PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 3
Strani 176–178

Matjaž Željko:

IGRA „NIM“

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1174-Zeljko.pdf

IGRA "NIM"

Oglejmo si igro z naslednjimi pravili:

Na mizi se nahaja nekaj kupov s po nekaj kamni. Igralca izmenoma pobirata kamne z mize. V vsaki potezi mora igralec vzeti vsaj en kamen (lahko tudi vse) iz poljubnega kupa. Izgubi tisti, ki ne more več narediti poteze.

Sprašujemo po zmagovalni strategiji za oba igralca, pa tudi, ali je mogoče iz začetnega položaja napovedati zmagovalca, če oba igralca igrata preudarno.

Za zgled si vzemimo tale položaj: Na treh kupih naj bo zaporedoma 3, 5 in 6 kamnov. Po nekaj igrah opazimo, da lahko tisti igralec, ki je na potezi drugi, s preudarno igro vedno zmaga. (Bralcu priporočamo, da trditev preveri v praksi.)

Za opis strategije v splošnem pa naj bo na mizi k kupov kamnov. Na prvem kupu naj bo n_1 kamnov, na drugem n_2 kamnov, ... in na k-tem kupu n_k kamnov. Vsako od števil n_i $(i = 1, \ldots, k)$ zapišimo binarno:

$$n_i = \sum_{j=0}^{m_i} b_{ij} 2^j .$$

Označimo $m = \max\{m_i;\ i = 1, \ldots, k\}$ in zaradi enostavnosti pri vsakem $i \in \{1, \ldots, k\}$ in $j \in \{m_i + 1, \ldots, m\}$ dodefiniramo $b_{ij} = 0$. Torej je

$$n_i = \sum_{j=0}^{m} b_{ij} 2^j .$$

Označimo še

$$S_j = \sum_{i=1}^{k} b_{ij} \quad \text{za } j = 0, \ldots, m.$$

Ko neki igralec naredi potezo (t.j. vzame vsaj en kamen z natanko enega kupa), se spremeni parnost pri vsaj enem številu S_j. Ker so na koncu igre vsa števila S_j enaka 0 (torej soda), lahko pričakujemo, da tisti igralec, pri katerem so pred njegovo potezo vsa števila S_j soda, ob preudarni igri nasprotnika ne more zmagati. Pokazati je torej treba le, da lahko igralec, pri katerem je vsaj eno od števil S_j liho, naredi takšno potezo, da postanejo vsa števila S_j soda.

Naj bo r največji izmed indeksov $j \in \{0, \dots, m\}$, pri katerem je S_j liho število. Torej obstaja kup p, pri katerem je $b_{pr} = 1$. Igralec, ki je na potezi, naj pusti na p-tem kupu n'_p kamnov, kjer je

$$n'_p = \sum_{j=0}^{m} b'_{pj} 2^j$$

in so števila b'_{pj} definirana z

$$b'_{pj} = \begin{cases} (b_{pj} + S_j) \bmod 2; & j = 0, \dots, r \\ b_{pj}; & j = r+1, \dots, m. \end{cases}$$

Ker je $b_{pr} = 1$ in je S_r liho število, je $b'_{pr} = 0$ in zato tudi $n'_p < n_p$. Očitno je, da so vsa nova števila S'_j soda.

Povzemimo zmagovalno strategijo:

Naj bo na potezi igralec A. Če je med števili S_j vsaj eno liho, lahko igralec A naredi potezo po pravkar opisanem postopku. Če pa so vsa števila S_j soda, pa lahko A samo upa, da igralec B ne bere Preseka...

Iz opisane strategije je tudi razvidno, da lahko iz začetnega položaja napovemo zmagovalca.

Za konec si pa oglejmo še konkreten primer:

Na prvem kupu naj bo 5, na drugem 19, na tretjem 40 in na četrtem kupu 51 kamnov. Vsa števila n_i zapišimo dvojiško:

$$\begin{array}{rcr} 5_{(10)} & = & 101_{(2)} \\ 19_{(10)} & = & 10011_{(2)} \\ 40_{(10)} & = & 101000_{(2)} \\ 51_{(10)} & = & 110011_{(2)} \end{array},$$

jih podpišemo in seštejmo desetiško brez prenosa:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ p \longrightarrow & + & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & + & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & = & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & \uparrow & & & \\ & & & & r & & & \end{array}.$$

Med stolpci z liho vsoto poiščimo najbolj levo ležeč stolpec (npr. r-ti). Nadalje poiščimo kup (npr. p-ti), da ima število n_p v binarnem zapisu na r-tem mestu števko 1. Število kamnov na tem kupu spremenimo tako, da števke od vključno r-tega stolpca desno po potrebi spremenimo v 0 ali 1, pri čemer pazimo, da bodo vse nove stolpčne vsote sode. Iz spremembe binarnega števila

$$40_{(10)} = 101000_{(2)} \rightarrow 100101_{(2)} = 37_{(10)}$$

sledi, da moramo s tretjega kupa vzeti 3 kamne. Na koncu se še prepričajmo, da so vse stolpčne vsote sode:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline = & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

Matjaž Željko