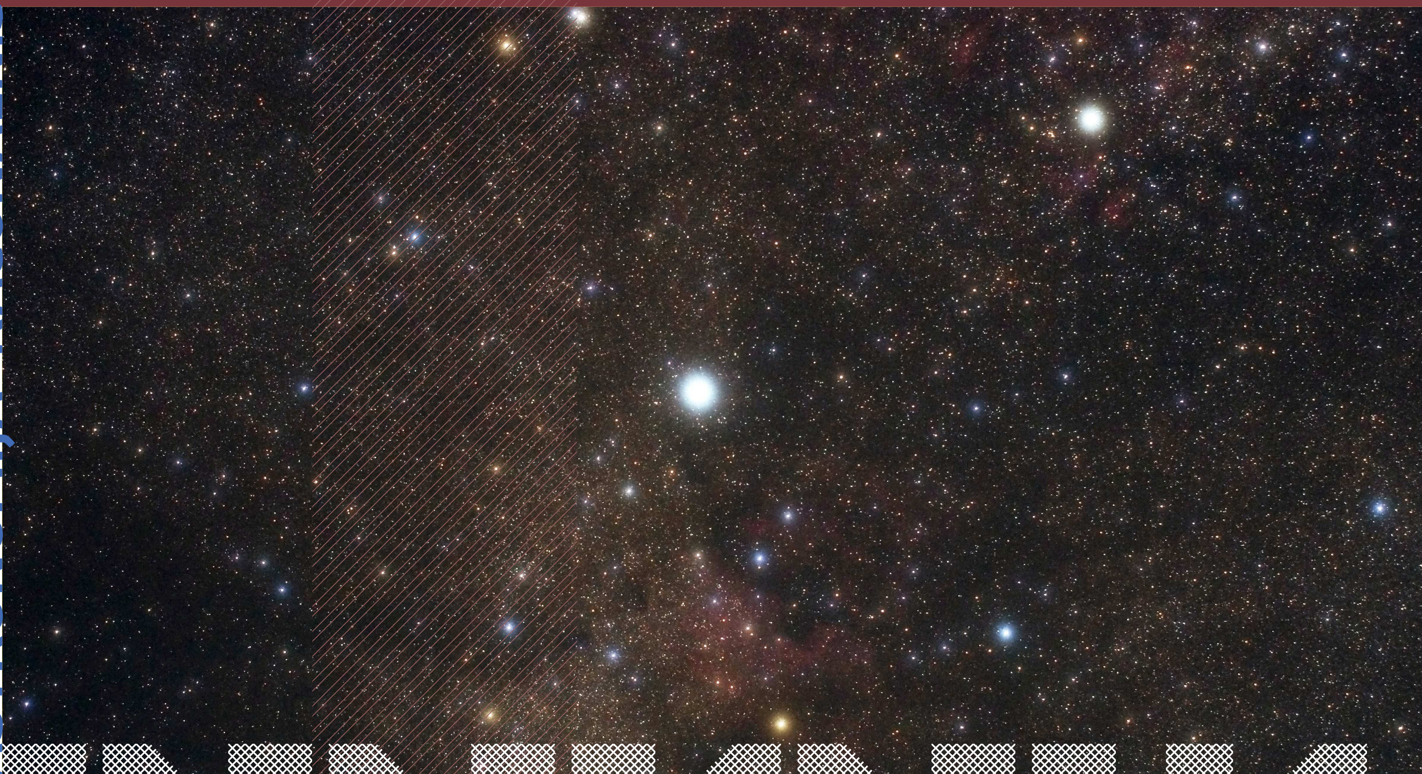
2

PRESEK LETNIK 45 (2017/2018) ŠTEVILKA 2

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK

- → NA NAPAKAH SE UČIMO ALI MALFATTIJEV PROBLEM
- → OČALA NA KONCU NOSU
- → OPOLDANSKA SENCA
- → RUBIKOVO MAŠČEVANJE

ISSN 0351-6652

9 770351 665524

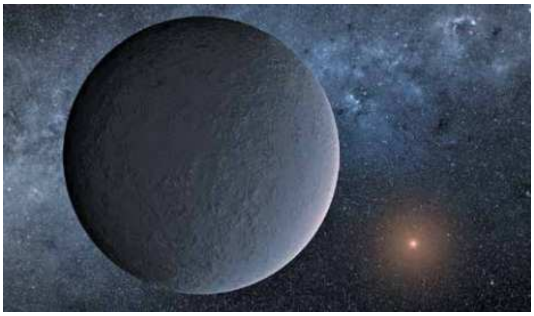
MATEMATIČNI TRENUTKI

Lov za planeti

V zadnjih dvajsetih letih so odkrili več kot tri tisoč planetov zunaj našega osončja. Kolikor manjši je planet, toliko težje ga je najti. Današnji teleskopi uspejo zaznati zatemnitev zvezd med prečkanjem planetov, četudi so ti več svetlobnih let oddaljeni od nas. Omenjena metoda zatemnitve zvezd je med najbolj uspešnimi, uporabiti pa je mogoče tudi gravitacijski vpliv planeta na zvezdo. Astronomi s pomočjo zapletenih naprav, algebre, trigonometrije in analize določijo približno maso, naklon tira planeta ter sestavo njegove atmosfere. S še bolj zapletenimi matematičnimi orodji pa iz meritev pridobivajo pomembne informacije in odstranjujejo šum, ki je neizbežen pri zbiranju podatkov s tako velikih razdalj.

V našem osončju astronomi iščejo deveti planet. Čeprav ga še niso opazili, njegov obstoj predvideva matematični model, ki razloži neobičajno združitev orbit ledenih objektov v Kuiperjevem pasu. Pas se nahaja za Neptunovim tirom, 30 do 50 astronomskih enot stran od Sonca. Še vedno je prezgodaj govoriti o obstoju devetega planeta, četudi njegovo eksistenco podpirajo teoretične razlage in numerične simulacije. Popoln dokaz bomo dobili šele, ko bomo planet zagledali skozi teleskop. Ker novi planet predvidoma za pot okrog Sonca potrebuje približno 15 000 let in je trenutno najbolj oddaljen od nas, bomo verjetno morali na dokaz še nekaj časa počakati. Znanstveniki med tem opazujejo nebo in zbirajo nove podatke o Kuiperjevem pasu. Šele čez mnogo let bomo vedeli, ali deveti planet zares obstaja.

Več o devetem planetu si lahko preberete v članku Alexandre Witze, *Unseen planet may lurk near solar system's edge*, ki je bil objavljen v reviji *Nature* 21. januarja 2016.



KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Pri DMFA Slovenije so letos pripravili že četrto Kresničko, tekmovanje iz naravoslovja za učence osnovnih šol. Ena od nalog je tudi astronomska – spoznavanje in prepoznavanje ozvezdij in zvezd ter orientacija po nočnem nebu. Ali lahko ugotovite, del katerega ozvezdja je na fotografiji na naslovnici? Kako se imenuje najsvetlejša zvezda na fotografiji? Foto: Andrej Guštin

Na napakah se učimo ali Malfattijev problem

Nada Razpet

Geometrijske naloge rešujemo tako, da si najprej narišemo skico, pri kateri pa včasih že upoštevamo nekatere predpostavke. Kaj pa če le-te niso pravilne? Nekaj podobnega se je zgodilo italijanskemu matematiku Malfattiju. Ta je leta 1803 v delu *Memoria sopra un problema stereotomico* objavil naslednji problem (slika 1): Dana je pokončna trikotna prizma iz nekega materiala, npr. marmorja. Kakšna naj bo medsebojna lega treh izrezanih valjev, ki imajo enako višino, kot je prizma, da bo ostanek materiala najmanjši [1]?

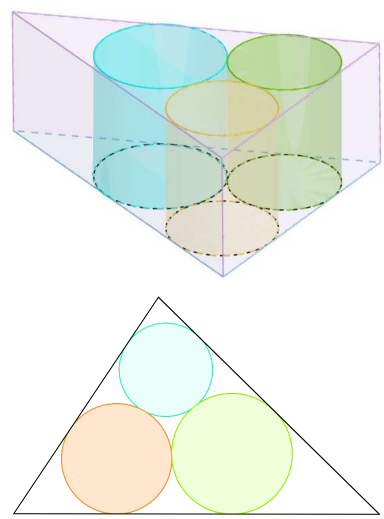
Malfatti je prostorski problem prevedel na ravninskega in v istem delu zapisal: *Kako naj iz trikotnika izrežemo tri kroge tako, da bo njihova skupna ploščina največja?*

Malfatti je bil prepričan, da je vsota ploščin tako včrtanih krogov, kot je to na sliki 1, tudi največja, ampak izkaže se, da to ne drži. Vendar je že konstrukcija teh krogov svojevrstni matematični izziv, s katerim se bomo spopadli tudi mi.

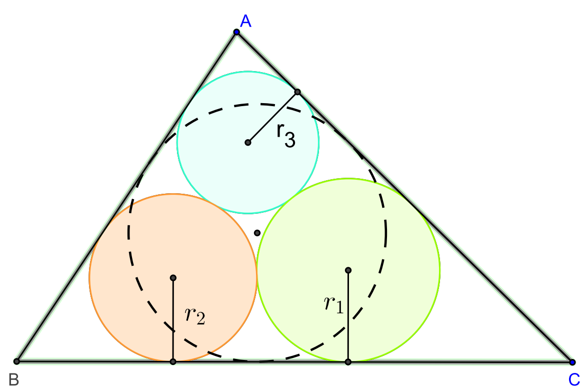
Malo zgodovine

Malfatti ni bil prvi, ki je zastavil ta problem. Že leta 1384 naj bi ga reševal italijanski matematik Giglio di Cecco da Montepulciano. Njegov rokopis hranijo v Biblioteca Comunale degli Intronati v Sieni. Pravijo tudi, da je leta 1703 Jacob Bernoulli reševal ta problem za enakokraki trikotnik. Kako v trikotnik včrtati tri med seboj dotikajoče se kroge, je leta 1811 objavil Joseph Diaz Gergonne, leta 1826 Jacob Steiner in leta 1853 Karl Schellbach. Več najdemo v [2].

Problem so poznali tudi na Japonskem ([3]). Tam je matematik Naonubu Ajima v 18. stoletju reševal naslednji problem: *Kako v trikotnik včrtamo tri med seboj dotikajoče se kroge? (slika 2)*



SLIKA 1.
Zgoraj: prizmi so včrtani trije valji. Spodaj: trikotniku so včrtani trije krogi.



SLIKA 2.
Ajimov problem treh trikotniku včrtanih krogov

Ajima je ploščino trikotnika izrazil s Heronovo formulo, izračunal polmer trikotniku včrtanega kroga, nato pa z uvedbo novih spremenljivk izračunal polmere posameznih krogov. Račun je podoben kot pri izračunu obrnjenega Malfattijevega problema, je pa zahtevnejši in obsežen. Ajima je po izračunu navedel še poseben primer: če merijo stranice $a = 507$, $b = 375$ in $c = 252$, potem je $r_1 = 64$, $r_2 = 56{,}25$, in $r_3 = 36$.

Obrnjen Malfattijev problem

Tudi na lesenih tablicah (sangaku), ki so obešene na stenah japonskih templjev, najdemo primer, ki je nekakšen obrnjen Malfattijev problem: *r_1, r_2 in r_3 so polmeri treh med seboj dotikajočih se krogov (glej sliko 2). Konstruiraj trikotnik, ki se dotika vseh treh krogov, in mu včrtaj krog. Izrazi polmer včrtanega kroga s polmeri r_1, r_2 in r_3.* Pri rešitvi naloge je bilo zapisano opozorilo: *Račun je dolg, rešitev pa relativno preprosta.* Skicirajmo, kako je japonski matematik Ōmura Kazuhide v knjigi *Sanpō Tenzan Tebikiguza* (izšla leta 1841) z angleškim naslovom *Algebraic Methods of Geometry* rešil to nalogo.

Nekaj priprave

V trikotnik včrtamo krog s središčem S in polmerom r, na sliki 3 označen z rdečo barvo, in tri med seboj dotikajoče se kroge s središči S_1, S_2 in S_3 ter ustreznimi polmeri r_1, r_2 in r_3.

Daljici AM in AM' sta odseka na tangentah, zato je $AM = AM'$. Štirikotnik AMS_2M' je deltoid. Tudi štirikotnika BTS_3N in CPS_1P' sta deltoida (na sliki 3 so deltoidi sivo obarvani).

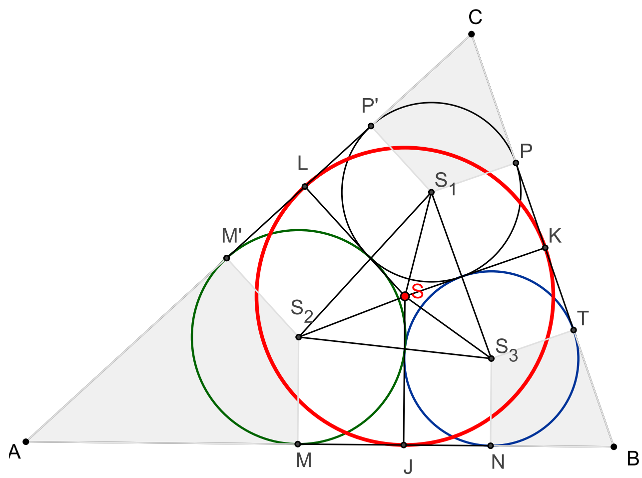
Najprej trikotniku ABC odrežemo te tri deltoide (slika 4).

Nato s škarjami zarežemo še po daljicah SS_1, SS_2 in SS_3 in staknemo krajišči M in M' ter P in P'. Dobljeni lik dopolnimo do pravokotnika, kot kaže slika 5.

