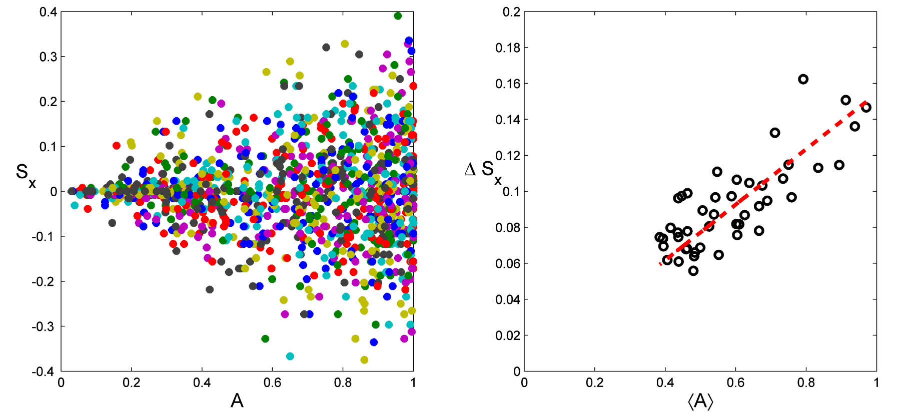




Slika 3. Levo: Štirje vzorci posnetkov trajektorij delcev; črtkani krog ima radij r_c. Desno: Časovna odvisnost relativnega radija $R(t) = r/r_c$ trajektorij iz slike 3 levo.



Slika 4. Levo: Porazdelitev vseh izmerjenih normaliziranih vektorjev premika $\mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n/r_c$. Desno: Časovna odvisnost komponente S_x, določena iz vzorcev trajektorij na sliki 3 levo.

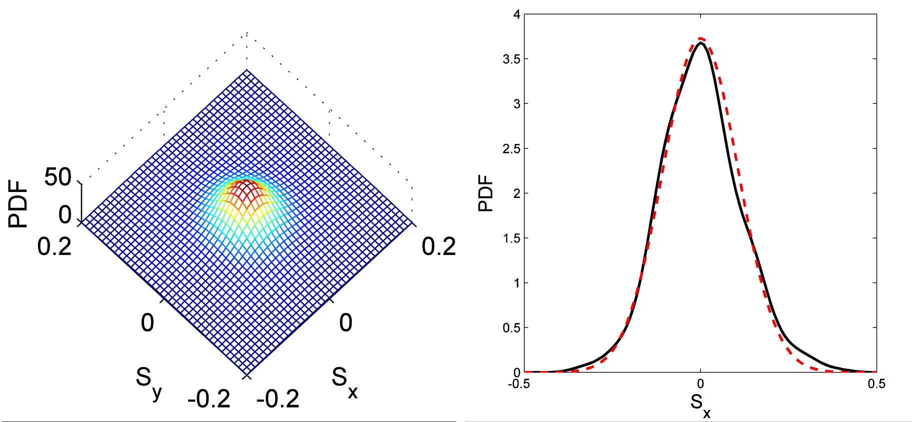


Slika 5. Levo: Povezava med izmerjenimi S_x in relativno amplitudo $A = z/z_c - 1$ na mestu skoka. Desno: Povezava standardne deviacije ΔS_x s srednjo vrednostjo $\langle A\rangle$; ustrezna regresijska premica je prikazana črtkano.

povprečno amplitudo $\langle A\rangle$ [5].

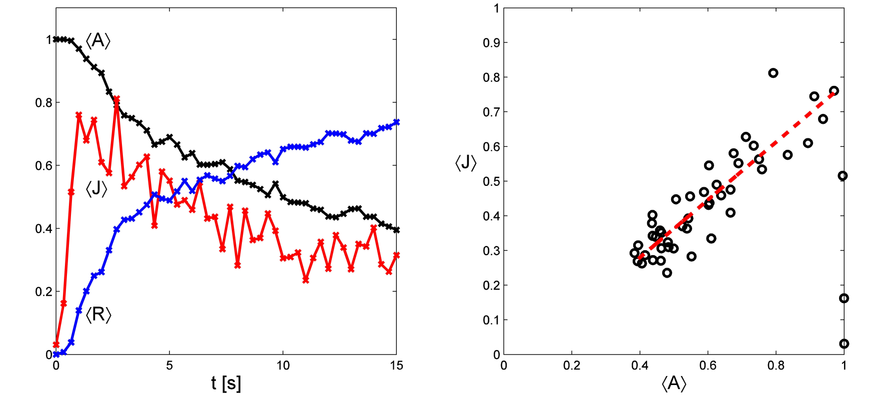
Gostota porazdelitve verjetnosti (GPV), določena s Parzenovo cenilko [4, str. 99; 5, str. 31] iz podatkov S_n na sliki 4 levo, je prikazana na sliki 6 levo. Normalna porazdelitev, centrirana na merskih podatkih, je uporabljena kot jedro cenilke; njena širina je podana s $\sigma = 2\Delta S/[N]^{1/2}$, kjer je ΔS standardna deviacija absolutnih vrednosti $S_n = |\mathbf{S}_n(\tau)|$. Porazdelitev na sliki 6 levo je centralno simetrična in odvisna samo od absolutne vrednosti S. Prikazana GPV ni normalna, ker je izračunana iz celotne množice vzorcev premika, v kateri so prevladujoči majhni premiki blizu kritičnega radija. Če ocenimo GPV samo iz vzorcev v območjih s približno enako amplitudo A, pa dobimo normalno porazdelitev. Polna črta na sliki 6 desno kaže GPV spremenljivke S_x, določene iz vzorcev, posnetih v času od 2 s do 6 s, medtem ko kaže črtkana linija normalno (Gaussovo) porazdelitev [4, str. 99; 5, str. 186], določeno z ustrezno srednjo vrednostjo in standardno deviacijo S_x.

Za karakterizacijo trajektorij je smiselno izraziti premik $\mathbf{S}$ med dvema zaporednima posnetkoma glede na kritični radij r_c kot $\mathbf{S} = \mathbf{s}/r_c$, za opis poskakovanja pa ga je bolje izraziti glede na kritično amplitudo z_c in premik, ki se zgodi med enim nihajem. Zato vektor $\mathbf{s}$ delimo s številom nihajev med dvema posnetkoma $\delta N = f\delta t = 12{,}3$ in z_c, da dobimo $\mathbf{J} = \mathbf{s}/(\delta N z_c)$. Ta vektor pomeni skoke delcev med posameznimi nihaji relativno glede na z_c. Ker je vektor $\mathbf{J}$ sorazmeren $\mathbf{S}$, sovpadajo lastnosti njegove GPV s tistimi, ki so prikazane na sliki 6. Nadalje raziščemo še vpliv amplitude A na absolutno vrednost normaliziranega premika $J = |\mathbf{J}|$. Dodatne podatke o lastnostih poskakovanja dobimo tako, da obravnavamo točko membrane, kjer vertikalni premik $z(r,t) = z(r)\sin(\omega t)$ preide kritično vrednost z_c in vrže delec. Iz ustreznega faznega kota $\phi = \arcsin[z_c/z(r)] = \arcsin[1/(1+A)]$ in vertikalne hitrosti $v = \omega z(r)\cos(\phi)$ dobimo za relativno višino skoka $H = (z_c + v^2/2g)/z_c$, nato izraz $H = [1 + (1+A)^2]/2$, ki opisuje vpliv relativne amplitude nihanja A na poskakovanje. S to formulo in podatki na sliki 7 levo določimo $\langle H\rangle$, $\langle J\rangle$, in $\langle J\rangle/\langle H\rangle$ kot funkcije časa, ki so prikazane



Slika 6. Levo: Gostota porazdelitve verjetnosti (GPV) vektorja $\mathbf{S}$, določena iz vzorcev na sliki 4 levo. Desno: GPV komponente S_x, določena iz vzorcev v časovnem intervalu od 2 s do 6 s (polna črta), in normala porazdelitev z ustrezno $\langle S_x\rangle$ in ΔS_x (črtkano).

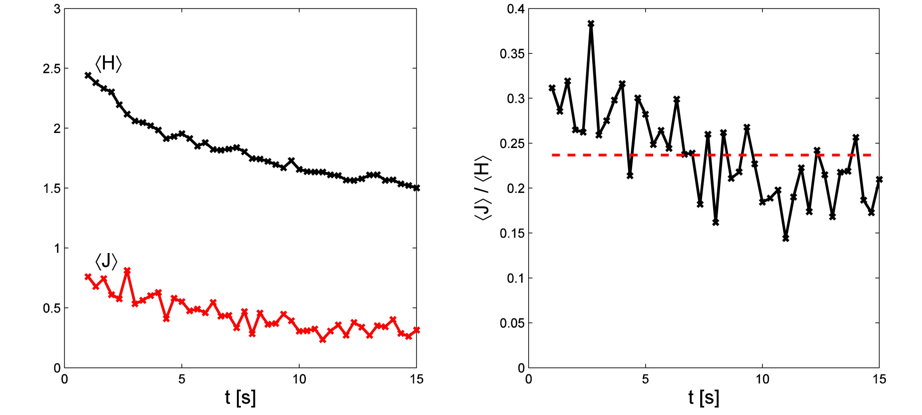
na sliki 8. Na sliki 8 desno označuje črtkana linija povprečno vrednost razmerja $\langle J\rangle/\langle H\rangle$ glede na čas; njena vrednost $\approx 0{,}24$ pa kaže, da poskakovanje poteka pretežno v vertikalni smeri, kakor je opredeljeno z višino skoka $\langle H\rangle$, medtem ko je horizontalni premik $\langle J\rangle$ v primerjavi z njo sorazmerno majhen in zato pomeni šibko naključno komponento skoka z normalno GPV. Ta lastnost nas v nadaljevanju vodi do poenostavljenega opisa razvoja Chladnijevega vzorca z modelom naključnega gibanja.



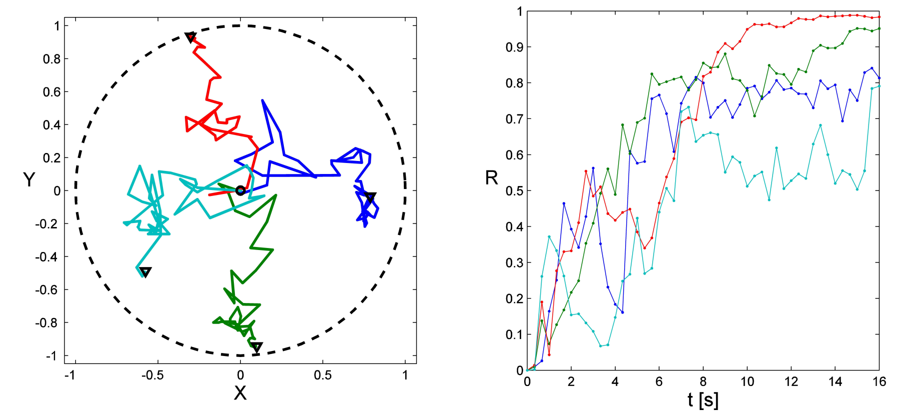
Slika 7. Levo: Odvisnost srednjih vrednosti $\langle R\rangle$, $\langle J\rangle$ in $\langle A\rangle$ od časa t. Desno: Povezava med $\langle J\rangle$ in $\langle A\rangle$ (krožci) ter regresijska premica $\langle J\rangle = 0{,}83\ \langle A\rangle - 0{,}05$ (črtkano). Tri točke pri $\langle A\rangle \approx 1$ ustrezajo začetni vzbuditvi in niso vključene v oceno regresijske premice.

Model in numerična simulacija

Pri opisu modela obravnavamo poskakovanje delcev na nihajoči membrani in privzamemo, da je absolutna vrednost horizontalnega premika normalno porazdeljena s povprečno vrednostjo $\langle J\rangle = K\langle A\rangle$. Tu je naklonski koeficient K edini parameter, s katerim prilagodimo model k eksperimentalnim podatkom. Komponenti premika x in y sta numerično simulirani z normalnim (Gaussovim) generatorjem naključnih števil ob uporabi iste vrednosti $[2/\pi]^{1/2}\langle J\rangle$ za obe standardni deviaciji ΔJ_x in ΔJ_y. Rezultati numerične simulacije so prikazani na slikah 9, 10 in 11, ki ustrezajo slikam 3, 4 in 7. Statistične karakteristike simuliranih spremenljivk se ujemajo z eksperimentalno določenimi do vrednosti razlik, ki so odvisne od začetne vrednosti generatorja naključnih števil. Dokaj dobro ujemanje med eksperimentalnimi in numeričnimi podatki kaže, da so glavne značilnosti oblikovanja Chladnijevega vzorca precej izčrpno opisane s tukaj vpeljanim modelom naključnega gibanja delcev, povzročenega z nihanjem membrane.



Slika 8. Levo: Povprečna relativna višina skoka $\langle H\rangle$ in povprečni normalizirani horizontalni premik v enem nihaju $\langle J\rangle$ v odvisnosti od časa t. Desno: Odvisnost razmerja $\langle J\rangle/\langle H\rangle$ od časa t; črtkana linija kaže povprečno vrednost razmerja $\langle J\rangle/\langle H\rangle \approx 0{,}24$.

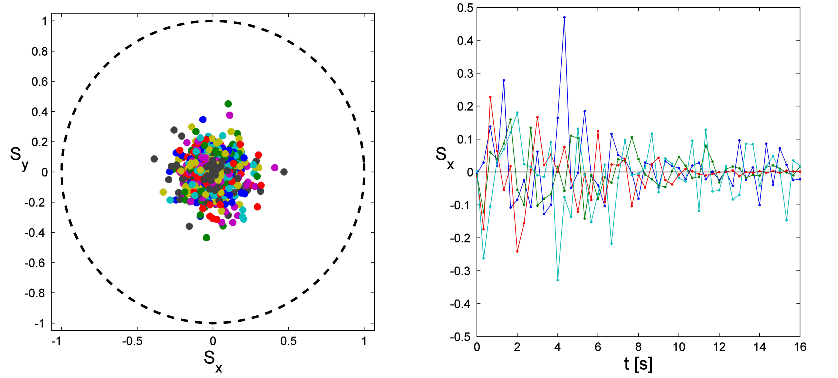


Slika 9. Levo: Štirje vzorci simuliranih trajektorij. Desno: Časovna odvisnost relativnega radija $R = r/r_c$.

Za konec

Dokaj dobro ujemanje med karakteristikami eksperimentalnih in numerično simuliranih podatkov kaže, da je poskakovanje delcev med oblikovanjem Chladnijevega vzorca možno obravnavati kot primer Markovskega procesa, za katerega je značilno, da je verjetnost prehoda v naslednje stanje odvisna samo od trenutnega stanja in z njim povezanega položaja.

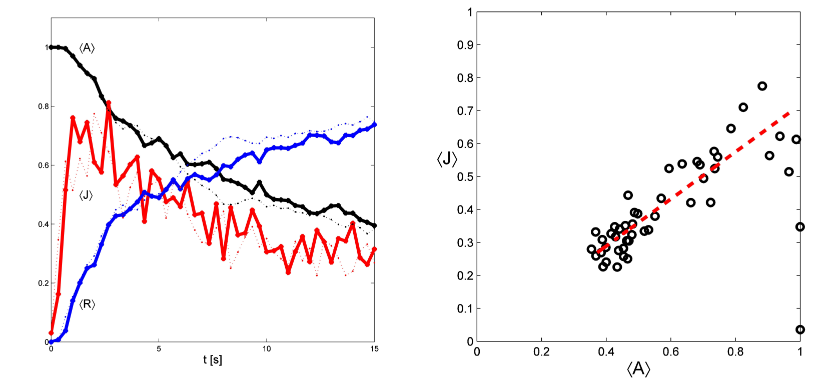
Opisana analiza je osnovana na ponovljenih opazovanjih gibanja posa-



Slika 10. Levo: Porazdelitev simuliranih normaliziranih vektorjev premika $\mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n / r_c$. Desno: Časovna odvisnost komponente S_x, določena iz vzorcev na sliki 9 levo.

meznih delcev, vendar je za opis razvoja Chladnijevega vzorca zelo primerno tudi obravnavanje gostote mnogo prisotnih delcev. Za ta namen je možno izvesti prehod od naključnega gibanja k difuzijskemu procesu, pri katerem je difuzijski koeficient odvisen od amplitude nihanja oziroma položaja.

Kljub našim ugodnim rezultatom numeričnega simuliranja gibanja delcev je izvor naključja v Chladnijevem eksperimentu ostal neopredeljen, čeprav ga je možno simulirati z generatorjem naključnih števil. V zvezi s tem



Slika 11. Levo: Polne črte – karakteristike simuliranega procesa: odvisnost $\langle R\rangle$, $\langle J\rangle$ in $\langle A\rangle$ od časa t. Črtkane linije – karakteristike eksperimentalnega procesa. Desno: Povezava med $\langle J\rangle$ in $\langle A\rangle$ pri numerično simuliranem procesu (krogci) in ustrezna regresijska premica (črtkano). Tri točke pri $\langle A\rangle \approx 1$ ob vzbuditvi poskakovanja niso upoštevane pri oceni regresijske premice.

omenimo, da je možno kaotične lastnosti poskakovanja kroglic v nekaterih primerih teoretično pojasniti z nelinearno dinamiko [3]. Naš dodatni eksperiment s kovinskimi kroglicami premera nad 2 mm je pokazal, da kroglice poskakujejo pretežno vertikalno na istem mestu, medtem ko se izrazito horizontalno premikanje opazi predvsem pri kroglicah s premerom ≈ 1 mm. Ali je horizontalno gibanje takšnih majhnih kroglic posledica valov, ki jih kroglice same vzbujajo na membrani, je še vedno neznano. Neodvisno od te nejasnosti pa lahko domnevamo, da je v našem primeru naključni značaj poskakovanja predvsem posledica neregularne oblike delcev. Novejše raziskave poskakovanja neokroglih delcev so pokazale [6], da je pri njih opazno več načinov kaotičnega gibanja v vertikalni, kakor tudi v horizontalni smeri. Razni načini, kot na primer kotaljenje, obračanje in drsenje, so bili tudi opaženi v naših poskusih pri kritičnem radiju, vendar niso bistveno vplivali na karakteristike poskakovanja [7].

Glede na navedene lastnosti poskakovanja delcev na nihajočih površinah in neopredeljenost izvora naključja je dokaj presenetljivo, da lahko s tukaj opisanim preprostim modelom naključnega gibanja, ki vključuje en sam prilagodljiv parameter K, tako dobro opišemo premikanje poskakujočih delcev med oblikovanjem Chladnijevega vzorca.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje Matjažu Mikliču in Tomažu Klincu za sodelovanje pri pripravi tega članka.

LITERATURA

[1] E. F. F. Chladni, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, Leipzig, 1787, dostopno na: `en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni`, ogled: 11. 4. 2017.

[2] U. Smilansky in H.-J. Stöckmann, *Nodal Patterns in Physics and Mathematics – From Chladni's Seminal Work to Modern Applications – A Historic-Scientific Perspective*, EU Phys. J. ST, 2007, str. 145.

[3] A. J. Lichtenberg in M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New York, 1983.

[4] I. Grabec in W. Sachse, *Synergetics of Measurements, Prediction and Control*, Springer, Berlin, 1997.

[5] I. Grabec in J. Gradišek, *Opis naključnih pojavov*, UL Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2014.