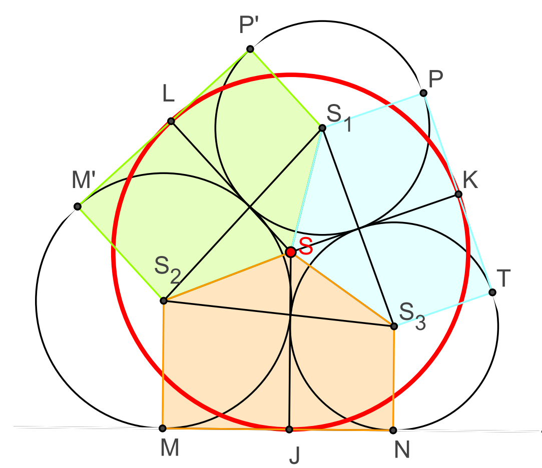
Dolžine daljic TP, $P'M'$ in MN so razdalje med dvema dotikališčema krogov s stranicami trikotnika ABC. Izračunajmo eno od teh razdalj.

Pomagamo si s skico 6. Trikotnik S_2HS_3 je pravokotni trikotnik in zanj velja

- $(r_2 + r_3)^2 = |S_3H|^2 + (r_2 - r_3)^2,$
  $|S_3H|^2 = |MN|^2 = 4r_2r_3,$



SLIKA 3.
Obarvane deltoide odrežemo.



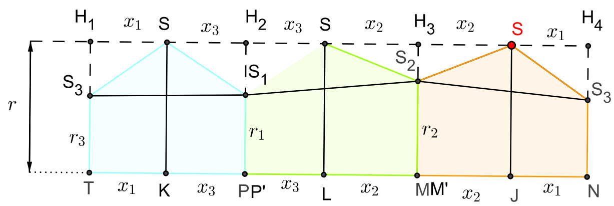
SLIKA 4.
Osrednji del razrežemo in lik razgrnemo.

- $MN = 2\sqrt{r_2r_3}$. (1)

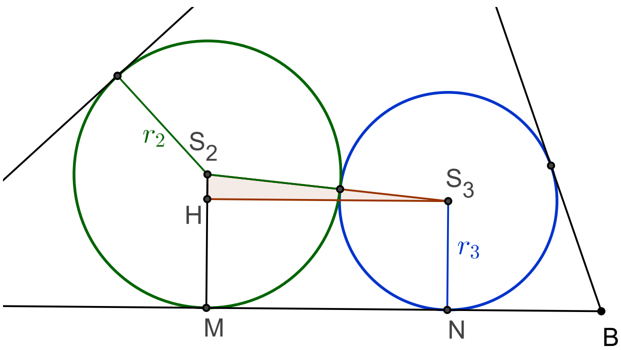
Ugotovili smo, da je razdalja med dotikališčema krogov ravno dvakratnik korena iz produkta polmerov dotikajočih se krogov (enačba 1). Zato velja

- $TP + P'M' + MN = 2(\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3}).$

Štirikotniki TPS_1S_3, $P'M'S_2S_1$ in MNS_3S_2 so trapezi, v vsakem sta osnovnici kar ustrezna polmera,



SLIKA 5.
Razgrnjeni lik dopolnimo do pravokotnika.



SLIKA 6.
Računanje razdalj med dotikališčema dveh sosednjih krogov

višine pa razdalje med dotikališči, zato so ploščine trapezov:

$$p_1 = p(TPS_1S_3) = (r_3+r_1)\sqrt{r_3r_1},$$
$$p_2 = p(P'M'S_2S_1) = (r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2},$$
$$p_3 = p(MNS_3S_2) = (r_2+r_3)\sqrt{r_2r_3}.$$

Da dobimo ploščine označenih petkotnikov, moramo k ploščinam trapezov dodati še ploščino osrednjega trikotnika $S_1S_2S_3$. Izračunamo jo po Heronovem obrazcu. Pri tem so stranice $a_1 = r_1+r_3$, $b_1 = r_1+r_2$ in $c_1 = r_2+r_3$ in polovica obsega $r_1+r_2+r_3$:

$$p(S_1S_2S_3) = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)(r_1r_2r_3)}.$$

Izračunajmo še ploščine dopolnilnih trikotnikov (na sliki 5 so označeni črtkano). Vsi so pravokotni trikotniki. Ena kateta je vedno enaka razliki dveh polmerov, drugo pa moramo izračunati.

Ozrimo se na sliko 3. Daljici BJ in BK sta enako dolgi, saj sta to odseka na tangentah iz oglišča B na trikotniku včrtanega kroga. Iz istega razloga sta enako dolgi tudi $BN = BT$, saj sta tudi to odseka na tangentah kotu β včrtanega kroga. Zato velja:

$$BJ = BK,\quad BN = BT \quad\Rightarrow\quad KT = JN = x_1,$$
$$AJ = AL,\quad AM = AM' \quad\Rightarrow\quad MJ = M'L = x_2,$$
$$CL = CK,\quad CP' = CP \quad\Rightarrow\quad P'L = PK = x_3.$$

Razdalje med dotikališčema krogov s stranicami so:

$$PT = 2\sqrt{r_3r_1} = x_1+x_3$$
$$MN = 2\sqrt{r_2r_3} = x_1+x_2$$
$$M'P' = 2\sqrt{r_2r_1} = x_2+x_3. \qquad (2)$$

Iz sistema treh enačb (enačbe 2) s tremi neznankami izračunamo x_1, x_2 in x_3:

$$x_1 = \sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_2r_1},$$
$$x_2 = \sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_2r_1}-\sqrt{r_3r_1},$$
$$x_3 = \sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_2r_1}-\sqrt{r_2r_3}.$$

Zapišimo ploščine dodanih trikotnikov (slika 5):

$$p(S_3H_1S) = \frac{1}{2}(r-r_3)x_1 = p(SH_4S_3),$$
$$p(SH_2S_1) = \frac{1}{2}(r-r_1)x_3,$$
$$p(SH_3S_2) = \frac{1}{2}(r-r_2)x_2.$$

Ploščino pravokotnika TNH_4H_1 izračunamo na dva načina. Prvi je kar po osnovnem obrazcu za računanje ploščin, to je s produktom obeh stranic:

$$p_p = 2r(\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}). \qquad (3)$$

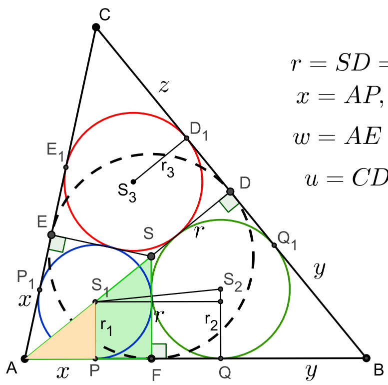
Drugi pa z vsoto ploščin trapezov, osrednjega trikotnika in dodanih trikotnikov:

$$p_p = p_1+p_2+p_3+p(S_1S_2S_3)+p(S_3H_1S)+ p(SH_4S_3)+p(SH_2S_1)+p(SH_3S_2). \qquad (4)$$

Z malo računske spretnosti lahko iz enačb (3) in (4) dobimo končni rezultat:

$$r = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1+r_2+r_3}}.$$

Polmer trikotniku včrtanega kroga smo izrazili s polmeri treh dotikajočih se krogov.



$r = SD = SE = SF$
$x = AP, \quad y = BQ \quad z = CD_1$
$w = AE = AF, \quad t = BD = BF$
$u = CD = CE \quad PQ = 2\sqrt{r_1 r_2}$

SLIKA 7.
Malfattijev račun polmerov krogov

Malfattijev izračun in konstrukcija

Poglejmo, kako je Malfatti konstruiral svoje tri kroge [4]. Vemo, da središča krogov ležijo na simetralah kotov. Če poznamo še odseke x, y in z (slika 7), potem znamo kroge načrtati. Vse uporabljene oznake lahko preberemo na sliki 7.

Problem bomo rešili, če najdemo x, y in z, to so razdalje od oglišč do dotikališč posameznega kroga s stranicama, ali povedano drugače, če poznamo tangentne odseke.

Vpeljimo oznake in zapišimo osnovne povezave, ki jih poznamo že iz prejšnjih primerov:

- $w = AE = AF, \quad t = BF = BD,$
  $u = CD = CE \quad PQ = 2\sqrt{r_1 r_2},$
  $a = t + u, \quad b = w + u, \quad c = w + t$

- $$\begin{aligned} a &= BC = AQ_1 + Q_1D_1 + D_1C \Rightarrow \\ t + u &= y + 2\sqrt{r_2 r_3} + z, \\ b &= AC = AP_1 + P_1E_1 + E_1C \Rightarrow \\ w + u &= x + 2\sqrt{r_1 r_3} + z, \\ c &= AB = AP + PQ + QB \Rightarrow \\ w + t &= x + 2\sqrt{r_1 r_2} + y. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz relacij

- $\triangle APS_1 \sim \triangle AFS \quad$ in $\quad \triangle BS_2Q \sim \triangle BSF$

s podobnimi trikotniki dobimo:

- $$\frac{r_1}{x} = \frac{r}{w}, \qquad \frac{r_2}{y} = \frac{r}{t},$$
  $$r_1 r_2 = \frac{r^2 xy}{wt}, \qquad \sqrt{r_1 r_2} = r\sqrt{\frac{xy}{wt}}.$$

Na enak način

- $\triangle BS_2Q \sim \triangle BSF \quad$ in $\quad \triangle CS_3D_1 \sim \triangle CSD \quad \Rightarrow$
  $$\sqrt{r_2 r_3} = r\sqrt{\frac{yz}{tu}}$$

in

- $\triangle APS_1 \sim \triangle AFS \quad$ in $\quad \triangle CS_3D_1 \sim \triangle CSD \quad \Rightarrow$
  $$\sqrt{r_1 r_3} = r\sqrt{\frac{zx}{uw}}.$$

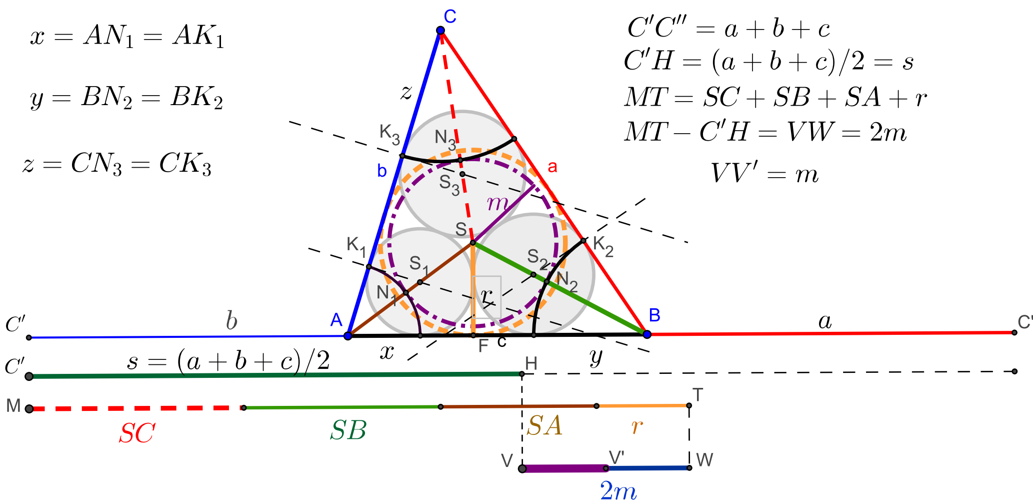
Pri tem smo z r označili polmer včrtanega kroga, z r_1, r_2 in r_3 pa polmere ostalih treh krogov. Zamenjamo izraze pod koreni v enačbah (5), ki vsebujejo polmere krogov, z novimi izrazi in dobimo

- $$\begin{aligned} x + y + 2r\sqrt{\frac{xy}{wt}} &= w + t, \\ y + z + 2r\sqrt{\frac{yz}{tu}} &= t + u, \\ x + z + 2r\sqrt{\frac{zx}{uw}} &= u + w. \end{aligned} \tag{6}$$

Pri tem so r, w, t, u količine, ki so določene s trikotnikom ABC (polmer včrtanega kroga in odseki na njegovih tangentah, to je na stranicah trikotnika). Iz sistema treh enačb (6) izrazimo x, y in z (Malfatti je za izračun baje potreboval nekaj strani):

- $$2x = w + t + u - r + \sqrt{r^2 + w^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
  $$2y = w + t + u - r - \sqrt{r^2 + w^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
  $$2z = w + t + u - r - \sqrt{r^2 + w^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}.$$

→



SLIKA 8.
Malfattijeva konstrukcija treh krogov

Velja:

- $SA = \sqrt{r^2 + w^2}$, $\quad SB = \sqrt{r^2 + t^2}$,
  $SC = \sqrt{r^2 + u^2} \quad w + u + t = s$.

Naj bo

- $2m = SA + SB + SC + r - s$.

Potem velja

- $$\begin{aligned} 2SA - 2m &= SA + SA - SA - SB - SC - r + s \\ &= SA - SB - SC - r + s = 2x. \end{aligned}$$

Torej je

- $x = SA - m$.

Odseke na stranicah trikotnika x, y in z torej lahko zapišemo kot

- $x = SA - m, \quad y = SB - m, \quad z = SC - m$.

Konstrukcija je razvidna iz slike 8. Trikotniku ABC narišemo simetrale kotov in poiščemo presečišče S. Včrtamo mu krog s polmerom r. Stranico c na obeh straneh podaljšamo za b oziroma a. Dolžina daljice $C'C''$ je obseg trikotnika ABC. Razpolovimo daljico in dobimo polovico obsega (dolžina daljice $C'H$). Poiščemo vsoto $SC+SB+SA+r$, to je MT, od nje odštejemo pol obsega s in dobimo $VW = 2m$. Razpolovimo daljico VW in dobimo m. Narišemo krog s središčem v S in polmerom m. Krog seka simetrale kotov v točkah N_1, N_2 in N_3. Velja:

- $AN_1 = SA - m = x \qquad BN_2 = BS - m = y$
  $CN_3 = SC - m = z$.