[6] S. Dorbolo, D. Volfson, L. Tsimring in A. Kudrolli, *Dynamics of a Bouncing Dimer*, Phys. Rev. Lett., 95, 2005, 044101.

[7] I. Grabec, *Vibration driven random walk in a Chladni experiment*, Physics Letters A, 381, 59–64, 2017.

RAČUNANJE KVARTILOV V ELEMENTARNI STATISTIKI

JANEZ ŽEROVNIK

Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Uvod

Definicija kvartilov se v teoriji verjetnosti nanaša na pojem porazdelitve verjetnosti, v statistiki pa se seveda hitro vprašamo, kdaj in kako lahko iz vzorca ocenimo kvartile porazdelitve. Pri vpeljavi osnovnih pojmov statistike na ravni osnovne in srednje šole abstraktnega pojma porazdelitve seveda ne moremo vpeljati, uporabljamo pa elementarne definicije za posebne primere, kar je eden od razlogov za nejasnosti, saj je končno množico vrednosti mogoče razumeti na različne načine: na primer kot diskretno porazdelitev z natanko temi danimi vrednostmi in enakimi verjetnostmi ali pa kot vzorec neke splošne in neznane porazdelitve. Naprej, iz končno mnogo podatkov lahko v nekaterih praktičnih primerih sklepamo, da gre za vzorec, ki smo ga dobili z nekaj realizacijami zvezne slučajne spremenljivke, v drugih primerih lahko verjamemo, da slučajna spremenljivka zavzame samo končno mnogo vrednosti, morda celo samo tiste, ki so že v dani množici podatkov, če omenimo samo dva primera.

Verjetno ni treba posebej utemeljevati, da morajo kvartili imeti naslednji dve lastnosti:

1. kvartili razdelijo elemente na štiri približno enake dele;
2. prvi in tretji kvartil sta mediani spodnje in zgornje polovice.

Seveda je treba tudi mediano nedvoumno definirati, prav tako je treba pojasniti pojem »polovic«, še zlasti pri lihem številu elementov. Pri definiciji kvartilov sta gotovo zaželeni vsaj še naslednji dve lastnosti:

3. vrednosti kvartilov so enake na podvojenih podatkih (če vsak element podvojimo in dobimo množico z $2n$ elementi, so vrednosti novih kvartilov enake prejšnjim);

4. definicija za končne množice podatkov in definicija za zvezne porazdelitve sta posebna primera splošne definicije (če je končna množica vzorec neke splošne porazdelitve, potem so kvartili na vzorcu dobri približki za kvartile te porazdelitve pri predpostavki, da je vzorec nastal kot realizacija neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in da kvartil res obstaja ter je enolično določen).

Kvartili so poseben primer centilov (ali percentilov) in oboji poseben primer kvantilov [2, 11]. Čeprav je prava definicija kvantilov in s tem centilov za diskretno porazdelitev (in enaka definicija za končno množico podatkov) jasna [2] in je na prvi pogled edino smiselno definirati kvartile z ustreznimi kvantili, v literaturi in praksi pri metodah za računanje kvartilov vlada precejšnja zmešnjava.[1] Statistiki uporabljajo različne metode za računanje kvartilov. Videti je, da te približne metode računanja nekateri razumejo kot definicije. Nejasnost se na žalost prenaša tudi na vpeljavo teh osnovnih pojmov v elementarni statistiki [10, 4, 3]. Zadrega je precej hujša, kot je videti na prvi pogled in kot večina misli. (Ali, kot pravi Langford [4]: »The situation is, I believe, far worse than most realize.«) Langford v članku [4] navaja sedem različnih metod in še nekaj na videz drugih, ki so ekvivalentne kateri od prvih sedem. Implementacije v splošno uporabljanih kalkulatorjih in programju (MINITAB, SAS, Mathematica, JMP, Microsoft Excel) dodajo še pet dodatnih metod. Različne metode dajejo na majhnih primerih različne rezultate in ker, kot zapisano, nekateri te metode razumejo kot definicije kvartilov, je zmešnjava popolna. Langford si predstavlja študenta, ki s svojim računalom, na fakulteti priporočenim statističnim programskim orodjem, in z računanjem »peš« dobi vsakič drugačen rezultat! V Sloveniji so bili osnovni pojmi statistike vpeljani v osnovne in srednje šole ob uvedbi devetletne osnovne šole in s tem povezani prenovi učnih načrtov [6, 5]. Na žalost v veljavnih učbenikih [1, 8, 9] najdemo različne metode za računanje

[1] Definicija (enačba 29.1 na strani 195 v [2]) kvantilov ne določa enolično, od koder deloma izhaja zmeda, o kateri govori ta članek.

kvartilov in ker manjkajo formalne definicije, je videti, kot da so te približne metode eksaktne, s čimer sta implicitno vpeljani vsaj dve problematični (da ne uporabimo besede napačni) definiciji kvartilov [1, 8, 9]. Na maturitetni komisiji smo nedavno dobili vprašanje zaskrbljene matere dvojčic, ki sta v osnovni šoli in na gimnaziji opazili različne metode z različnimi rezultati. Kaj je pravilno?

V nadaljevanju bomo definirali kvartile, najprej za splošno in potem še za diskretne porazdelitve s končno zalogo vrednosti. V primeru enakomerne diskretne porazdelitve s končno zalogo vrednosti lahko enakovredno govorimo o kvantilih končne množice, torej o nalogi, ki se obravnava v srednji in osnovni šoli. Potem bomo opisali dve metodi iz naših učbenikov in podobno metodo, ki računa prave vrednosti. Ker je zadnja metoda malenkost bolj zapletena kot prvi dve, v nadaljevanju opišemo še tri ekvivalentne metode, ki računajo prave vrednosti kvartilov in so morda primerne za vpeljavo v osnovni šoli, zagotovo pa niso preveč zahtevne za obravnavo v srednji šoli.

Definicija kvartilov

Definicija kvartilov (in kvantilov) za porazdelitve s porazdelitveno funkcijo je nesporna. q-ti kvantil je enolično določen, če ima enačba $F(x_q) = q$ natanko eno rešitev. V primeru, ko je slučajna spremenljivka zvezna in ima gostoto p, lahko enačbo zapišemo v obliki $F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} p(t)dt = q$ in lahko se zgodi, da enačba nima enolične rešitve. Če je slučajna spremenljivka diskretna, potem je F stopničasta in enačba $F(x_q) = q$ praviloma ne bo enolično rešljiva. Kvantili torej v nekaterih primerih niso enolično določeni, ali drugače zapisano, obstaja več vrednosti, ki ustrezajo definiciji takega kvantila. Ker želimo obravnavo ohraniti na ravni elementarne matematike, se bomo namesto splošnih kvantilov tu omejili na kvartile in centile. Zato zapišimo, da je i-ti **centil** vsako število P_i, za katero velja $\int_{-\infty}^{P_i} p(x)dx = i/100$. (Torej centili niso nujno enolično določeni.) Kvartili so seveda 25., 50. in 75. centil, torej **prvi kvartil** $Q_1 = P_{25}$, **drugi kvartil** $Q_2 = P_{50}$, **tretji kvartil** $Q_3 = P_{75}$.

Zapisana definicija temelji na porazdelitveni funkciji $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$, ki jo lahko definiramo tudi za diskretne porazdelitve. Zato lahko uporabimo isto definicijo tudi na diskretnih porazdelitvah. A ker, kot že prej omenjeno, pri tem v praksi vlada kar precej zmede, bomo tu posebej zapisali, kako lahko enakovredno definicijo centilov v primeru diskretne porazdelitve, ki ima končno mnogo vrednosti, zapišemo v preprostejšem jeziku. Dana je končna množica elementov (podatkov, meritev) $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$. Predpostavimo, da je urejena v nepadajoče zaporedje v_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, torej da velja $v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \cdots \leq v_n$. Naj bo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. i-ti **centil** P_i je vrednost, za katero velja, da je vsaj i odstotkov elementov manjših ali enakih P_i in da je vsaj $100 - i$ odstotkov elementov večjih ali enakih P_i. (Torej vrednost P_i ni nujno enaka enemu od elementov iz množice $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$.)

Očitno velja naslednje: če $i\frac{n}{100}$ ni celo število, potem za neki k, $1 \leq k \leq n$, lahko zapišemo $\lfloor i\frac{n}{100} \rfloor = k - 1 < i\frac{n}{100} < \lceil i\frac{n}{100} \rceil = k$, tako da je $k - 1$ manj, k pa več kot i odstotkov od n. (In seveda, $n - k$ je manj, $n - k + 1$ pa več kot $100 - i$ odstotkov od n.) V tem primeru je v skladu z zgornjo definicijo $P_i = v_k$.

Če je $k = i\frac{n}{100}$ naravno število, potem je v množici prvih k elementov natanko i odstotkov elementov množice. (In seveda, $n-k$ je natanko $100-i$ odstotkov od n.) Vsako število med v_k in v_{k+1} torej ustreza definiciji P_i.

V drugem primeru je smiselna naslednja definicija: **Kanonična vrednost** centila je $\bar{P}_i = \frac{v_k + v_{k+1}}{2}$. V posebnih primerih je morda mogoče zagovarjati drugačno izbiro vrednosti med $v_k < v_{k+1}$, torej ni nujno, da za centil vedno vzamemo njegovo kanonično vrednost.

Kvartili so posebni primeri centilov, zato kot prej definiramo: $Q_1 = P_{25}$, $Q_2 = P_{50}$, $Q_3 = P_{75}$.

Pri definiciji **mediane** ni dvoma, v vseh znanih virih je mediana definirana kot kanonična vrednost petdesetega centila (ali, enakovredno, drugega kvartila): za $n = 2k + 1$ je $M = P_{50} = v_{k+1}$, za $n = 2k$ pa $M = P_{50} = \frac{v_k + v_{k+1}}{2}$.