Narišemo krožne loke iz oglišč trikotnika A, B in C z ustreznimi polmeri AN_1, BN_2 in CN_3. Dobimo točke K_1, K_2 in K_3. Iz točke K_1, K_2 in K_3 načrtamo pravokotnice na stranice. Kjer te pravokotnice sekajo simetrale kotov, so središča krogov S_1, S_2 in S_3. Polmeri krogov so potem: $r_1 = S_1K_1$, $r_2 = S_2K_2$ in $r_3 = S_3K_3$.

Ugotovili smo, da se lahko iz navidez preproste naloge marsikaj naučimo. O tem, kakšna je pravilna rešitev Malfattijevega problema, pa kdaj drugič.

Literatura

[1] G. Malfatti, *Memoria sopra un problema stereotomico*, Mem. Mat. Fis. Soc. Ita. Sci 10, No. 1, 235-244, 1803.

[2] J. Lorent, *Not set in stone: nineteenth-century geometrical construction and Malfatti Problem*, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 27:3, 169-180, DOI: 10.1080/17498430.2012.676962

[3] F. Hidetoshi, T. Rothman, *Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 216-218, 293-295, 2008.

[4] G. Martin, *Geometric constructions*, UTM Springer, str. 92-95, 1998.

× × ×

Bik se pase, trava rase; drugič

Marjan Jerman

Ko sem pripravljal naloge pri Zgodovini matematike, sem iskal ideje v Newtonovi knjigi *Arithmetica Universalis* iz leta 1707. Naletel sem na zanimivo nalogo o volih, ki popasejo vso travo na pašniku. Nalogo lahko z današnjimi orodji prevedemo na sistem enačb. Prof. Boris Lavrič me je prijazno opozoril, da je Newtonovo nalogo objavil že prof. Vladimir Batagelj v rubriki Bistrovidec prve številke desetega letnika Preseka leta 1982, vole pa je zamenjal z biki. Naloga gre takole:

> *Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enaindvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih?*

Da bo naloga bolj jasna, dodajmo še, da je na začetku travnik enakomerno porasel s travo, med pašo pa trava tudi raste, in sicer enakomerno po vsem pašniku.

Že Newton je vedel, da je naloga rešljiva tudi v splošnem. Na 79. strani je med aritmetičnimi vprašanji zastavil nalogo številka XI:

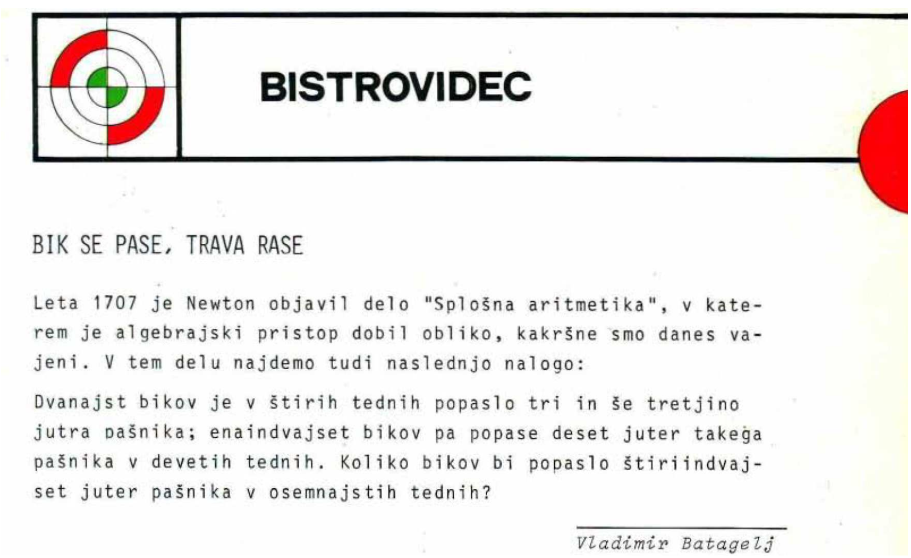
> *a_1 volov v b_1 tednih popase c_1 juter pašnika in a_2 volov v b_2 tednih popase c_2 juter pašnika. Koliko volov popase c_3 juter pašnika v b_3 tednih?*

Konkretne številke $a_1 = 12$, $b_1 = 4$, $c_1 = 3\frac{1}{3}$, $a_2 = 21$, $b_2 = 9$, $c_2 = 10$, $b_3 = 18$ in $c_3 = 24$ Newton navede kasneje kot poseben primer.

Newton nalogo reši z zvitim zaporedjem sklepnih računov in naknadnimi popravki zaradi sprotne rasti trave, mi pa se je lotimo z današnjimi orodji.

Najprej uvedimo še nekaj oznak. Naj z pomeni količino trave na jutru pašnika pred pašo, r naj pove, koliko nove trave zraste na teden na vsakem jutru, p pa označuje količino trave, ki jo en vol popase v enem tednu.

V današnjem matematičnem jeziku napišemo, da je količina popasene trave enaka vsoti začetnega sta-



BISTROVIDEC

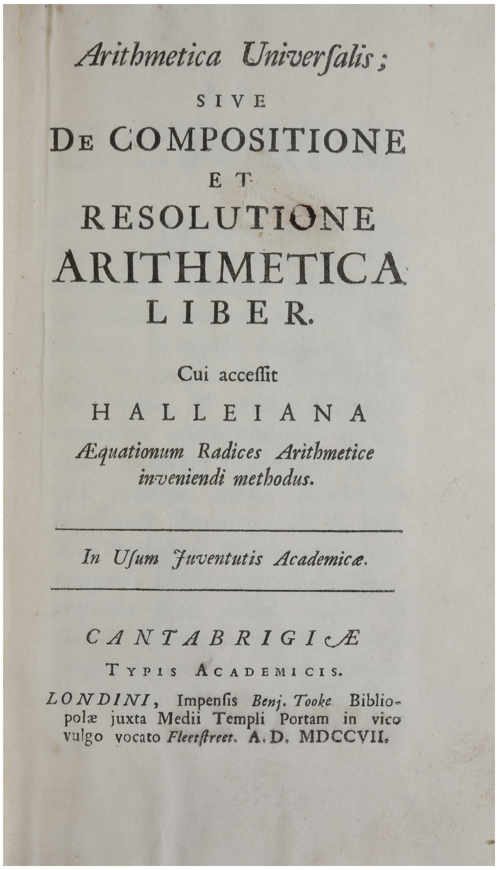
BIK SE PASE, TRAVA RASE

Leta 1707 je Newton objavil delo "Splošna aritmetika", v katerem je algebrajski pristop dobil obliko, kakršne smo danes vajeni. V tem delu najdemo tudi naslednjo nalogo:

Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enaindvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih?

Vladimir Batagelj

SLIKA 1.
Naloga v rubriki Bistrovidec, Presek 1982/83, X/1


Arithmetica Univerſalis;

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

Cui acceſſit

HALLEIANA

Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus.

In Uſum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ,

TYPIS ACADEMICIS.

LONDINI, Impenſis *Benj. Tooke* Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato *Fleetſtreet*. A.D. MDCCVII.

SLIKA 2.
Newtonova *Arithmetica Universalis*

nja in na novo zrasle trave takole:

$$\begin{aligned} c_1 z + b_1 c_1 r &= a_1 b_1 p \\ c_2 z + b_2 c_2 r &= a_2 b_2 p \\ c_3 z + b_3 c_3 r &= a_3 b_3 p. \end{aligned}$$

Na prvi pogled ne kaže najboljše, ker moramo rešiti sistem treh enačb s štirimi neznankami a_3, z, r in p. Zdi se, da manjka še ena enačba.

Najprej se na običajni način z metodo nasprotnih koeficientov znebimo neznanke z: c_2 kratnik prve enačbe odštejmo od c_1 kratnika druge in c_3 kratnik prve od c_1 kratnika tretje. Dobimo:

$$\begin{aligned} c_1 b_2 c_2 r - c_2 b_1 c_1 r &= c_1 a_2 b_2 p - c_2 a_1 b_1 p \\ c_1 b_3 c_3 r - c_3 b_1 c_1 r &= c_1 a_3 b_3 p - c_3 a_1 b_1 p \end{aligned}$$

ali bolj urejeno:

$$\begin{aligned} r c_1 c_2 (b_2 - b_1) &= p(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2) \\ r c_1 c_3 (b_3 - b_1) &= p(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3). \end{aligned}$$

Podobno kot prej se lahko znebimo spremenljivke r tako, da od $(b_2 - b_1)c_2$ kratnika druge enačbe odštejemo $(b_3 - b_1)c_3$ kratnik prve enačbe. Tako nam ostane le še spremenljivka p v enačbi

$$\begin{aligned} 0 = p\big(&(b_2 - b_1)c_2(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3) - \\ &(b_3 - b_1)c_3(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2)\big). \end{aligned}$$

Ker je razumno pričakovati, da med pašo voli pojedo vsaj nekaj trave, lahko privzamemo, da je $p \neq 0$, in dobimo iskano linearno enačbo za a_3

$$\begin{aligned} &(b_2 - b_1)c_2(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3) - \\ &\quad (b_3 - b_1)c_3(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2) = 0, \end{aligned}$$

ki ima v primeru $b_1 \neq b_2$ rešitev

$$a_3 = \frac{c_3\big(a_2 b_2 c_1 (b_3 - b_1) + a_1 b_1 c_2 (b_2 - b_3)\big)}{(b_2 - b_1) b_3 c_1 c_2}.$$

Radoveden bralec lahko preračuna zgornje sisteme enačb tudi v primeru $b_1 = b_2$. Dobil bo dodatne pogoje za smiselnost podatkov v nalogi.

Zanimivo je, da nas matematični občutek na začetku ni varal. Dobili smo enoparametrično rešitev. Vrednost p je poljubna, od nje sta odvisni vrednosti z in r. Na srečo pa je vrednost a_3 v primeru $b_1 \neq b_2$ enolično določena.

Sedaj lahko rešimo staro nalogo iz Preseka tako, da vstavimo v zgornjo formulo ustrezne številke in dobimo $a_3 = 36$. Z besedami: šestintrideset bikov popase štiriindvajset juter travnika v osemnajstih tednih.

Naloga ima še dodatno zgodovinsko vrednost. Leta 1835 je bila objavljena kot zadnja naloga med mešanimi problemi v Emersonovi knjigi *North American Arithmetic*. Emerson je brez omembe Newtona nalogo prepisal, vmešal pa se je še tiskarski škrat, ki je tretjino spremenil v polovico, $c_1 = 3\frac{1}{2}$. Junija 1835 so ponudili 50 dolarjev (kar je glede na ameriško inflacijo enakovredno današnjim 1321 dolarjem) za najboljšo rešitev naloge. Posebna komisija je med 112 odgovori našla 48 pravilnih. Nagrado je dobil James Robinson, rešitev pa ni tako zelo lepa kot v primeru originalne naloge, $a_3 = 37\frac{113}{175}$.

× × ×

Očala na koncu nosu

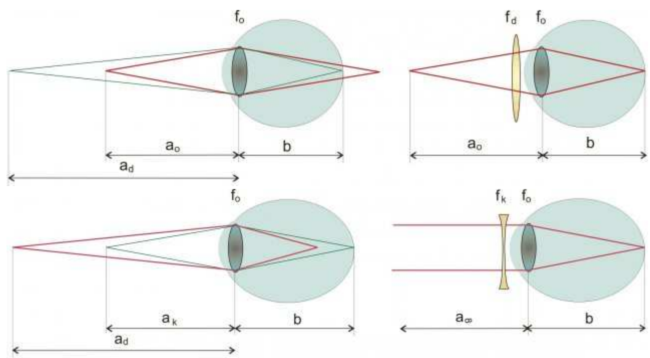
Jože Rakovec

→ Predvsem daljnovidne (tiste, ki na daleč vidijo dobro, na blizu pa ne) pogosto vidimo, da nosijo očala na koncu nosu. Glavni razlog je, da imajo nad očali nemoten pogled na oddaljene predmete, saj za daleč korekcijskih leč ne potrebujejo. Ob tem pa se spremeni tudi lomna učinkovitost leč. O tem v nadaljevanju.

SLIKA 1.
Daljnovidnež pogosto gleda na daleč preko očal, na blizu pa gleda navzdol skozi leče. Na sliki bivši ameriški predsednik Bill Clinton (www.concordmonitor.com/Archive/2016/01/BillClintonConcord-cm-012116).

Leče so pri pomiku na konec nosu tudi precej nagnjene, a pri pogledu navzdol k časopisu ali k delu na mizi je pogled vseeno približno vzdolž osi leč.

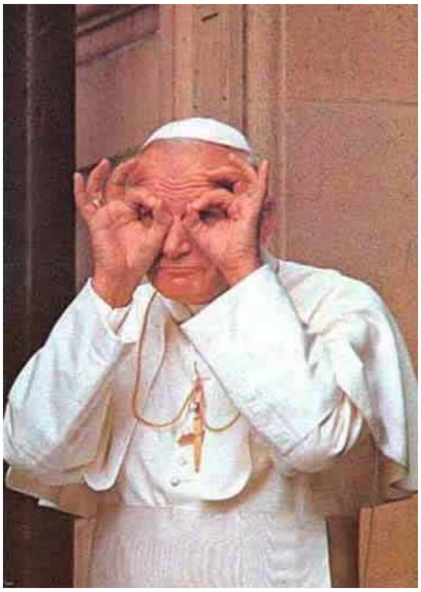
Za dober vid mora slika v očesu nastajati na zadnji steni očesa, na mrežnici, kjer so čutnice za vid. Daljnovidnim slika v očesu nastaja za očesno mrežnico: ali zato, ker imajo oko nekaj krajše od običajnega, ali pa zato, ker njihova očesna leča premalo močno zbira žarke. Ta drugi vzrok se pojavi pri skoraj vseh starejših ljudeh, ko njihove očesne mišice ne morejo več dovolj močno od strani pritisniti leče, ki je zato preveč ploska, premalo izbočena (premalo »napihnjena«), torej premalo zbiralna. Zato imajo v očalih dodatne zbiralne (izbočene, konveksne) leče. Kratkovidni imajo ravno obratno napako; pri njih slika nastaja pred očesno mrežnico: ali zato, ker je njihovo oko predolgo, ali pa zato, ker njihova očesna leča premočno zbira žarke (je preveč izbočena). Zato potrebujejo v očalih dodatne razpršilne (vbočene, konkavne) leče.



SLIKA 2.
Daljnovidno oko je prekratko (ali pa leča v njem prešibka), zato slika ne nastane na mrežnici, ampak za njo. Kratkovidno oko pa je predolgo (ali pa leča v njem premočna), zato slika nastaja pred mrežnico (iz spletnega učbenika fizike si.openprof.com/wb/opti\%C4\%8Dne_naprave?ch=206#Kratkovidno_oko).

Pri ljudeh, ki nimajo očal, a bi jih v resnici potrebovali, pogosto vidimo nekatere tipične načine, s katerimi si pomagajo, da bi bolje videli. Daljnovidni odmikajo knjigo ali časopis, saj na daleč vidijo bolje. To gre, dokler »roke ne postanejo prekratke« – takrat je pač treba po očala. Kratkovidni brez očal pogosto gledajo skozi priprte veke. S tem zmanjšajo →

odprtino, skozi katero svetloba vstopa v oko (efektivno zmanjšajo odprtino zenice – to je »zaslonko«). Pri majhni odprtini je slika namreč ostrejša. Manjšo »zaslonko« lahko dobimo tudi pri gledanju skozi majhno luknjico kot na sliki 3.

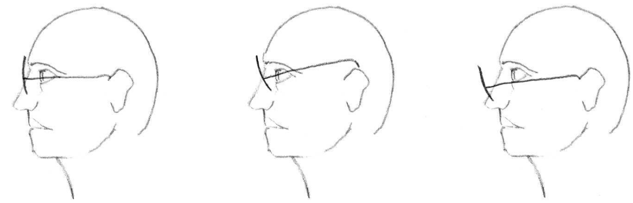


SLIKA 3.
Pokojnega papeža Janeza Pavla II. je moč na kar nekaj fotografijah ali TV posnetkih videti, da si je zožil »zaslonko« tako, da je gledal skozi majhno luknjico, ki si jo je ustvaril tako, da je kazalec tesno zvil ob palec (www.evangelicaloutreach.org/images/Pope-John-Paul-II-Eyes.jpg).

Pri kratkovidnih z očali včasih opazimo, da repke očal zadaj dvignejo nad ušesa, redkeje pa, da bi očala spustili do konca nosu. Na oba načina gledajo skozi leče postrani, ne pa vzdolž osi leče pravokotno na lečo skozi njeno sredino (kar bi bilo sicer najbolje). Zakaj? Kaj se zgodi, če skozi lečo gledamo »postrani?

Kje na nosu morajo biti očala?

Oftalmologi in optiki priredijo očala tako, da jih nosimo na grebenu nosu, tako da so leče na razdalji d_0 od vrha punčice očesa[1]; običajno je ta razdalja



SLIKA 4.
Z očali je najbolje gledati »naravnost«, torej vzdolž osi leč v očalih (levo). Včasih pa kratkovidneži dvignejo repke očal nad ušesa in gledajo poševno skozi očala (sredina) – žarki od oddaljenih predmetov pridejo takrat glede na os leče »od zgoraj«; to jim očitno pomaga bolje videti. Pogled poševno skozi leče bi imeli tudi, če bi spustili očala na konec nosu – toda tedaj se ne bi leče le nagnile, ampak bi se hkrati povečala tudi razdalja od leč do oči, to pa bi kratkovidnežem zmanjšalo lomno učinkovitost očal.

14 mm. Pravimo, da sta dve leči lomno enako učinkoviti, če obe dajeta enako dobro sliko na mrežnici očesa. Vzemimo za primer gledanje zelo oddaljenih objektov, od katerih prihajajo k očesu vzporedni žarki. Ti se lomijo proti gorišču na mrežnici očesa. Goriščna razdalja f od leče[2] do mrežnice je vsota razdalje od leče do vrha roženice d_o, potem pa še razdalja d skozi oko od tam do mrežnice: $f = d_0 + d$. Dolžina človeškega očesa[3] je okrog 24 mm, torej je f za očala na grebenu nosu okrog 38 mm. Naj bo torej ena zbiralna leča na tej običajni razdalji f od mrežnice. Leča, ki naj na mrežnici daje enako dobro sliko, a je za x dlje od mrežnice, pa ima večjo goriščno razdaljo: $f' = f + x$. Leča dlje od očesa je za enako dober vid torej lomno šibkejša. Oftalmologi

[1] Tej razdalji rečejo verteks (latinsko vertex: vrh, maksimum; torej je verteks razdalja od vrha izbokline roženice do leče, glej npr. en.wikipedia.org/wiki/Vertex_distance). Ker smo ljudje različni, skrbni oftalmologi in optiki to razdaljo posebej izmerijo, kar je pomembno predvsem pri močnejših lečah.

[2] Pri tem zanemarimo dejstvo, da gre pri človeku z očali pravzaprav za sestav treh »leč« – tiste v očalih, pa potem roženice, ki prispeva približno tri četrtine lomne učinkovitosti očesa, ter še očesne leče, ki prispeva še četrtino. Kako pridemo do efektivne učinkovitosti sestava več leč, razloži Gullstrandova enačba (glej npr. instrukcije.net/wp-content/uploads/2013/08/lece.pdf.). Razlaga enačbe za učinkovistost leč je npr. na drdrbill.com/downloads/optics/ophth-optics/Lens_Effectivity.pdf

[3] Po en.wikipedia.org/wiki/Human_eye#Size.

in optiki večinoma ne govorijo o goriščnih razdaljah, ampak o dioptrijah, ki so obratne vrednosti goriščnih razdalj.

Torej je za prvo lečo $D = 1/f$, za drugo, šibkejšo, za x dlje od očesa, ki pa daje na mrežnici enako dobro sliko: $D' = 1/(f + x)$. Ko obe enačbi povežemo, dobimo

$$D' = \frac{D}{1 + xD}.$$

Na večji razdalji od oči bi daljnovidnežem ($D > 0$) za dober vid torej zadostovala tudi šibkejša leča (delimo z več kot ena, torej je D' manjši kot D). Če pa očala z dioptrijo D pomaknemo na konec nosu, je ta dioptrija pretirana – lomna učinkovitost očal je prevelika.

Dlje od očesa je zbiralna leča, tem bolj učinkovita je njena lomnost. Zato si daljnovidneži s pomikom očal na konec nosu lahko povečajo lomno učinkovitost. Pri kratkovidnežih (z razpršilnimi lečami pa je obratno – učinkovitost leč na koncu nosu se zmanjša (negativna dioptrija $D < 0$, števec manjši kot ena).

Predvsem kratkovidneži uporabljajo tudi kontaktne leče, ki pa so na samem očesu in je zato x negativen: $x = -d_0$. Negativna dioptrija D in negativni x – števec večji od ena: zato so za kratkovidneže dioptrije kontaktnih leč praviloma šibkejše od dioptrij očal.

Še kratka pripomba: večinoma ljudje rečejo »dioptrija plus tri« ali pa »dioptrija minus pet«. V resnici bi bilo treba reči »plus tri na meter« ali pa »minus pet na meter«, saj ti vrednosti -3 ali pa -5 veljata za enote m^{-1}. (Ob uporabi col ali jardov ali pa centimetrov bi bile številke drugačne!)

Kratkovidnost in razpršilna leča

Najprej povejmo nekaj o normalnem gledanju kratkovidnežev vzdolž osi skozi razpršilno lečo. Vzemimo za primer človeka, ki ima dioptrijo $D = -5/\mathrm{m} = 1/f$. Goriščna razdalja $f = -1/5$ m $= -20$ cm. Človek s tako dioptrijo zelo dobro vidi na razdalji 20 cm – torej brez težav bere brez očal. Tisti s šibkejšo dioptrijo, npr. $-4/$ m, dobro vidi na razdalji 25 cm, z dioptrijo -3 /m na razdalji 33 cm.

Tu bomo preskočili vse razlage v zvezi z lečami, njihovimi gorišči in dioptrijami. V Preseku je bil namreč prak kratkim objavljen prispevek o fotografskih objektivih in o pravokotnem ter nagnjenem prehodu svetlobe skoznje [2]. Tam je razloženo marsikaj, kar je v zvezi tudi s temle prispevkom, poleg tega pa so leče obravnavane tudi v šoli. Zato se bomo tukaj zadovoljili kar z risbami, pri katerih za vsak prehod iz zraka v lečo ali obratno upoštevamo lomni zakon. Ta zakon je ena od zgolj dveh stvari, ki jih potrebujemo za obravnavo. Z lomnim količnikom pomnoženi sinus vpadnega kota je glede na pravokotnico na mejno ploskev konstanten: $n \sin\alpha =$konst. Za zrak je lomni količnik skoraj enak ena, za steklo pa je njegova vrednost 1,5. Tako velja

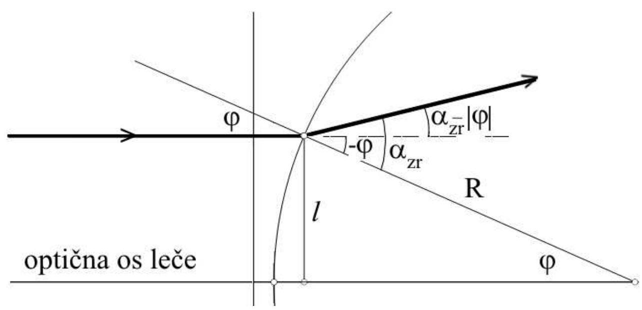
$$n_{zr} \sin\alpha_{zr} = n_{st} \sin\alpha_{st} \rightarrow \sin\alpha_{zr} = 1{,}5 \sin\alpha_{st}.$$

Sinus kota glede na pravokotnico je v zraku torej 1,5-krat tolikšen kot v steklu in zato je tudi kot α_{zr} vedno večji od kota α_{st}.

Poznati moramo tudi smer pravokotnice na ploskve leče. Pravkoten na kroglo ali krog je polmer R. Za polmer, ki seka krog na razdalji l od osi leče, velja (slika 5)

$$\sin\varphi = l/R.$$

Zgolj ti dve enačbi zadoščata in že lahko se lotimo risanja žarkov.

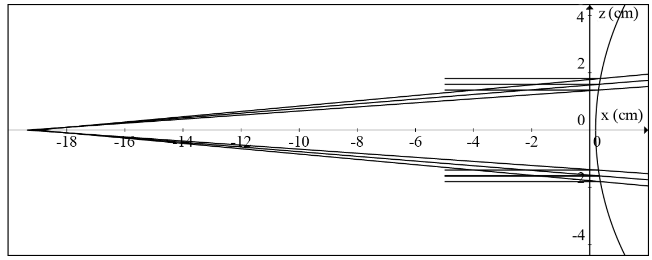


SLIKA 5.
Polmer R ima glede na os leče smer φ, ki je za vsako razdaljo l od osi leče drugačna: $\sin\varphi = l/R$. Na zadnji strani plan-konveksne leče je za žarek, ki tja pride na razdalji l od osi pravokotno na lečo, kot φ obenem tudi vpadni kot med smerjo žarka in smerjo polmera, ki je pravokoten na ukrivljeno ploskev. Narisana sta tudi vpadni in lomljeni žarek; zaradi obravnave smernega koeficienta lomljenega žarka so označeni še koti $-\varphi$, α_{zr} in $\alpha_{zr} - |\varphi|$.

Vzemimo torej plan-konkavno lečo, to je tako, ki ima eno stran ravno, drugo pa vbočeno (latinsko planus – izravnan, raven, cavea – votlina; če bi bila zadnja stran izbočena, bi bila leča plan-konveksna latinsko convexus – ukrivljen, zaokrožen). Ker je krogelna leča simetrična, lahko namesto krogle obravnavamo kar krog. Krog vbočenosti naj ima polmer R. Izbočena okrogla površina je del površine krogle s polmerom R. Za vbočeno površino pa je njena oblika odtis krogle, ki bi bila obnjo pritisnjena – ploskev leče torej ni del površine krogle, ampak »obrnjene« krogle. Zato rečemo, da je radij vbočene površine negativen. Mi izberimo vrednosti $R = -10$ cm. Iz slike 5 je tudi razvidno, da je pri leči, katere prednja stran je ravna, za žarke, ki vpadajo na lečo vzporedno z osjo leče, kot φ tudi vpadni kot v steklu na zadnjo ploskev leče. Če sprednja stran leče ni ravna ali če žarki ne vpadajo pravokotno, to ne velja več.

Na tako lečo pošljimo žarke, ki vpadajo pravokotno na prednjo stran leče na različnih oddaljenostih od sredine leče. Na sprednji strani leče se zaradi pravokotnega vpada smer žarkom nič ne spremeni. Na zadnjo stran pridejo torej vzporedno z osjo x, toda pod kotom φ glede na smer pravokotnice na krog, to je na smer polmera. Zato se jim tam smer spremeni po lomnem zakonu $1{,}5 \sin\alpha_{st} = 1{,}5 \sin\varphi = \sin\alpha_{zr}$. Kot α_{zr} velja glede na smer polmera, kot glede na smer osi leče pa po sliki $\alpha_{zr} - |\varphi|$. Znak za absolutno vrednost $||$ smo zapisali zato, ker je za negativni R in pozitivni l kot φ negativen, saj ga izračunamo iz $R = l \sin\varphi$. Splošno torej velja, da tangens kota $\alpha_{zr} + \varphi$ pove, kakšen je naklonski kot izhajajočega žarka. Tako žarke in njihove podaljšek na prednjo stran leče lahko narišemo. Za naš primer so prikazani na sliki 6 žarki za $l \pm 1{,}6$ cm ter zato, da lepo vidimo presečišča podaljškov lomljenih žarkov, še po dva pri $l = +1{,}4$ cm in $\pm 1{,}8$ cm.