Zgledi: Po definiciji izračunajmo kvartile za naslednje štiri množice velikosti $n = 9, 10, 11, 12$ in jih poimenujmo Zgled 1–4. Vrednosti kvartilov so zapisane krepko. V primeru, ko je kvartil na sredini med dvema elementoma, sta krepko zapisani obe vrednosti.

1. $n = 9$: 12, 15, $\boxed{\mathbf{22}}$, 23, $\boxed{\mathbf{25}}$, 44, $\boxed{\mathbf{46}}$, 51, 59

   $Q_1 = 22$, $Q_2 = M = 25$, $Q_3 = 46$.

2. $n = 10$: 12, 15, $\boxed{\mathbf{22}}$, 23, $\boxed{\mathbf{25,\ 26}}$, 44, $\boxed{\mathbf{46}}$, 51, 59

   $Q_1 = 22$, $Q_2 = M = 25{,}5$, $Q_3 = 46$.

3. $n = 11$: 12, 15, $\boxed{\mathbf{22}}$, 23, 24, $\boxed{\mathbf{25}}$, 26, 44, $\boxed{\mathbf{46}}$, 51, 59

   $Q_1 = 22$, $Q_2 = M = 25$, $Q_3 = 46$.

4. $n = 12$: 12, 15, $\boxed{\mathbf{22,\ 23}}$, 24, $\boxed{\mathbf{25,\ 26}}$, 44, $\boxed{\mathbf{46,\ 51}}$, 59, 88

   $Q_1 = 22{,}5$, $Q_2 = M = 25{,}5$, $Q_3 = 48{,}5$.

Metode v naših učbenikih in Langfordova metoda

V tem razdelku bomo opisali tri metode za računanje kvartilov, ki delujejo tako, da izračunamo mediani na polovici podatkov. Prvi dve metodi sta med najpogosteje uporabljanimi, tretjo pa je predlagal Langford [4] zato, ker prvi dve, tako kot še nekatere druge zgoraj omenjene, ne dajejo pravilnih rezultatov na majhnih množicah podatkov. Vse tri metode (tu jih bomo imenovali M1, M2 in M3) so si zelo podobne, razlikujejo se samo v koraku 2(b), a bomo zaradi nedvoumnosti vse tri postopke zapisali v celoti.

Metoda 1 (M1) je uporabljena v učbeniku [9], sodeč po zgledu na strani 172. Prej je na strani 166 [9] samo zapisano, da je prvi kvartil mediana prve polovice podatkov, tretji kvartil pa mediana druge polovice podatkov, kaj je prva in kaj druga polovica podatkov v primeru lihega števila, ni nikjer definirano. Podobno tudi vir [1] ne pove, kako obravnavati primer z liho mnogo podatki, na zgledu z 11 elementi mediana (pravilno) ni upoštevana, drugega primera z liho mnogo podatki ni.

Metoda M1

1. Izračunamo mediano.
2. Razdelimo podatke na dve podmnožici, v prvi so vsi elementi, ki so manjši od mediane, v drugi polovici so vsi elementi, ki so večji od mediane,

   natančneje:

   (a) če je $n = 2k$, potem je $M = \frac{v_k+v_{k+1}}{2}$ in $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$.

   (b) če je $n = 2k+1$, potem je $M = v_k$ in $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$, $V_2 = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$, torej mediane ne štejemo k nobeni od polovic.
3. Prvi kvartil je mediana spodnje, tretji kvartil pa mediana zgornje polovice podatkov.

Metoda 2 (M2) je uporabljena v učbeniku [8], kjer je zapisano, da mediano moramo šteti k obema polovicama podatkov. Enako je v priporočilu [6], kjer je v opombi celo navedeno, da je opis kvartilov iz didaktičnih razlogov nekoliko poenostavljen.

Metoda M2

1. Izračunamo mediano.
2. Razdelimo podatke na dve podmnožici, v prvi so vsi elementi, ki so manjši od mediane, v drugi polovici so vsi elementi, ki so večji od mediane,

   natančneje:

   (a) če je $n = 2k$, potem je $M = \frac{v_k+v_{k+1}}{2}$ in $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$.

   (b) če je $n = 2k+1$, potem je $M = v_k$ in $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$, torej mediano dodamo k obema polovicama.
3. Prvi kvartil je mediana spodnje, tretji kvartil pa mediana zgornje polovice podatkov.

Metodo M3, ki je podobna zgornjima in da pravilen rezultat v vseh primerih, je predlagal Langford [4].

Metoda M3 [Langford]

1. Izračunamo mediano.
2. Razdelimo podatke na dve podmnožici, v prvi so vsi elementi, ki so manjši od mediane, v drugi polovici so vsi elementi, ki so večji od mediane,

   natančneje:

   (a) če je $n = 2k$, potem je $M = \frac{v_k + v_{k+1}}{2}$ in $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$.

   (b) če je $n = 2k+1$, potem je $M = v_k$ in ločimo dva primera:

      i. če je k liho število, potem je $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$, torej mediano dodamo k obema polovicama.

      ii. če je k sodo število, potem je $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$, $V_2 = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$, torej mediane ne štejemo k nobeni od polovic.
3. Prvi kvartil je mediana spodnje, tretji kvartil pa mediana zgornje polovice podatkov.

V tabeli so prvi in tretji kvartili izračunani po definiciji in po metodah M1, M2 in M3, izračunani so za zglede iz prejšnjega razdelka (z 9, 10, 11 in 12 elementi). Krepko so označene vrednosti, ki se ne ujemajo z definicijo.

	Q_1				Q_3			
	Def	M1	M2	M3	Def	M1	M2	M3
Zgled 1	22	**18,5**	22	22	46	**48,5**	46	46
Zgled 2	22	22	22	22	46	46	46	46
Zgled 3	22	22	**22,5**	22	46	46	**45**	46
Zgled 4	22,5	22,5	22,5	22,5	48,5	48,5	48,5	48,5

Vidimo, da metodi M1 in M2 ne izračunata pravilnih vrednosti v vseh primerih. Ni težko videti, da za primere, ko je $n = 4r + 1$, metoda M1 ne deluje pravilno, za $n = 4r + 3$ pa se od definicije razlikuje rezultat, dobljen po metodi M2. Metoda M3 v vseh primerih pravilno izračuna kvartile, česar ni težko formalno dokazati.

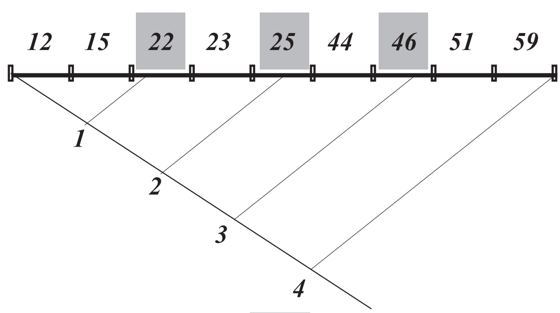
Možna obravnava v šoli

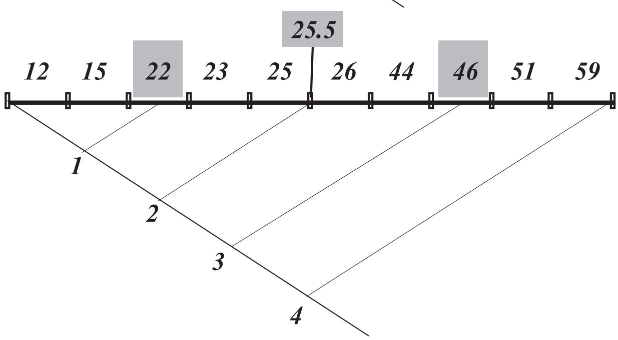
Langford [4] ob predlogu metode pove, da je ni preizkusil v praksi. Čeprav M3 ni pretirano zapletena, v tem razdelku vpeljemo kvartile še na tri druge načine, ki so verjetno primerni za obravnavo v srednji šoli, morda celo v osnovni šoli. Poudarimo, da so v vseh primerih rezultati enaki in ustrezajo pravi definiciji, zato lahko kvartile brez škode tudi »definiramo« s katerim koli od spodnjih postopkov.

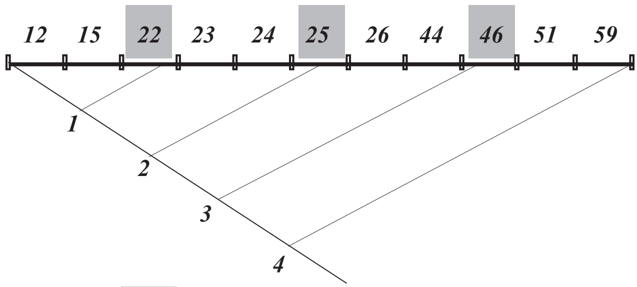
Vpeljava kvartilov s pomočjo elementarne geometrije

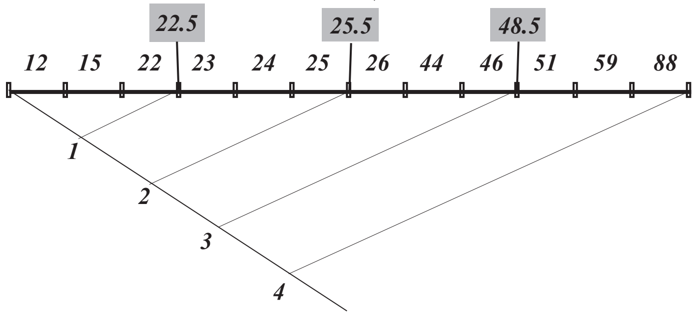
Množico podatkov uredimo in si predstavljajmo, da vsak element pokrije po en interval dolžine ena, tako da dobimo daljico dolžine n. Kvartile in tudi centile dobimo (in definiramo) tako, da daljico dolžine n razdelimo v primernem razmerju. Če je delilna točka na intervalu, potem je vrednost centila (kvartila, mediane) vrednost elementa na tem intervalu, če pa delilna točka pade natanko na mejo med dva intervala, potem za (kanonično) vrednost centila vzamemo aritmetično sredino.

Na zgledih velikosti $n = 9$, 10, 11 in 12 metoda da naslednje rezultate.

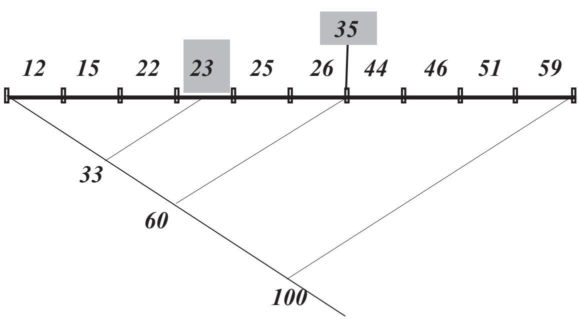








Na ta način brez težav vpeljemo in določamo tudi centile, na primer 33. centil in 60. centil (kanonično vrednost) na zgledu 2 dobimo takole:



Vpeljava kvartilov s pomočjo osnovnega izreka o deljenju

Zapišemo $n = 4r + o$ in kvartile *definiramo* takole:

če je $o = 1$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$,	$Q_2 = v_{2r+1}$	in	$Q_3 = v_{3r+1}$.
če je $o = 2$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$,	$Q_2 = \frac{v_{2r+1}+v_{2r+2}}{2}$	in	$Q_3 = v_{3r+2}$.
če je $o = 3$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$,	$Q_2 = v_{2r+2}$	in	$Q_3 = v_{3r+3}$.
če je $o = 0$, potem je $Q_1 = \frac{v_r+v_{r+1}}{2}$,	$Q_2 = \frac{v_{2r}+v_{2r+1}}{2}$	in	$Q_3 = \frac{v_{3r}+v_{3r+1}}{2}$.

Utemeljitev, ki je hkrati tudi formalen dokaz pravilnosti, je preprosta, le obravnavati je treba vsakega od primerov posebej.

- Če je $o = 1$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$, ker veljajo neenakosti:

$$\frac{r}{4r+1} < \frac{1}{4} < \frac{r+1}{4r+1}, \qquad \frac{3r}{4r+1} < \frac{3}{4} < \frac{3r+1}{4r+1}.$$

  Podobno pokažemo, da je $Q_3 = v_{3r+1}$, na primer z uporabo očitne simetrije.

- Če je $o = 2$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$:

$$\frac{r}{4r+2} < \frac{1}{4} < \frac{r+1}{4r+2}, \qquad \frac{3r+1}{4r+2} < \frac{3}{4} < \frac{3r+2}{4r+2}.$$

  Podobno vidimo, da je $Q_3 = v_{3r+2}$.

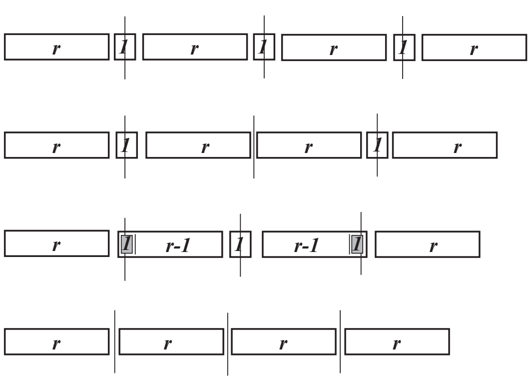
- Če je $o = 3$, potem je $Q_1 = v_{r+1}$:

$$\frac{r}{4r+3} < \frac{1}{4} < \frac{r+1}{4r+3}, \qquad \frac{3r+2}{4r+3} < \frac{3}{4} < \frac{3r+3}{4r+3}.$$

  Podobno vidimo, da je $Q_3 = v_{3r+3}$.

- Če je $o = 0$, potem lahko množico razdelimo na štiri enako velike četrtine s po r elementi, torej je $Q_1 = \frac{v_r + v_{r+1}}{2}$ in $Q_3 = \frac{v_{3r} + v_{3r+1}}{2}$.

Morda lahko namesto za dijake ne ravno zanimive formalne izpeljave za intuitivno razumevanje zadošča spodnja slika:



Podvojitev vzorca

V primeru, ko je število elementov liho, je mediana enaka vrednosti elementa v_{k+1} in če hočemo kvartile računati kot mediane polovic, se pojavi vprašanje, kaj narediti s tem srednjim elementom. Ideja, ki se ponuja in jo je mogoče tudi formalno utemeljiti, je podvojitev: če vsakega od elementov podvojimo, tako da dobimo $2n$ elementov, je delitev na enako veliki podmnožici dobro definirana. Podvojeni srednji element tako prispeva po en element v vsako od polovic. Kvartil Q_1 lahko potem izračunamo (in definiramo) kot mediano spodnje polovice, kvartil Q_3 pa kot mediano zgornje polovice podvojene osnovne množice. Ni težko preveriti, da tako dobimo prave vrednosti kvartilov.

Zaključek

V Sloveniji so bili osnovni pojmi statistike vpeljani v učne načrte osnovne šole in srednjih šol pred slabimi dvajsetimi leti ob uvedbi devetletke. Na žalost v veljavnih učbenikih najdemo različne metode za računanje kvartilov in ob izostanku formalne definicije ali opozorila, da gre za približne metode, je mogoče razumeti, da so te približne metode eksaktne, s čimer sta implicitno vpeljani vsaj dve problematični definiciji kvartilov [1, 8, 9]. Če so razlike v uporabni statistiki zaradi narave različnih aplikacij morda do neke mere razumljive, je nejasnost osnovnih pojmov v elementarni statistiki najmanj neprijetna, če ne celo nesprejemljiva. Če učenci v osnovni in srednji šoli srečajo dve nasprotujoči si definiciji preprostih osnovnih pojmov, upravičeno lahko podvomijo v konsistentnost predavane snovi in z malo posploševanja razširijo ugotovitev na nekonsistentnost celega predmeta, v tem primeru matematike. Zato je v tem in podobnih primerih nujna uskladitev med učnimi gradivi po vertikali in horizontali. Enako pomembna je seveda korektna vpeljava osnovnih pojmov in če gre za prezahtevne pojme, morajo biti razlogi za obravnavo zelo močni, sicer je obravnavo pametneje opustiti ali preložiti na kasnejše obdobje. Spomnimo se samo razvpitega primera vpeljave teorije množic pred desetletji.

Na srečo je tu obravnavani primer precej preprost. Vpeljavo osnovnih pojmov statistike, vključno s kvartili, je vsaj v srednji šoli škoda okrniti, saj za to ni nobene potrebe. Malo bolj vprašljiva je seveda smiselnost obravnave v devetletki, vsekakor je treba razloge za in proti dobro pretehtati [7]. Kvartili so uporabni na primer pri predstavitvi podatkov, kjer razpršenost podatkov lepo prikažemo s tako imenovano »škatlo z brki«.

Torej, k sedaj uporabljanim metodam za računanje kvartilov je nujno treba pripomniti, da gre za približne metode, ki za velike množice podatkov v statistiki delujejo dovolj dobro. Ali, in seveda precej boljše, kvartile vpeljati korektno, na primer z enim od tu nakazanih elementarnih pristopov.

Zahvala

Anonimnemu recenzentu se zahvaljujem za konstruktivne pripombe in predlagane popravke, ki so veliko prispevali k jasnosti in matematični korektnosti besedila. Zahvaljujem se tudi kolegom, članom maturitetne komisije za matematiko za splošno maturo, ki so mi pred pisanjem prispevka opisali svoje izkušnje pri obravnavi teh pojmov in uporabo statističnih programov v šolski praksi, in nenazadnje uredniku, ki je v zadnji različici pred tiskom opozoril še na nekaj napak v besedilu.

LITERATURA

[1] M. Bon Klajnšček, B. Dvoržak in D. Felda, *Matematika 1, učbenik za gimnazije*, DZS, 2009.

[2] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[3] A. H. Joarder in M. Firozzaman, *Quartiles for Discrete Data*, Teaching Statistics **3**, 86–89.

[4] E. Langford, *Quartiles in Elementary Statistics*, Journal of Statistics Education **14** (2006) 16 strani, dostopno na: `ww2.amstat.org/publications/jse/v14n3/langford.html`, ogled: 22. 5. 2017.

[5] Z. Magajna in A. Žakelj, *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9*, Matematika v šoli **7** (1999) 249–252.

[6] Z. Magajna in A. Žakelj, *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9*, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2000.

[7] Z. Magajna in A. Žakelj, *Ali sodi obdelava podatkov k pouku matematike?*, Obzornik mat. fiz. **46** (1999) 113–119.

[8] A. Mohorčič in drugi, *Vega 1, i-učbenik za matematiko v gimnazijah*, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2013.

[9] G. Pavlič, D. Kavka, M. Rugelj in J. Šparovec, *Linea nova, matematika za gimnazije*, Modrijan, Ljubljana, 2011.

[10] Ask Dr. Math, dostopno na: `mathforum.org/library/drmath/view/60969.html`, ogled: 24. 12. 2016.

[11] *Statistični terminološki slovar*, Statistično društvo Slovenije, SAZU, 2001.

MATEMATIČNE NOVICE

Peter Šemrl ponovno predsednik društva International Linear Algebra Society

Prof. dr. Peter Šemrl je bil ponovno izvoljen za predsednika Mednarodnega društva za linearno algebro (ILAS). Njegov drugi mandat se je začel 1. marca 2017 in bo trajal tri leta.

Zaslužki velikih založnikov znanstvene literature

Davkoplačevalci dvakrat plačajo za znanstvene rezultate: najprej za raziskave in plače raziskovalcev, nato še za dostop do teh rezultatov. Večji del objav je namreč še zmeraj v revijah, ki jih univerze in znanstveni inštituti lahko dobijo le za mastne naročnine.