Podaljški žarkov na sprednjo stran se vsi sekajo v skoraj isti točki – v navideznem gorišču pri približno -19 cm. Zakaj ne pri -20 cm, kjer je gorišče po enačbah za tanke leče in za žarke skozi lečo blizu središča leče? Zato, ker naša leča ni zelo tanka in ker žarki ne gredo skoznjo zelo blizu središča leče. Zakaj pa se ne sekajo točno v isti točki? Spet zato, ker ne prehajajo skozi lečo blizu njenega središča, ampak na nekaj večji oddaljenosti od središča leče. Ta pojav se imenuje sferična aberacija (krogelni odklon; sl.wikipedia.org/wiki/Sferna_aberacija)[4]. Razlike medsebojne oddaljenosti navideznih gorišč pa so v našem primeru majhne: presečišča so pri $-19{,}2$ cm, pri $-19{,}3$ cm in pri $-19{,}4$ cm. Aberacija je torej za pravokotni vpad žarkov skoraj zanemarljiva. Jo je pa pri očalih mogoče popraviti, denimo tako, da prednja stran leče ni ravna, temveč primerno izbočeno oblikovana, ravno toliko, da aberacijo odpravi. Tudi zato (pa ne samo zato!) so leče v očalih konveksno-konkavne (izbočeno-vbočene).



SLIKA 6.
Vzporedno vpadajoči žarki se na plan-konkavni leči razhajajo. Njihovi podaljški na prednjo stran leče se pri stekleni leči s konkavnim polmerom $R = -10$ cm sekajo pri približno -19 cm, vendar pa ne vsi točno v isti točki. (Zato, da vstopni žarki ne motijo slike tam, kjer se podaljški lomljenih žarkov sekajo, so njihove smeri nakazane samo s kratkimi daljicami.)

Nagnjena očala

Na srednji sliki 4 smo prikazali, kako včasih kratkovidneži nagnejo svoja očala, če se jim zdi, da vidijo oddaljene predmete premalo ostro. Podobno kot pri pravokotnem vpadu obravnavajmo še ta primer. Ob nagibu leče okrog horizontalne osi skozi središče leče ne velja več simetrija glede na os leče, ampak se lomnost leče spremeni vzdolž smeri gordol, lomnost vzdolž smeri levo-desno pa ostane (če pa bi lečo zavrteli okrog vertikalne osi, pa bi bilo obratno). Za obravnavo pa je vseeno, ali vzamemo, da je leča nagnjena in so vpadajoči žarki vzporedni osi leče, ali pa, da je leča navpična in so vpadajoči žarki nagnjeni glede na os x. Mi izberemo ta način.

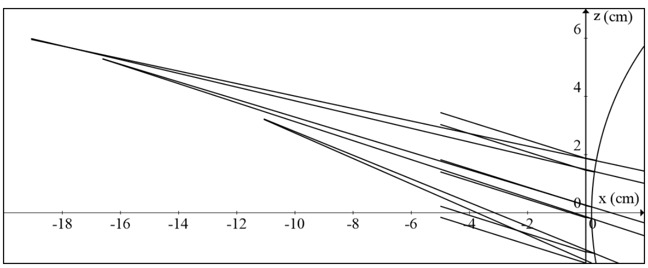
[4] sferična aberacija; grško sphaira, latinsko sphaera – krogla, latinsko aberratio – odklon

Sedaj je treba tudi za prehode v steklo in skozenj steklo nekaj več poračunati, a vsaj na ravni prednji strani leče so vpadni in lomni koti za vse žarke na kateremkoli delu leče enaki. Spet zadoščajo samo lomni zakon ter podatka o lomnem količniku za steklo n_{st} in o polmeru vbočene strani leče R. Seveda moramo ves čas paziti na to, da upoštevamo prave vpadne in lomne kote – ti se sem in tja po leči razlikujejo.

Ker ni več simetrije glede na os leče, velja nadaljnja obravnava samo za ozek pas vzdolž vertikalne osi. Izberemo si vpadne žarke pod takim kotom α_{zr_1}, da je $\sin\alpha_{zr_1} = 0{,}3$ in potem $\sin\alpha_{st_1} = \sin\alpha_{zr_1}/1{,}5 = 0{,}2$ (torej sta $\alpha_{zr_1} = 17{,}46°$ in $\alpha_{st_1} = 11{,}54°$ glede na os x). Na zadnjo stran leče pridejo skozi steklo žarki pod vpadnim kotom $\alpha_{st_2} = \alpha_{st_1} + \varphi$, (spet upoštevamo, da je za negativni R in pozitivni l kot φ negativen), lomni kot α_{zr_2} pa dobimo iz lomnega zakona $\sin\alpha_{zr_2} = 1{,}5\sin\alpha_{st_2}$. Smerni koeficienti izstopnih žarkov so $-\operatorname{tg}(\alpha_{zr_2} + \varphi)$. Poiščemo presečišča in narišemo premice in daljice žarkov. Izberemo po dva bližnja žarka okrog $l = 1{,}6$ cm, okrog $l = 0$ in okrog $l = -1{,}4$ cm, torej žarke, ki iz leče skozi ukrivljeno zadnjo ploskev izstopajo pri $l = +1{,}8$ cm in $+1{,}4$ cm, pri $l = +0{,}2$ cm in $-0{,}2$ cm, ter še dva, ki izstopata pri skozi ukrivljeno zadnjo ploskev leče pri $l = -1{,}4$ cm in $-1{,}8$ cm. Rezultat je prikazan na sliki 7.

Pari podaljškov žarkov na sprednjo stran leče se sekajo na precej različnih razdaljah od leče – goriščne razdalje f in dioptrije so za različne dele leče različne. Za gornji par žarkov je navidezno gorišče $f = -20{,}0$ cm, dioptrija torej $D = -5$ /m, za srednji par žarkov je navidezno gorišče pri $f = -17{,}5$ cm, dioptrija torej $D = -5{,}7$ /m, za spodnji par žarkov pa velja $f = -12{,}0$ cm, dioptrija pa $D = -8{,}3$ /m. Torej nagibanje leče pomeni okrepitev lomnosti po večini površine leče, toda hkrati tudi močno različne goriščne razdalje – torej močno sferno aberacijo.

Nagibanje leče spremeni samo dioptrijo v vertikalni smeri, nič pa dioptrije za horizontalno smer – ta bi se spremenila, če bi lečo zasukali levo-desno. Dioptrija za vertikalno smer je tem bolj povečana, čim bolj spodaj prehajajo žarki skozi lečo – v našem primeru celo močno povečana, do $D = -8{,}3$ /m. Dioptrija za horizontalno smer pa ostane enaka prejšnji $D = -5$ /m. Leče s tako različnimi dioptrijami za eno ali drugo smer so torej s cilindričnim (valjastim) popravkom dopolnjene sferične (krogelne) leče. Taka očala z delno cilindričnimi lečami nosijo ljudje z astigmatizmom – to so tisti, katerih oko, roženica ali pa očesna leča niso v vse smri enako ukrivljeni[5].



SLIKA 7.
Podaljška žarkov, ki prehajata skozi lečo zgoraj, se sekata najdlje od leče, tista dva skozi spodnji del leče pa najbliže leči. Zato, da se presečišča dobro vidijo, so podaljški žarkov levo na sprednji strani leče narisani samo do presečišč, vpadni žarki pa samo kot daljice blizu leče.

Ali nagib očal ali morda očala na koncu nosu?

Okulisti kratkovidnežem ponavadi ne predpišejo točno tiste dioptrije, za katero se pri pregledu izkaže, da ob njej na daljavo najbolje vidijo, ampak raje leče z malo šibkejšo lomnostjo. Po klasični razlagi naj bi jih to ščitilo pred napredovanjem kratkovidnosti oziroma pred potuho očem glede prilagajanja leče gledanju na različne daljave – oči naj bi se na boljšo sliko prehitro navadile[6]. Zato si nekateri občasno zaželijo nekaj ostrejši vid; za kratek čas tako daljnovidneži pomaknejo očala na konec nosu, kratkovidneži pa očala malce nagnejo – za kakih 10° ali 15° (kot na srednji sliki 4). Razložili smo, zakaj je pri nagibu del slike potem lahko tudi ostrejši, pa tudi, da vsa slika ni enako dobra – predvsem zaradi aberacije, pa tudi zaradi premočne dioptrije na spodnjem delu leč.

[5] Glej npr. `sl.wikipedia.org/wiki/Astigmatizem_(oko)`.

[6] So pa tudi oftalmologi, ki pravijo, da za te argumente ni prepričljivih podatkov – npr. `doctorbase.com/forum/post/28263/view`.

18 nadaljevanje na strani →

15 nadaljevanje s strani

Kaj pa, če bi tudi kratkovidneži očala nagnili tako, da bi jih spustili na konec nosu (kot na desni sliki 4)? S tem bi jih tudi nagnili, a obenem bi bile leče tudi dlje od očesa. Kot smo povedali že v poglavju o tem, kje na nosu naj bodo očala, to za kratkovidneže ni kaj koristno – lomna učinkovitost se za razpršilne leče pri večji oddaljenosti od očesa zmanjša.

Za konec

To, da imajo daljnovidneži pogosto očala na koncu nosu je razumljivo: na daleč tako ali tako dobro vidijo tudi preko očal, skoznja gledajo samo na blizu (ponavadi malce navzdol) in na koncu nosu imajo njihova očala tudi večjo lomno učinkovitost.

Nagibanje očal z dviganjem repkov kratkovidnežem pri izostritvi pogleda morda malce pomaga, a vseeno je bolje, da nam okulist določi tako dioptrijo, da bomo skozi očala videli dovolj dobro tudi brez nagibanja. Nagibanje namreč povzroči močno sferno aberacijo in zato tudi neenakomerno kvaliteto slike. No, če že, potem je vseeno bolje malo dvigniti repke očal, kot pa očala spustiti na konec nosu.

Nagibanje leč pa je kdaj lahko tudi zelo koristno. V že omenjenem Preseku je profesor Legiša [2] pojasnil tudi t. i. Scheimpflugovo načelo, ki pove, da z nagibanjem objektiva glede na ravnino slike (po starem ravnino filma, danes pa tipala fotoaparata) lahko dosežemo, da so vsi predeli ravne ploskve, ki jo fotografiramo, na film ali na tipalo enako ostro preslikani.

Literatura

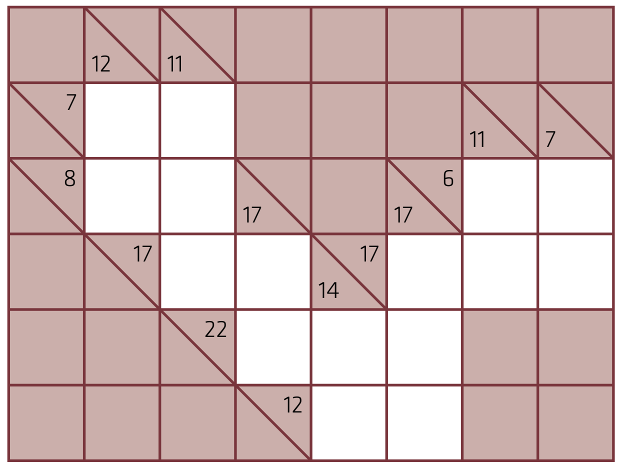
[1] Več internetnih virov, zajetih med 20. in 25. januarjem 2017.

[2] P. Legiša, *Fotografski objektivi in Scheimpflugovo načelo*, Presek 43, 2015/2016, 13–18.

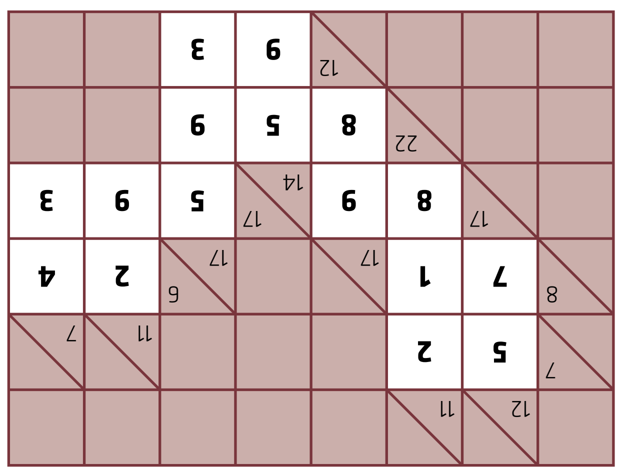
× × ×

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×

Opoldanska senca v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na treh ravninah

Marijan Prosen

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na vodoravni ravnini

Zadajmo si nalogo, da izračunamo dolžino s opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena in v severni pol usmerena ravna palica z dolžino v meče na vodoravno ravnino (tla) v kraju na severni Zemljini poluti z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu, ko je δ deklinacija Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq 23{,}5^\circ$, kar pomeni, da leži med omenjenima vrednostma. Višinski kot β Sonca opoldne je $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$.