Švicarski informatik Christian Gutknecht je delal v dveh univerzitetnih knjižnicah. Trenutno je na Swiss National Science Foundation. V septembru 2014 je vplačal 5350 EUR za 300 delnic nizozemske založbe Elsevier. V slabih 14 mesecih je vrednost te investicije zrasla na 7311 EUR. Vplačilo pa mu je omogočilo tudi vpogled v poslovne rezultate Elsevierja. Kot je povedal avtorju radijske oddaje o znanosti [1], znašajo letni dobički do 40 odstotkov, in to konstantno leto za letom. Ko je pisno prosil švicarske univerze, naj mu sporočijo, koliko plačajo za naročnine na znanstvene revije, je dobil podatke le od ene univerze z italijanskega govornega območja. Vse druge ustanove so mu sporočile, da podatkov zaradi klavzul o tajnosti v pogodbah z založniki ne morejo posredovati. Potem se je sklical na odprtost bilanc javnih ustanov in zvedel, da je vodilna univerza ETH samo za naročnine na revije založb Elsevier, Wiley in Springer v letu 2014 dala 7 milijonov CHF. V letu 2015 so švicarske visokošolske ustanove za naročnine dale 70 milijonov CHF.

Vse nizozemske univerze so v letu 2015 združile napore. Izposlovale so boljše pogoje z založbama Wiley in Springer in (s težavo) tudi z domačim Elsevierjem. Tako bo določen delež člankov nizozemskih avtorjev prosto dostopen, ne da bi to prinašalo dodatne stroške.

LITERATURA

[1] P. Biber, *Geldesel Wissenschaftsverlag, SRF Wissenschaftsmagazin*, dostopno na: `www.srf.ch/sendungen/wissenschaftsmagazin/ian-crozier-ebola-arzt-und-ebola-ueberlebender-2`, ogled: 24. 5. 2017.

Peter Legiša

USTANOVITEV ODBORA ZA ŽENSKE PRI DMFA

Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov smo ustanovili Odbor za ženske, ki deluje po zgledu tovrstnih odborov sorodnih društev po svetu, kot so denimo: Association for Women in Mathematics, European Women in Mathematics, The Committee for Women in Mathematics (Canadian Mathematical Society), Women in Mathematics Committee (London Mathematical Society), Equal Opportunities Committee (European Physical Society), Women in Physics (International Union of Pure and Applied Physics), Women in Astronomy (International Astronomical Union), Committee on the Status of Women in Astronomy (American Astronomical Society) idr.

Zavzemamo se za promocijo študija matematike, fizike in astronomije med dekleti in ženskami, za enake možnosti in enako obravnavo obeh spolov tako pri študiju kot tudi na karierni poti in pri pridobivanju raziskovalnih sredstev, za družinam prijazne znanstvene kariere ter za transparentnost postopkov zaposlovanja v akademskem svetu in razdeljevanja raziskovalnih sredstev. Poleg navedenega se zavzemamo tudi za ohranjanje zgodovinskega spomina na dosežke znanstvenic.

Vse člane in članice DMFA, ki se zavzemajo za večji delež žensk v znanosti in bi želeli sodelovati v Odboru za ženske, vabimo, da se nam pridružijo. Spremljate nas lahko na spletni strani `www.dmfa.si/OdborZaZenske` ali nam pišete na naslov `ozz@dmfa.si`.

Karin Cvetko Vah

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2016[1]

V letu 2016 se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 9 novih članov:

2423. Lucija Čoga
2424. Barbara Ikica
2425. Matej Mencinger
2426. Jure Oder
2427. Egon Pavlica
2428. Gašper Peresciutti
2429. Simona Pustavrh
2430. Franci Tajnik
2431. Benjamin Tomažič

Tadeja Šekoranja

[1] Novi člani DMFA Slovenije za leto 2015 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **62** (2015) 6, stran 240.

ARISTARH, PLUTARH IN VOLTAIRE

Aristarh

Helenistični astronom **Aristarh** s Samosa je v tretjem stoletju pred našim štetjem prvi poskusil izmeriti premer in oddaljenost Sonca in Lune. Metoda je bila domiselna. Ko Sonce osvetljuje, gledano z Zemlje, natanko polovico k nam obrnjene Lunine površine, oklepajo Zemlja, Luna in Sonce pravi kot. Takrat je izmeril ostri kot v (pravokotnem) trikotniku z oglišči v Soncu, Luni in Zemlji. Žal je pri tej meritvi naredil precejšnjo napako. Tega mu ne moremo posebno zameriti, saj je bilo to meritev s takratnimi instrumenti težko izvesti. Ocenil je, da je Sonce od osemnajstkrat do dvajsetkrat toliko oddaljeno od Zemlje kot Luna. (V resnici je približno štiristokrat toliko oddaljeno kot Luna). Zdi se, da je kasneje svojo napako nekoliko popravil. Nato se je lotil še ocenjevanja Luninega premera. Že Aristotel je kot poglavitni dokaz za to, da je Zemlja okrogla, navedel obliko sence Zemlje ob Luninem mrku – ko Zemlja pride med Sonce in Luno. Aristarh je šel še korak dalje. Opazil je, da je ob Luninem mrku čas od začetka mrka do popolne zatemnitve približno enak času trajanja popolnega mrka. V prvem približku je torej polmer Lune približno polovica polmera Zemlje. To sklepanje bi bilo pravilno, če bi senca Zemlje bila povsod enako široka kot Zemlja. Antični zgodovinar Plutarh v [2] (v razdelku 19) navaja: »Aristarh dokaže, da je razmerje polmerov Zemlje in Lune manjše kot 60 : 19 in večje kot 108 : 43.« Pravi podatek je: približno 3,66.

Aristarh je upošteval še, da Luno in Sonce vidimo z Zemlje pod praktično enakim kotom, kar se lepo pokaže ob popolnem sončnem mrku. Iz tega je ocenil, da znaša premer Sonca približno dvajset premerov Lune ali približno deset premerov Zemlje. Verjetno ga je prav dejstvo, da je Sonce mnogo večje od Zemlje, navedlo na misel, da Zemlja kroži okrog Sonca. Njegove ideje so bile za tisti čas revolucionarne. Idejo o gibanju Zemlje okrog Sonca omenja tudi slavni helenistični znanstvenik Arhimed.

Ker Zemlja pri poti okrog Sonca po Aristarhu prepotuje velikansko razdaljo, so Aristarhovi kolegi sklepali, da bi zvezde po pol leta, na drugi strani Sonca, morali videti pod drugim kotom. Aristarh jim je odgovoril, da so zvezde še mnogo bolj oddaljene in zato tega ne moremo opaziti. Danes vemo, da je to res in to so, kot bomo videli, kasneje ugotovili tudi nekateri drugi helenistični astronomi. Vendar Aristarhova ideja o kroženju Zemlje okrog Sonca ni bila splošno priznana, čeprav je ostala kot ena od možnih teorij.

Plutarh

Antični zgodovinar Plutarh, ki je živel približno med leti 46 in 120, je napisal delo z naslovom: **O obrazu, ki se kaže v Lunini krogli**, latinsko **De facie quae in orbe lunae apparet**, ki smo ga že prej citirali. V njem piše, kako so imeli nekateri stari Grki filozofske in verske zadržke do teorije, da Zemlja kroži okrog Sonca. Citirajmo:

»Kleant je mislil, da bi Grki morali obtožiti Aristarha zaradi pomanjkanja pobožnosti, ker se je nedostojno obnašal proti domačemu ognjišču vesolja. Da bi bolje razložil pojave, je namreč privzel, da nebo miruje, medtem ko Zemlja kroži po ekliptiki in se obenem vrti okrog svoje osi.«

Večinoma so ljudje v tistem času mislili, da se nebesna obla z zvezdami in Soncem vrti okrog Zemlje. Ta citat opisuje, kako je Aristarh zagovarjal gibanje Zemlje okrog Sonca in kako je njegovi razlagi nasprotoval stoični filozof Kleant, ki je deloval v tretjem stoletju pred Kristusom. Grškemu mislecu Kleantu, nekdanjemu boksarju, se ni zdelo prav, da bi Zemlja, domače ognjišče stvarstva, potovala okrog Sonca.

O obrazu je del velike zbirke Plutarhovih del s skupnim naslovom *Moralia.*

Voltaire

Poglejmo zdaj, kako je Aristarha dva tisoč let kasneje, v času izrednega napredka evropske znanosti, namesto priznanja za genialnost doletelo neverjetno obrekovanje. Znani francoski razsvetljenec **Voltaire** (1694–1778), eden najvplivnejših mislecev osemnajstega stoletja, v svojem *Filozofskem slovarju* pod geslom *Système* [1] govori o heliocentričnem sistemu, se pravi sistemu, v katerem Zemlja in planeti krožijo okrog Sonca. Izpustil bom par nepomembnih podrobnosti, sicer pa so Voltairove besede naslednje:

»Kar se tiče tistega Aristarha s Samosa, ki naj bi dodelal odkritja Babiloncev o gibanju planetov in Zemlje, je ta tako obskuren, da ga je moral angleški matematik Wallis komentirati od začetka do konca, da bi ga napravil razumljivega. Končno je malo verjetno, da je knjiga, ki mu jo pripisujejo, res njegova. Močno sumimo sovražnike nove filozofije, da so izdelali ta ponaredek zaradi svojih slabih namenov ... Ta Aristarh s Samosa je še toliko bolj sumljiv, ker ga Plutarh obtožuje, da je bil pobožnjakar, hinavec, prežet s prepirljivostjo. Tu so Plutarhove besede iz zmešnjave z naslovom *Obraz Lunine oble*: »Aristarh s Samosa je dejal, da morajo Grki kaznovati Kleanta, ker je domneval, da je nebo nepremično in da se Zemlja giblje po zodiaku, medtem ko se vrti okrog svoje osi.« Ampak, rekli boste: »Torej je bil Kopernikov sistem že v glavi Kleanta in mnogih drugih. Ni važno, ali je bil Aristarh s Samosa enakega mnenja kot Kleant ali njegov ovaduh, ..., očitno je, da so že v antiki poznali današnji pravi sistem.« Odgovarjam, da ne; da so nekatere glave, ki so bile bolje urejene kot druge, domnevale zelo majhen del tega sistema. Odgovarjam, da ta sistem nikoli ni bil sprejet, da ga niso učili v šolah, da nikoli ni bil sestavni del doktrine. Berite pozorno ta Plutarhov Lunin obraz; v njem boste našli, če hočete, doktrino gravitacije. Pravi avtor tega sistema je tisti, ki ga dokaže.«