Dolžina s opoldanske sence na vodoravni ravnini je enaka vsoti dolžin senc s_1 in s_2, torej je:

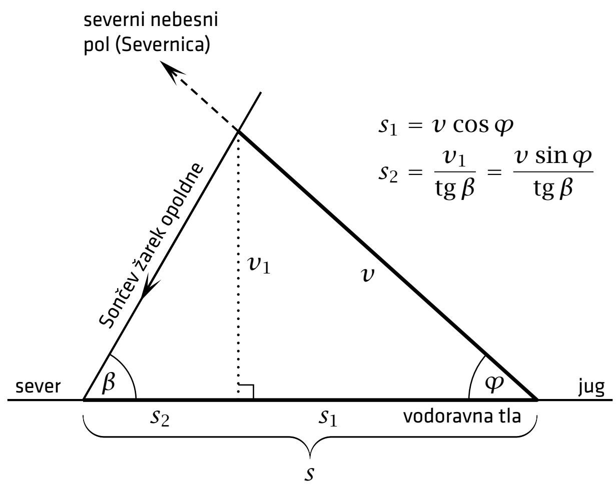
- $$s = v(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \delta)) = v\,\frac{\cos\varphi \cdot \cos(\varphi-\delta) + \sin\varphi \cdot \sin(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi-\delta)} = v\,\frac{\cos\delta}{\cos(\varphi-\delta)}.$$

Dolžino sence hitreje izračunamo po sinusnem izreku

- $$\frac{s}{v} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - (\varphi - \delta))}$$

in

- $$s = v\,\frac{\cos\delta}{\cos(\varphi-\delta)}.$$



SLIKA 1.
Dolžina sence palice opoldne je v tem primeru $s = s_1 + s_2$. Kot med palico in vodoravno ravnino je višinski kot severnega nebesnega pola in je enak zemljepisni širini φ kraja, opoldanski višinski kot Sonca pa je $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$.

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) je $s = v/\cos\varphi$ in opoldanska dolžina sence pri znani dolžini palice je odvisna le od geografske širine. Na ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = v$. Palica je vodoravna, Sončevi žarki pa padajo nanjo pravokotno. Pri nas ($\varphi = 45^\circ$) je $s = v/(\sqrt{2}/2) = v\sqrt{2}$. Na severnem polu ($\varphi = 90^\circ$) pa je opoldanska dolžina sence nedoločena, saj je višinski kot Sonca nič (Sonce je na obzorju).
- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = v\cos\delta/\cos(-\delta) = v$; dolžina sence je vse leto konstantna.
- Na severnem Zemljinem polu je $s = v\cos\delta/\sin\delta = v/\operatorname{tg}\delta$ in je senca vidna samo spomladi ter poleti, ko je Sonce nad obzorjem in doseže ob poletnem Sončevem obratu najmanjšo dolžino (minimum) okoli $2{,}3v$.

Na splošno se opoldanska dolžina sence $s = v\cos\delta/\cos(\varphi-\delta)$ pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $v\cos 23{,}5^\circ/\cos(\varphi+23{,}5^\circ)$ do $v\cos 23{,}5^\circ/\cos(\varphi-23{,}5^\circ)$. Če npr. vzamemo za $v = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od 1 m (poletni Sončev obrat) do 2,5 m (zimski Sončev obrat).

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na navpični ravnini

Zapičimo ravno palico v navpično ravnino (steno) vzhod-zahod tako, da je usmerjena proti severnemu nebesnemu polu. Podnožišče palice leži v ravnini na severni strani, vrh palice pa je spuščen na južni. Kot, ki ga oklepa palica z navpično ravnino, je $90^\circ - \varphi$, če je φ severna geografska širina kraja ($\varphi \geq 0$).

Izračunajmo dolžino sence s, ki jo opoldne od Sonca osvetljena v severni nebesni pol usmerjena ravna palica z dolžino d meče na navpično ravnino (steno) v kraju z geografsko širino φ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq +23{,}5^\circ$. Sonce je opoldne na jugu.

Dolžino s opoldanske sence te palice na navpični ravnini izračunamo po sinusnem izreku $s/d = \sin(90^\circ+\delta)/\sin(\varphi-\delta)$ in

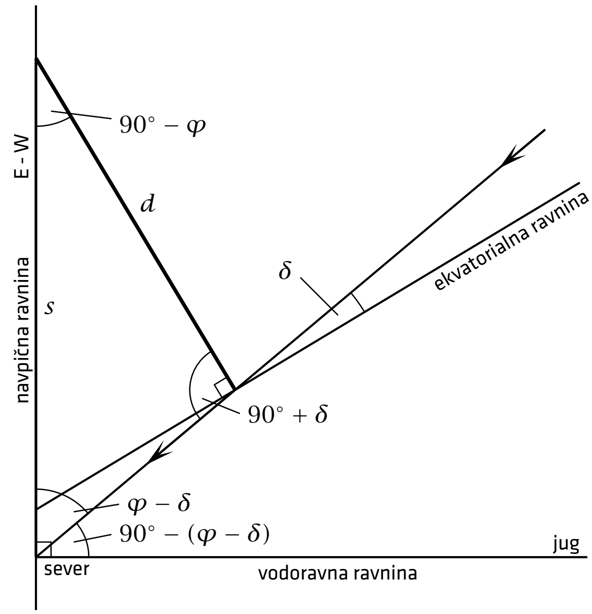
- $s = d\dfrac{\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$;

za $(\varphi-\delta) = 0 \rightarrow \varphi = \delta$ je dolžina sence neopredeljena.

Dolžina sence se med letom spreminja. Odvisna je od kraja φ in letnega časa, kar pove deklinacija δ Sonca, ki se med letom spreminja. Poleti so sence daljše kot pozimi.

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) sledi $s = d/\sin\varphi$. Dolžina sence je pri znani dolžini palice odvisna le od kraja φ. Za $\varphi = 0$ (ekvator) je senca nedoločena, saj se Sonce za kraje na ekvatorju ta dan giblje od vzhoda do zahoda natanko po nebesnem ekvatorju in je opoldne navpično. Za $\varphi = 45^\circ$ (približno v naših krajih) je $s = d\sqrt{2}$. Za $\varphi = 90^\circ$ je $s = d$ in dolžina palice se projicira sama vase, kadar je pač Sonce nad obzorjem.



SLIKA 2.
Dolžina opoldanske sence s, ki jo od Sonca osvetljena in v severni nebesni pol usmerjena ravna palica z dolžino d meče v kraju z geografsko širino φ na navpično ravnino vzhod-zahod. Opoldanski višinski kot Sonca je $90^\circ - (\varphi - \delta)$, kot med smerjo Sončevega žarka opoldne in navpično ravnino pa je $(\varphi - \delta)$. Poleti je $\delta > 0$, pozimi je $\delta < 0$, ob enakonočjih pa $\delta = 0$.

- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = d\cos\delta/\sin(-\delta) = -d/\operatorname{tg}\delta$. Dolžina sence je odvisna le od δ. Če je $\delta = 0$, je senca nedoločena. Vemo že, če je $\delta > 0$, ne pride do sence, za $\delta < 0$ pa pride (od jesenskega do spomladanskega enakonočja, torej vso jesen in zimo).
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90^\circ$) velja $s = d\cos\delta/\cos\delta = d$ za vse leto, ko je Sonce nad obzorjem (spomladi in poleti).

Na splošno se opoldanska dolžina sence s pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $d\cos(-23{,}5^\circ)/\sin(\varphi+23{,}5^\circ)$ do $d\cos 23{,}5^\circ/\sin(\varphi-23{,}5^\circ)$. Za $\varphi > 23{,}5^\circ$ je vedno zvezna krivulja, razen na severnem Zemljinem polu ob enakonočjih. Če npr. vzamemo $d = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od 1 m (zimski Sončev obrat) do 2,5 m (poletni Sončev obrat).

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na ekvatorialni ravnini

Palico z dolžino oz. višino v zapičimo navpično v ekvatorialno ravnino tako, da njen vrh kaže v severni nebesni pol. Izračunajmo dolžino s opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena palica, usmerjena proti severnemu nebesnemu polu, meče na ekvatorialno ravnino v kraju s severno geografsko širino $\varphi > 0$ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq +23{,}5^\circ$.

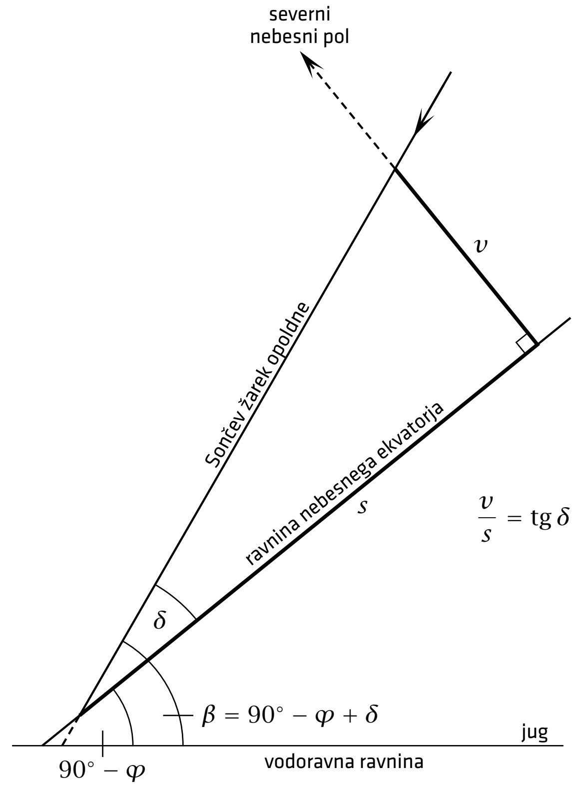
Ekvatorialna ravnina oklepa z vodoravno kot $(90^\circ - \varphi)$. V njej leži nebesni ekvator, po katerem se navidezno giblje Sonce ob enakonočjih. Sonce je opoldne na jugu. V tem primeru je opoldanska dolžina sence

- $s = \dfrac{v}{\operatorname{tg}\delta}$

in je neodvisna od φ kar pomeni, da se v vseh krajih severne geografske širine enako spreminja. Za negativne vrednost δ pa senca ni definirana, saj sence preprosto ni (glej sliko 3).

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) je dolžina sence palice neopredeljena za vse φ.
- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je palica usmerjena vodoravno proti severnemu nebesnem polu. Sence so le, če je $\delta > 0$, to je od spomladi do jeseni. Ob spomladanskem enakonočju je neopredeljena, nato se senca krajša in ob poletnem Sončevem obratu doseže najmanjšo vrednost (minimum $v/\operatorname{tg} 23{,}5^\circ = 2{,}3v$), nato se veča do neopredeljenosti ob jesenskem enakonočju. Jeseni in pozimi pa sence ni (ni vidna), saj za $\delta < 0$ ni definirana.
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90^\circ$) je palica usmerjena navpično proti severnemu polu in je ob spomladanskem enakonočju neopredeljena. Nato se krajša do najmanjše vrednosti $2{,}3v$ ob poletnem Sončevem obratu, daljša se do neopredeljenosti ob jesenskem enakonočju, potem pa Sonca sploh ni na spregled in sence ni, saj je Sonce pod obzorjem vso jesen in zimo. Nato se zadeva ponovi.



SLIKA 3.
V tem primeru je opoldanska dolžina sence $s = v/\operatorname{tg}\delta$ in je ob enakonočju neopredeljena. Definirana je le za pozitivne δ, saj samo tedaj pride do sence. Opazujemo jo lahko le od spomladanskega do jesenskega enakonočja, kar velja za vse kraje na severni Zemljini poluti.

Na splošno se torej dolžina sence $s = v/\operatorname{tg}\delta$ za vse kraje na severni Zemljini poluti v času enega leta spreminja enako: od neopredeljene vrednosti ob enakonočjih do najmanjše vrednosti $v/\operatorname{tg} 23{,}5^\circ$ ob poletnem Sončevem obratu. Če npr. vzamemo $v = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od neopredeljene vrednosti do 2,3 m (poletni Sončev obrat).

Naloge

Pri risanju grafov velja omejitev $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq 23{,}5^\circ$. Zato jih rišite od točke do točke. Pomagate si z astronomskimi efemeridami *Naše nebo*, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (tu dobite podatke za deklinacijo Sonca) →

in žepnim računalom. Grafe narišite za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Vsakič sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo $\delta|s$ in nato narišete graf.

Seveda grafe lahko skicirate, s čimer si ustvarite samo kakovostno sliko poteka senc. Grafe smiselno komentirate.

1. naloga

- Narišite graf $s = \cos\delta / \cos(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske v severni pol usmerjene ravne palice na vodoravna tla v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, to je približno tako kot pri nas.
- Narišite graf $s = \cos\delta / \cos(-\delta)$, ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske v severni nebesni pol usmerjene palice na vodoravna tla v krajih na ekvatorju.
- Narišite graf $s = \cos\delta / \sin\delta$, ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence omenjene metrske palice na vodoravna tla na severnem Zemljinem polu. Upoštevajte samo $s > 0$, ko je Sonce nad obzorjem.

Rešitve

- V času enega leta se dolžina sence spreminja približno od okoli 1 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna, to je nepretrgana.
- V času enega leta se dolžina sence ne spreminja in je vse leto konstantna 1 m.
- V času enega leta se dolžina sence spreminja od neopredeljene vrednosti do minimalne 2,3 m (ob poletnem Sončevem obratu). Opazujemo jo lahko le spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence ni, saj je Sonce pod obzorjem.

2. naloga

- Narišite graf $s = \cos\delta / \sin(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na navpično ravnino vzhod-zahod v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, to je približno tako kot pri nas.
- Narišite graf $s = \cos\delta / \sin(-\delta) = -1/\operatorname{tg}\delta$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence v severni nebesni pol usmerjene metrske ravne palice v ekvatorskih krajih na navpično ravnino. Upoštevajte le $s > 0$.
- Narišite graf $s = \cos\delta / \sin(90^\circ - \delta)$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence v severni nebesni pol usmerjene metrske palice na severnem Zemljinem polu na navpično ravnino. Upoštevajte samo $s > 0$.
- Ravno palico z dolžino d zapičimo v navpično ravnino vzhod-zahod tako, da leži v smeri sever-jug (podnožišče palice na ravnini je na severu, vrh na jugu) in oklepa z vodoravno ravnino kot $90^\circ - \varphi$ (palica leži v ekvatorialni ravnini).