Tu končajmo s citiranjem Voltaira, čeprav se njegova tirada še nadaljuje. Voltaire skuša z ironijo zakriti določena dejstva. Plutarhovo delo ima obliko razprave med prijatelji, na koncu pa ima še mitološko zgodbo o Luni. (To vse skupaj Voltaire kratko odpravi kot »zmešnjavo«.) Vendar so v tej tako imenovani »zmešnjavi« poleg nekaterih napačnih špekulacij izrečene besede, ki bi jih podpisali tudi današnji fiziki. Citirajmo Plutarha (razdelek 6): »Luno pred padcem rešuje njeno gibanje in hitrost kroženja, tako kot izstrelki iz prače ne padejo, ker jih vrtimo v krogu. Vsako stvar obvladuje njeno naravno gibanje, dokler je ne preusmeri nekaj drugega. Zato Luni ne vlada njena teža: težo kompenzira krožno gibanje.« In v razdelku 8 Plutarh piše, malo manj izdelano: »... težnja padajočih teles navzdol dokazuje, da Zemlja ni v središču kozmosa, ampak da imajo telesa, ki jih potisnemo vstran od Zemlje in padejo nazaj nanjo, naravno privlačnost in kohezijo z njo ... Tako kot Sonce privlači k sebi dele, iz katerih je sestavljeno, tudi Zemlja sprejme kot svoj kamen, ki ima težnjo navzdol. Tako se na koncu vsaka taka stvar zedini z njo in se je drži.«

Voltaire, tudi sicer znan po površnosti, zameša vlogi Aristarha in Kleanta in s tem naredi točno tisto, kar podtika drugim: ponaredi zgodovinske podatke. O obkladanju Aristarha z raznimi vzdevki, ki pravzaprav letijo na filozofa Kleanta, pa raje ne govorimo. Mimogrede, iz citiranega odlomka vidimo poleg temne strani razsvetljenstva tudi poglavitne odlike brezobzirnega propagandista Voltairja: izredno jasnost v izražanju in udarnost. Voltairova francoščina je povsem »moderna« – v drugi polovici osemnajstega stoletja je bil francoski knjižni jezik očitno že povsem fiksiran in k temu je s svojimi spisi pripomogel tudi Voltaire.

Voltaire je upravičeno slavil Kopernika, Keplerja in še posebno Newtona. Bil je eden tistih, ki so iz Newtona napravili pravo božanstvo. Voltaire se je verjetno bal, da bi priznanje dosežkov helenizma odvzelo lesk uspehom moderne evropske znanosti, zato je dognanja antike skušal na grd način zmanjšati. Naj dodam, da Voltaire na drugem mestu govori o »lepih dokazih Arhimeda«, tako da je nekatere nesporne dosežke helenizma le priznaval.

Voltairovo brisanje zgodovine je še toliko bolj nenavadno, če pomislimo, da so ravno stari Grki poudarjali idejo napredka. Že zgodovinar Tukidid je v petem stoletju pr. Kr. zapisal: »Zakon je, da tako v umetnosti kot v politiki izboljšave zmeraj prevladajo. In čeprav je nespremenjena raba morda najboljša za nemotene skupnosti, mora stalno potrebo po akciji spremljati stalno izboljševanje metod.« Filozof Aristotel je v svojem nauku še učil, da so nekatere spremembe nepovratne: »Če izgubiš vid, ga ne moreš dobiti nazaj.« A helenistični logik Hrizip, učenec prej omenjenega filozofa Kleanta, je njegovo izjavo zavrnil z utemeljitvijo: »Operacija sive mrene ti lahko povrne vid.« Takrat so namreč že opravljali operacije katarakte. To zanikanje statičnosti sveta in spoznanje, da stvari lahko sorazmerno hitro izboljšamo, če vložimo dovolj intelektualnega truda, je bil velikanski prispevek grške kulture in še posebno helenizma.

Plutarh, ponovno.

Da bi malo bolje razumeli dosežke helenistične znanosti, citirajmo še Plutarha in razdelek 9 njegovega dela o Luni:

»In vendar je Zemlja mnogo večja kot Luna po ugotovitvah matematikov. Ti so ob pojavih mrkov in prehodih Lune skozi (Zemljino) senco izračunali njeno velikost po času, ko je zatemnjena. Senca Zemlje se namreč zmanjšuje, čim bolj se oddaljuje, ker je telo, ki oddaja svetlobo, večje od Zemlje ... In vendar, ujeta v mrk, Luna komajda uide iz sence v prostoru, ki je njena trikratna velikost. Pomisli, kolikokrat večja kot Luna je Zemlja, če Zemlja meče senco, ki je v zoženem delu trikrat tako široka kot Luna.«

Sklepanje je brezhibno in popravlja Aristarha. Plutarh poudarja, da ima senca Zemlje stožčasto obliko. Nadaljujmo s citati iz Plutarha (razdelek 10): »... vi, matematiki, pravite, da ima Sonce neizmerno razdaljo od zvezdnega oboka in da stran od Sonca Venera, Merkur in drugi planeti krožijo niže kot fiksne zvezde ... Luna je tako daleč stran od zvezd, da razdalje ni mogoče izraziti in vam, matematikom, zmanjka številk, ko bi radi to izračunali; Luna praktično pometa ob Zemljo in kroži blizu nje ... zdi se, da je skoraj na dosegu roke ... Po najvišjih ocenah je razdalja Lune od Zemlje 56 polmerov Zemlje.« (Konec citata.)

Napaka tega podatka o razdalji do Lune je manj kot deset odstotkov. Krasno je tudi ilustrirano dejstvo, da je razdalja do Lune strašno majhna v primerjavi z razdaljo do zvezd. Prav tako je povsem pravilno navedeno, da so Venera, Merkur in drugi planeti mnogo bliže Zemlji kot fiksne zvezde. Najdemo tudi dolgo debato, katere sklep je, da je Luna po sestavu podobna Zemlji.

Očitno je Plutarh imel dostop do presenetljivo dobrih astronomskih del, ki so se kasneje izgubila. Johannes Kepler je zelo rad prebiral Plutarha. Še enkrat povejmo, da je Plutarh znan predvsem po svojih portretih velikih vojskovodij in politikov. Prava sreča je, da je Plutarh pri svojem študiju v Atenah in na svojih potovanjih dobil odlično znanstveno izobrazbo in da je pisal tudi o astronomiji in drugih znanostih. Zaradi njegovega literarnega slovesa se je tako delo o Luni ohranilo skoraj v celoti.

Plutarh oziroma njegovi sogovorniki v razdelku 8 razpravljajo, da bi človek s popkom v središču Zemlje imel tako noge kot glavo navzgor. Pravilno domnevajo, da bi skala, spuščena v predor skozi središče Zemlje, nihala sem ter tja okrog središča. (Zanimivo je, da se je s prav tem problemom ukvarjal tudi naš Jurij Vega – približno dve tisočletji kasneje.) Plutarhu je bila ilustracija za to razmišljanje razžarjena vulkanska bomba (dobesedno: žareči balvan, težak 40 ton), ki jo je izstrelil vulkan Etna in je potem padla nazaj v krater. Vsekakor lahko samo občudujemo dar opazovanja, nenasitno intelektualno radovednost, vztrajno in sistematično iskanje odgovorov teh večinoma grško govorečih znanstvenikov. Tudi sam Plutarh je bil Grk in je pisal v grščini. Žal je bil sloj vrhunskih intelektualcev, šol in raziskovalnih ustanov v tistem času tanek in ranljiv. Rimljani kot novi gospodarji Sredozemlja so bili vojaki, administratorji in poslovneži, pripravljeni investirati le v zelo praktične zadeve: izboljšave na področju orožja, kmetovanja, gradnje, manufakture … Na srečo so cenili tudi dobro literaturo, zato so Plutarhu dodelili rimsko državljanstvo in celo časten administrativni položaj.

Če so Aristarhovi dosežki danes splošno priznani, pa tega ne bi mogli reči o Plutarhovem delu o Luni.

Ta zapis deloma sloni na besedilih, ki sem jih pred nekaj leti pripravil za Radio Slovenija.

LITERATURA

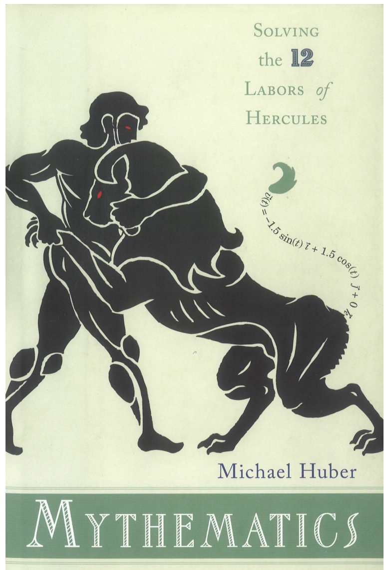
[1] *Oeuvres complètes de Voltaires, Dictionnaire philosophique*, dostopno na: `zafzaf.it/russo/voltaire-systeme.htm`, ogled: 6. 4. 2017.

[2] Plutarch, *On the Face in the Moon*, v angleščino prevedel H. Cherniss, dostopno na: `penelope.uchicago.edu/Thayer/e/roman/texts/plutarch/moralia/the_face_in_the_moon*/home.html`, ogled: 6. 4. 2017.

Peter Legiša

NOVE KNJIGE

Michael Huber, Mythematics: Solving the 12 labors of Hercules, Princeton University Press, New Jersey, 2009, 183 strani.



Herkules (ali Herakles, kot so mu rekli stari Grki) je bil mitološki junak, slaven po svoji moči in bistroumnosti. Velja za največjega med vsemi klasičnimi grškimi junaki. Njegova dejanja so upodobljena ne le v literaturi, ampak tudi na vazah, v kipih in slikah, razstavljenih v muzejih, kot sta npr. Louvre v Parizu in Metropolitanski muzej umetnosti v New Yorku.

Michael Huber je imel briljantno literarno-matematično idejo (in jo je tudi sijajno uresničil!), kako uporabiti tega priljubljenega junaka, čigar mitologija že več kot 2500 let sodi v kulturno dediščino človeštva, za popularizacijo oziroma predstavitev nekaterih osnovnih poglavij matematike širšemu občinstvu: 12 slavnih Herkulovih del je vzel kot izhodišče za formulacijo matematičnih problemov, ki po eni strani prikažejo presenetljivo matematično podstat Herkulovih junaštev, po drugi strani pa so lepa priložnost za predstavitev uporabnosti matematike za modeliranje najrazličnejših življenjskih situacij.

Vsako od Herkulovih del je najprej predstavljeno z literarnim citatom (v angleškem prevodu) izpod peresa starogrškega učenjaka in pisca literarno-zgodovinskih del Apolodorusa, ilustrirana pa so tudi s posrečenimi črno-belimi risbami, ki spominjajo na poslikave grških vaz z junaškimi motivi. Skupni učinek tako zasnovane knjige, ki posrečeno povezuje na videz nezdružljivi področji humanistike in matematike, rezultira v povsem nestandardni bralski izkušnji, saj pozorno spremljanje vsebine zahteva hkratno aktiviranje lingvističnih in matematičnih dimenzij bralčeve inteligence. V tem smislu knjiga ni povsem lahko branje ne za humanista (ki se bo moral spopasti s kar zahtevnim zalogajem matematičnih vsebin), pa tudi ne za matematika (ki bo moral prežvečiti kar lep kos kulturne pogače, da bo lahko razumel širši kontekst situacije, ki je matematično modelirana in prevedena v kar nekaj problemov, ki so potem rešeni z matematičnimi sredstvi).

Ti problemi segajo na področja algebre, kombinatorike, diferenčnih enačb, diferencialnega računa, diferencialnih enačb, geometrije, integralnega računa, verjetnosti, simulacij, statistike in trigonometrije.

Za boljšo predstavo o posrečenem načinu, na katerega je v knjigi povezana literarna predloga z matematično vsebino, si oglejmo npr. šesto Herkulovo delo, ki ga uvaja naslednji citat iz Apolodorja (str. 53): »Šesto delo, ki mu ga je naložil, je bilo, da prežene stimfalijske ptice. Poleg kraja Stimfala v Arkadiji je bilo jezero, imenovano Stimfalij, skrito v globokem gozdu. Vanj so se v strahu pred volkovi zatekale neštete ptice. Ko Herkul ni vedel, kako naj prežene ptice iz gozda, mu je Atena dala bronaste kastanjete, ki jih je dobila od Hefajsta. Ko je udarjal z njimi po neki gori, ki se je vzpenjala nad jezerom, je prestrašil ptice. Ker niso mogle prenesti tega zvoka, so se v strahu razkropile, in tako jih je Herkul lahko postrelil.«

Zdaj avtor matematično opiše (izmišljena) konkretna dela (angl. »tasks«), ki jih je moral Herkul v zvezi s simfalijskimi pticami opraviti. Najprej je Herkul zaman poskušal pregnati ptice s kričanjem, pri čemer se je po gozdu gibal po Arhimedovi spirali. To vodi do *Problema Arhimedove spirale*, ki ga avtor formulira takole: *Če se Herkul giblje po spirali, dani v polarnih koordinatah z enačbo $r = 50\phi$, kjer je r merjen v metrih, ϕ pa v radianih, in če je naredil dva popolna obrata, kolikšno pot je pretekel (kakšna je dolžina ustreznega loka na krivulji)? Kaj se zgodi z dolžino loka, če Herkul naredi še en dodaten obrat?*

Ko opisuje rešitev tega problema, avtor mimogrede navrže nekaj zgodovinskih opomb o Arhimedu in njegovem delu (legende o Herkulu so se dogajale približno 400 let pred Arhimedom, ki se je verjetno rodil v Sirakuzi 287 pr. n. št., umrl pa med 2. punsko vojno 212 pr. n. št.). Potem ko bralcu pove, da je slavni Sicilijanec zahteval, da mu na nagrobni kamen vklešejo valj, očrtan sferi, skupaj z razmerjem njunih površin (in prostornin), ki ga je imel za svoje največje odkritje, poda formule za ločni element v kartezičnih koordinatah $ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$, nato v polarnih koordinatah $ds = \sqrt{(\frac{dr}{dt})^2 + (r\frac{d\phi}{dt})^2}dt$, nazadnje pa izračuna iskano dolžino loka na Arhimedovi spirali, tako da v formulo $s = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\frac{dr}{d\phi})^2 + r^2}d\phi$ vstavi $r = 50\phi$ in $\frac{dr}{d\phi} = 50$. Nato bralca spodbuja, naj poišče Arhimedovo spiralo še na spletu (tako da vtipka v iskalnik »*Spiral of Archimedes Aplet*«) in variira parameter a v enačbi $r = a\phi$ ter tako dobi boljšo intuitivno predstavo o tej krivulji.

Drugo opravilo, povezano s pticami oziroma resonirajočimi kastanjetami, s katerimi jih je Herkul pregnal iz gozda, vodi v obravnavo diferencialne enačbe $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$; resonanca se pojavi, kadar je $\omega = \omega_0$.

Tretje Herkulovo opravilo v zvezi s pticami avtor uporabi za približen izračun števila π po »*metodi Monte Carlo*«. Razmerje ploščin kroga z radijem r (znotraj katerega Herkul strelja ptice!) in očrtanega kvadrata je namreč $\rho = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$.

Podobno avtor poveže tudi druge zgodbe o 12 Herkulovih delih z različnimi matematičnimi problemi oziroma vsebinami. Nekatere od teh problemov je vzel iz starih zbirk nalog, npr. iz *Grške antologije*, zbirke epigramov, pesmi in ugank izpred več kot 2000 let, mnoge matematične uganke je našel tudi pri Metrodorusu, ki je bil verjetno gramatik in je živel v času Konstantina Velikega (306 do 337). Po drugi strani pa v knjigi najdemo tudi povsem moderne uganke z arhaično noto, npr. *Cerberjev Sudoku problem*, kjer se v vsaki vrstici, stolpcu in bloku pojavijo vsa števila od 1 do 6, število 7 pa po trikrat – za vsako od treh Cerberjevih glav! Prav tako najdemo v knjigi povsem moderne rešitve določenih starih problemov. Tako je npr. omenjena rešitev znanega »Jožefovega problema« (iz knjige *Concrete Mathematics* Grahama, Knutha in Patashnika) z resničnim zgodovinskim ozadjem: Jožef Flavij (judovski general in zgodovinar, ki je poročal o uničenju Jeruzalema leta 70) se je skupaj s še 40 Judi pred napadom Rimljanov skril v votlino; tam so naredili skupinski samomor, tako da so se postavili v krog in pobili vsakega tretjega; Flavij je pokol preživel, ker se je postavil na pravo mesto. Kako najti mesto, ki omogoča preživeti gornji postopek zaporednega pobijanja vsakega tretjega v krogu – to je vsebina Jožefovega problema.

V dodatku h knjigi najdemo še kratko opombo o Laplaceovi transformaciji $L[y](s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$, s pomočjo katere lahko kak začetni problem prevedemo na ustrezno algebraično enačbo za $L[y](s)$, potem pa rešitev te algebraične enačbe z uporabo obratne Laplaceove transformacije izkoristimo za rešitev prvotnega problema.

Avtor se je potrudil, da je izbral zanimive matematične probleme in jih lepo povezal z izvirnimi Herkulovimi junaškimi deli, ki niso zahtevala le velikanske fizične moči, ampak tudi veliko bistroumnosti. Ta je vsekakor bila potrebna npr. v boju s hidro, ki sta ji namesto oddrobljene vselej zrasli dve novi glavi!

Knjiga bo všeč predvsem bralcem, ki jih zanimajo raznovrstne uporabe matematike v vsakdanjem življenju, pa tudi širšemu občinstvu, ki se morda bolj kot za matematiko zanima za zgodovinske in humanistične dimenzije matematike. Matematiki pa lahko knjigo vzamejo v roke kot kurioziteto in dobrodošlo razvedrilo po kakšnem težjem matematičnem čtivu.

Po zgledu gornje knjige bi morda kdo pri nas lahko napisal kakšno podobno, z literaturo inspirirano matematično knjigo, v kateri bi v vlogi Herkula nastopal kakšen priljubljen slovenski literarni junak – npr. Martin Krpan? Če bi ob tem uporabili še izvirne probleme, ki so jih reševali znani slovenski matematiki, bi na mah imeli knjigo, s katero bi slovensko matematiko lahko na privlačen način predstavili svetu. Seveda pa je ob takšni ideji treba najti še junaka, ki jo bo sposoben tudi realizirati.

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2017
Letnik 64, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Drugo harmonično stoječe valovanje okrogle ploščе z lastno frekvenco 2,14-krat višjo od osnovne. Ob loku nastane hrbet, mivka se nabere v vozelnih črtah. Foto: Aleš Mohorič