Izračunajte dolžino najdaljše sence, ki jo od Sonca osvetljena palica z dolžino $d = 1$ m v naših krajih s $\varphi = 45^\circ$ opoldne meče na navpično ravnino. Razpravljajte o rezultatu. Narišite graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence tako naklonjene metrske ravne palice na navpično ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$ (približno tako kot pri nas): $s = \sin\delta / \sin(45^\circ - \delta)$: [$s = d\sin\delta / \sin(\varphi - \delta) \rightarrow s = \sin 23{,}5^\circ / \sin 21{,}5^\circ = 1{,}09$ m]

Rešitve

- V času enega leta se dolžina sence palice spreminja približno od 1 m (minimum ob zimskem Sončevem obratu) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna.
- V času enega leta se dolžina sence palice spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob zimskem Sončevem obratu. Senco lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času, spomladi in poleti pa je ni, saj se Sonce giblje po nebu za steno.
- V času enega leta se dolžina sence ne spreminja, meri 1 m, in to od spomladanskega do jesenskega enakonočja (spomladi in poleti), jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

3. naloga

- Narišite graf $s = 1/\operatorname{tg}\delta$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske v severni pol usmerjene ravne palice na ekvatorialno ravnino v poljubnem kraju severne geografske širine (tudi v tistem z geografsko širino $\varphi = 45°$, približno tako kot pri nas).

Krivulja ni zvezna, ob enakonočjih je pretrgana in vsako leto doseže minimum 2,3 m (ob poletnem Sončevem obratu).

- Izračunajte dolžino najkrajše sence, ki jo od Sonca osvetljena navpična palica z višino $v = 1$ m v naših krajih s $\varphi = 45°$ meče na ekvatorialno ravnino. Senca je definirana, ko jo opazujemo, za $\delta > 0$. Razpravljajte o rezultatu: [$s = v \sin(\varphi - \delta)/\sin\delta \rightarrow s = \sin 21{,}5°/\sin 23{,}5° = 0{,}68$ m]

Narišite ali samo skicirajte graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske navpične palice na ekvatorialno ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45°$ (približno pri nas): $s = \sin(45° - \delta)/\sin\delta$.

- Izračunajte dolžino najkrajše sence, ki jo od Sonca osvetljena vodoravna palica z dolžino $d = 1$ m v naših krajih s $\varphi = 45°$ meče na ekvatorialno ravnino. Senco opazujemo le, ko je $\delta > 0$. Razpravljajte o rezultatu: [$s = d\cos(\varphi - \delta)/\sin\delta \rightarrow s = \cos 21{,}5°/\sin 23{,}5° = 2{,}33$ m]

Narišite ali samo skicirajte graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske vodoravne palice na ekvatorialno ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45°$ (približno kot pri nas): $s = \cos(45° - \delta)/\sin\delta$.

Literatura

[1] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2006.

[2] M. Prosen, *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3, DMFA – založništvo, Ljubljana 1978.

[3] M. Prosen, *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica 39, DMFA – založništvo, Ljubljana 2003.

× × ×

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 45/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Začetek šole.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Suzana Avšič iz Mirna, Karel Rankel iz Kranja in Alen Đudarić iz Celja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Rubikovo maščevanje: algoritem za reševanje Rubikove kocke $4 \times 4 \times 4$ – 2. del

↓↓↓
Marko Jakovac

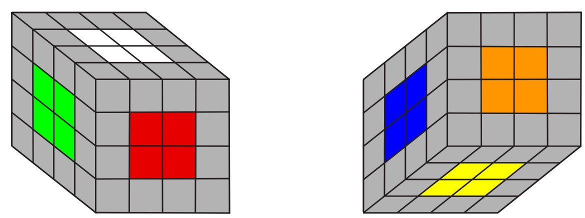
→ **V prejšnji številki revije Presek, natančneje v članku [3], smo spoznali Rubikovo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$, ki jo poljudno imenujemo tudi Rubikovo maščevanje. Za njeno reševanje smo izbrali algoritem, ki ga sestavljajo štirje koraki (enobarvne sredine, dvobarvni robovi, algoritem za Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$ in OLL/PLL parnost). Kako sestaviti enobarvne sredine, smo se že naučili, v tem članku pa bomo predstavili še preostale tri korake. Pred nadaljevanjem še enkrat preverimo, da ima naša kocka pravilno sestavljenih vseh šest enobarvnih sredin (slika 1).**

Dvobarvni robovi

Rubikovi kocki dimenzije $4 \times 4 \times 4$ bomo sestavili vseh 12 robnih vrstic tako, da bo vsaka robna vrstica imela le dve barvi (obe kockici poljubne robne vrstice bosta enaki). Algoritem bo potekal tako, da bomo najprej sestavili prvih osem dvobarvnih robnih vrstic in jih shranili v U-plast in D-plast, nato pa sestavili še zadnje štiri dvobarvne robne vrstice.

Opomba. Na slikah 2 in 5–12 bo temno siva robna vrstica predstavljala robno vrstico z dvema različnima robnima kockicama. V primeru, da je temno siva robna vrstica že ustrezna, po potrebi obrnite U-plast, da bo na ustreznem mestu vrstica z dvema različnima robnima kockicama.

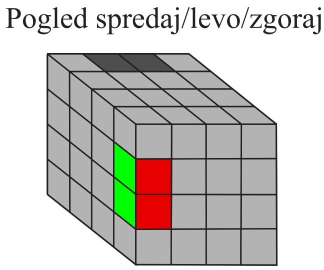
Cilj: sestaviti 12 dvobarvnih robnih vrstic.



SLIKA 1.
Pravilno sestavljenih vseh šest enobarvnih sredin

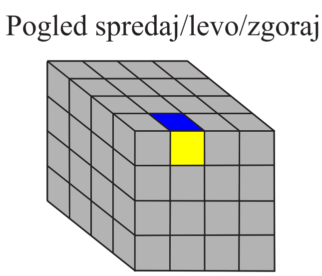
- Postavitev kocke: kocko lahko pred vsakim korakom algoritma poljubno obrnete tako, da U-plast in D-plast ostaneta na svojem mestu ali zamenjata vlogi (kocko obrnemo na glavo).
- Ponavljajte, dokler v U-plasti in D-plasti skupaj ni osem dvobarvnih robnih vrstic.
  - Ponavljajte, dokler v U-plasti in D-plasti skupaj ni osem dvobarvnih robnih vrstic in v u-plasti in d-plasti obstaja dvobarvna robna vrstica.
    - Izberite poljubno dvobarvno robno vrstico v u-plasti in d-plasti (v našem primeru zeleno-rdeča robna vrstica).
    - Če so v U-plasti že štiri dvobarvne vrstice, kocko obrnite tako, da U-plast postane D-plast in obratno (kocko obrnite na glavo).
    - Kocko pripravite, kot prikazuje slika 2, in izvedite: L^{levo}, U^{levo}, L^{desno}.

      Opomba. Ta korak zamenja dvobarvno robno vrstico v u-plasti in d-plasti z robno vrstico z dvema različnima robnima kockicama v U-plasti.



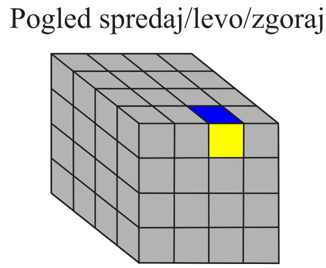
SLIKA 2.
Zamenjava dveh robnih vrstic

- Ponavljajte, dokler v U-plasti in D-plasti skupaj ni osem dvobarvnih robnih vrstic in v u-plasti in d-plasti ne obstaja dvobarvna robna vrstica.
  - Izberite poljubno robno kockico v u-plasti in poiščite njej enako drugo robno kockico (v našem primeru rumeno-modri robni kockici na slikah 3–12).
  - Če so v U-plasti že štiri dvobarvne vrstice, kocko obrnite tako, da U-plast postane D-plast in obratno (kocko obrnite na glavo).
  - Če je ena izmed izbranih robnih kockic v U-plasti, kot prikazujeta sliki 3 ali 4, izvedite: R^{desno}, U^{levo}, R^{levo}.
    Opomba. Ta korak premakne izbrano robno kockico iz U-plasti v eno izmed srednjih plasti.

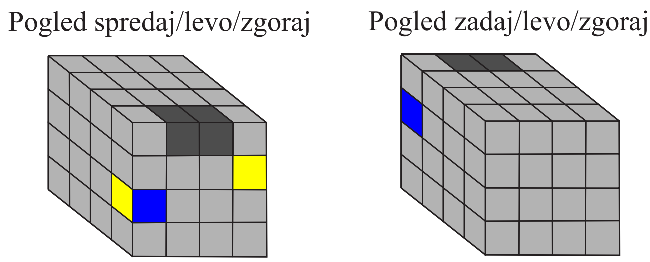


SLIKA 3.
Postavitev ene izmed dveh izbranih robnih kockic v U-plasti

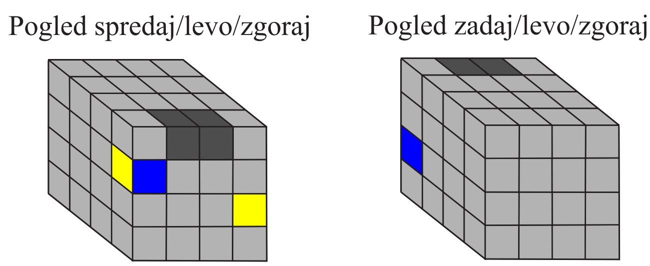
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 5, izvedite: d^{desno}, R^{desno}, U^{levo}, R^{levo}, d^{levo}.
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 6, izvedite: d^{levo}, L^{levo}, U^{desno}, L^{desno}, d^{desno}.
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 7, izvedite: d^2, R^{desno}, U^{levo}, R^{levo}, d^2.
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 8, izvedite: d^2, L^{desno}, U^{desno}, L^{levo}, d^2.
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 9, izvedite: L^2, d^2, R^{desno}, U^{levo}, R^{levo}, d^2.
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 10, izvedite: L^2, d^2, L^{desno}, U^{desno}, L^{levo}, d^2.



SLIKA 4.
Postavitev ene izmed dveh izbranih robnih kockic v U-plasti

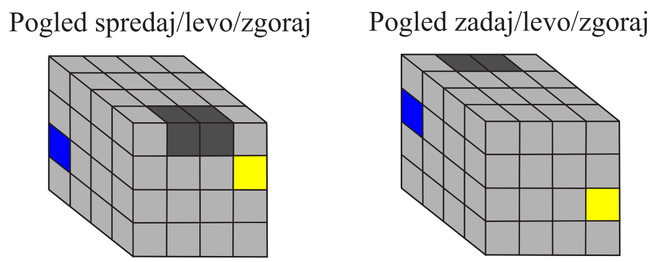


SLIKA 5.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

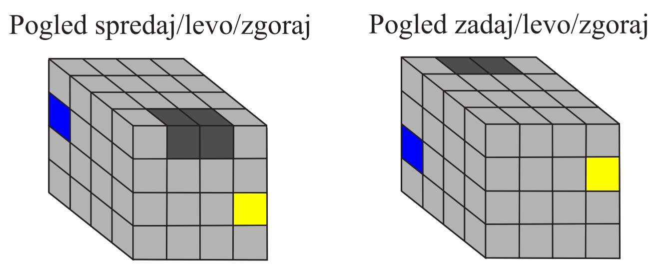


SLIKA 6.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

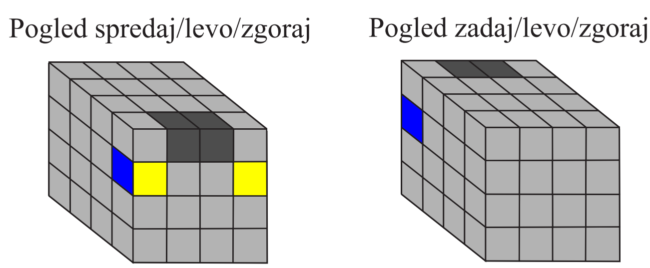
→



SLIKA 7.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic



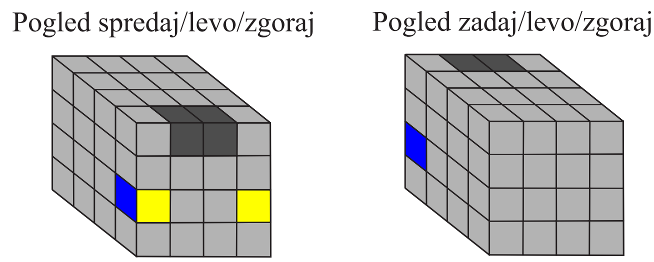
SLIKA 8.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic



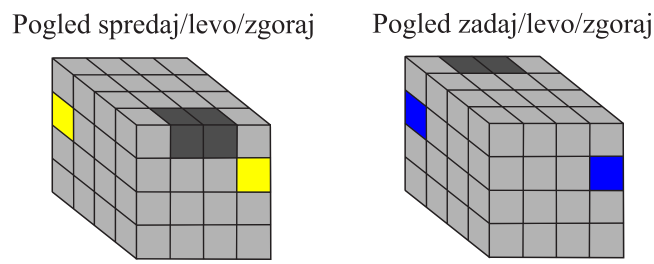
SLIKA 9.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

- Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 11, izvedite: L^2, d^{desno}, R^{desno}, U^{levo}, R^{levo}, d^{levo}.
- Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazuje slika 12, izvedite: L^2, d^{levo}, L^{levo}, U^{desno}, L^{desno}, d^{desno}.

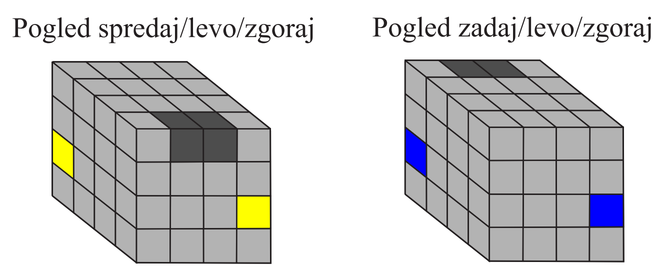
  Opomba. Koraki sestavijo dvobarvno robno vrstico dveh izbranih robnih kockic in jo zamenjajo z robno vrstico v U-plasti z dvema različnima robnima kockicama.



SLIKA 10.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

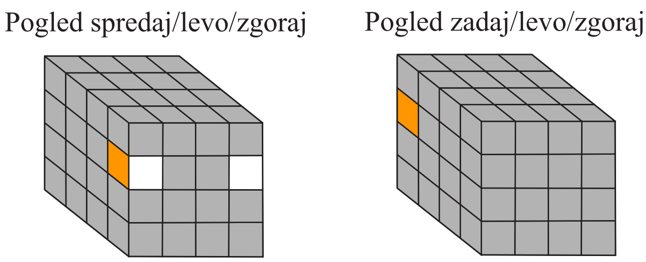


SLIKA 11.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

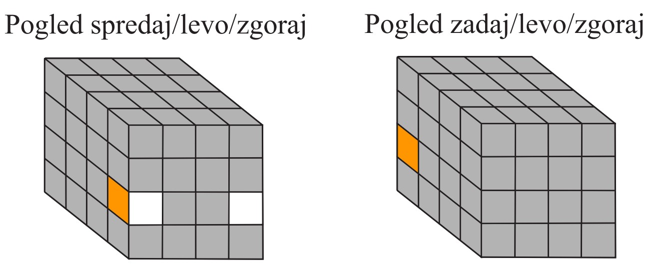


SLIKA 12.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

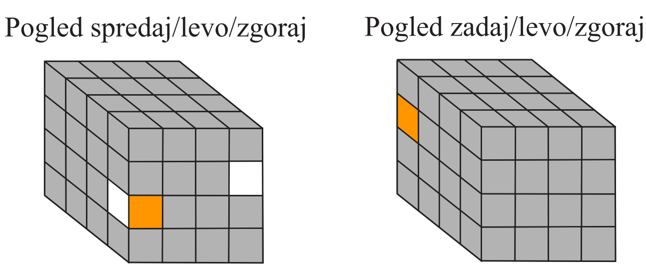
- Ponavljajte, dokler kocka ne vsebuje 12 dvobarvnih robnih vrstic.
  - Izberite poljubno robno kockico v u-plasti, ki ne sestavlja dvobarvne robe vrstice, in poiščite njej enako drugo robno kockico (v našem primeru belo-oranžni robni kockici na slikah 13–20).
  - Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazujeta sliki 13 ali 14, izvedite: d^{desno}, R^{desno}, F^{levo}, U^{desno}, R^{levo}, F^{desno}, d^{levo}.



SLIKA 13.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

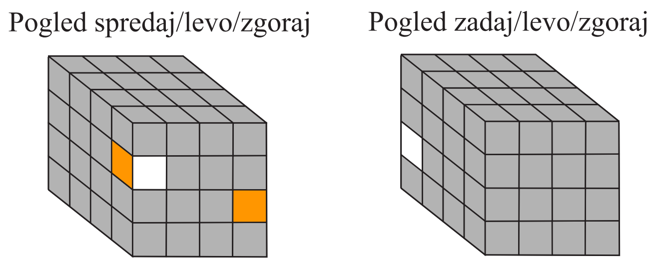


SLIKA 14.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

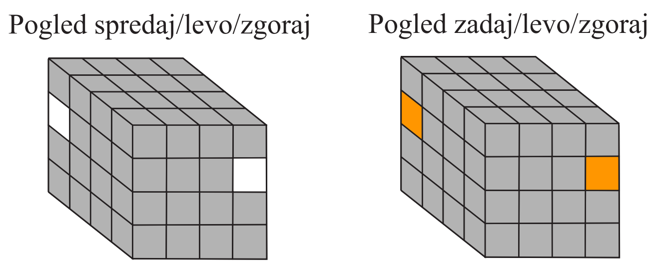


SLIKA 15.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

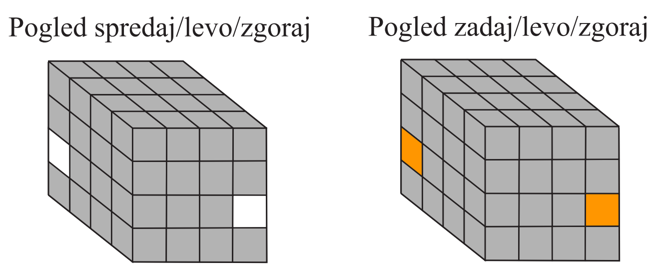
- Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazujeta sliki 15 ali 16, izvedite: L^2, d^2, R^{desno}, F^{levo}, U^{desno}, R^{levo}, F^{desno}, d^2.
- Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazujeta sliki 17 ali 18, izvedite: d^2, R^{desno}, F^{levo}, U^{desno}, R^{levo}, F^{desno}, d^2.
- Če obstaja postavitev izbranih robnih kockic, kot prikazujeta sliki 19 ali 20, izvedite: L^2, d^{desno}, R^{desno}, F^{levo}, U^{desno}, R^{levo}, F^{desno}, d^{levo}.



SLIKA 16.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

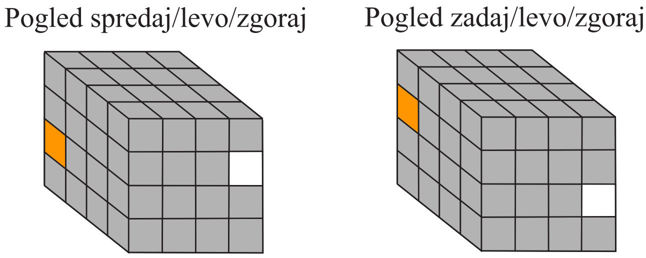


SLIKA 17.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

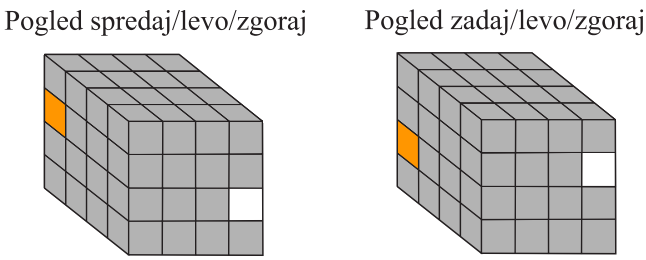


SLIKA 18.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic

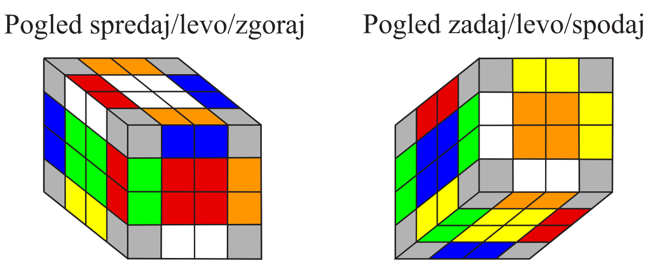
Če ste uspešno izvedli vse korake, potem bi morala kocka imeti pravilno sestavljenih vseh šest enobarvnih sredin ter 12 dvobarvnih robnih vrstic (primer na sliki 21). Najtežji del je sedaj za nami, saj sledi le še sestavljanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$ in nekaj morebitnih zaključnih popravkov na njej.



SLIKA 19.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic



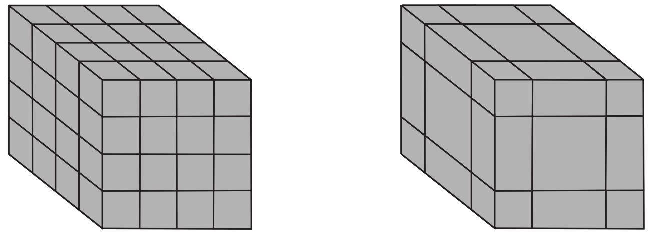
SLIKA 20.
Postavitev dveh izbranih robnih kockic



SLIKA 21.
Primer pravilno sestavljenih 12 dvobarvnih robov

Algoritem za Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$

Po uspešnem sestavljanju enobarvnih sredin in dvobarvnih robov smo Rubikovo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$ preoblikovali tako, da jo lahko rešimo s pomočjo algoritma za sestavljanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$. Najprej si predstavljajmo, da na Rubikovo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$ pogledamo, kot prikazuje slika 22. Če smo vse dosedanje korake sestavljanja naredili pravilno, bi v strukturi Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ morali prepoznati Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$.



SLIKA 22.
Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ kot Rubikova kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$

Od tu naprej je reševanje prepuščeno vsakemu posamezniku, saj poznamo veliko algoritmov, s pomočjo katerih lahko rešimo Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$. Mi se bomo v nadaljevanju osredotočili na Fridrichino metodo [4], ki je bila uporabljena tudi v članku [8]. Ta metoda, kot tudi mnoge druge, predvideva, da kocko rešujemo po plasteh. Reševanje prvih dveh plasti bi moralo potekati brez težav, in če imamo srečo, bo brez težav potekalo tudi reševanje zadnje plasti. Običajno pa ugotovimo, da je Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ v zadnjem koraku za nas prihranila še zadnje dejanje svojega maščevanja. Pri reševanju zadnje plasti se lahko zgodi, da rešujemo nerešljivo Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$. Do tega pride, ker smo pred tem ločeno sestavljali sredine in robne vrstice. Hiter razmislek pove, da lahko sredine in robne vrstice sestavimo na več kot le en način (zamenjamo diagonalni kockici v poljubni sredini, ali zamenjamo obe kockici v poljubni robni vrstici). Oba problema lahko le v nekaj korakih elegantno odpravimo s prepoznavanjem OLL in PLL parnosti, ki sta opisani v naslednjem poglavju.

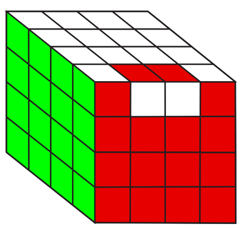
Glede na opisano težavo imamo dve možnosti, kako do konca rešiti Rubikovo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$. Ko s pomočjo algoritma za reševanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$ rešimo prvi dve plasti, se lotimo še reševanja tretje plasti in pri tem ignoriramo morebitne napake v zadnji plasti. Vse napake nato odpravimo na koncu s pomočjo algoritma za OLL in/ali PLL parnost. Bolj izkušeni sestavljavci bodo napake v zadnji plasti opazili, še preden se bodo lotili njenega reševanja, jih odpravili in nato do konca rešili zadnjo plast.

OLL in PLL parnost

Predpostavimo, da sta prvi dve plasti Rubikove kocke dimenzije 3×3×3 že rešeni, kar za nas pomeni, da imamo v Rubikovi kocki dimenzije 4×4×4 rešene že tri od štirih plasti. Kocko nato obrnemo tako, da četrta, nerešena plast postane U-plast (zgornja plast). Privzemimo, da smo s pomočjo algoritma za reševanje Rubikove kocke dimenzije 3 × 3 × 3 reševali tudi zadnjo plast. Pri tem lahko nastopita dve napaki v postaviti kock zadnje plasti, ki ju imenujemo OLL in PLL parnost.

V primeru, da na zadnji ploskvi ostane nerešena zgolj ena robna vrstica z napačno orientacijo, jo imenujemo OLL parnost. Le-ta nastane pri neustreznem predhodnem sestavljanju sredin Rubikove kocke dimenzije 4 × 4 × 4, saj bi štiri enake sredinske kockice lahko postavili tudi drugače, ko smo tvorili enobarvne sredine. Primer OLL parnosti lahko vidimo na sliki 23. Problem OLL parnosti odpravimo z naslednjim algoritmom.

Pogled spredaj/levo/zgoraj



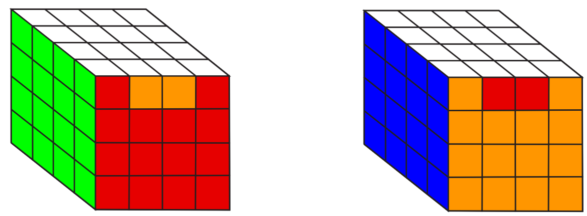
SLIKA 23.
Primer OLL parnosti

Cilj: odpraviti OLL parnost.

- Postavitev kocke: kocko postavite tako, da se nepravilno orientirana robna vrstica nahaja na robu med U-plastjo in F-plastjo (primer na sliki 22).
- Izvedite: r^2, B^2, U^2, l^{desno}, U^2, r^{levo}, U^2, r^{desno}, U^2, F^2, r^{desno}, F^2, l^{levo}, B^2, r^2.
  Opomba. Ta korak popravi orientacijo robne vrstice, a ponovno premeša U-plast (zadnjo plast).
- S pomočjo algoritma za sestavljanje Rubikove kocke dimenzije 3 × 3 × 3 ponovno sestavite U-plast (zadnjo plast).

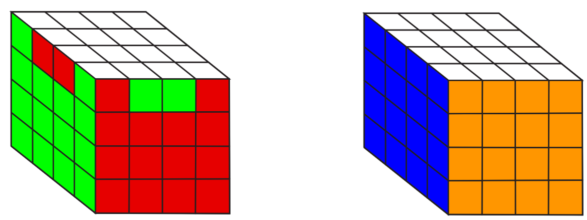
Če pa na zadnji ploskvi ostaneta nerešeni dve robni vrstici, ki sta zgolj napačno permutirani, ali pa ostaneta nerešeni dve kotni kockici, ki sta prav tako napačno permutirani, govorimo o PLL parnosti. Le-ta nastane pri neustreznem predhodnem sestavljanju robnih vrstic Rubikove kocke dimenzije 4 × 4 × 4, saj bi v poljubni robni vrstici dve enaki robni kockici lahko postavili tudi tako, da ju zamenjamo. Primere PLL parnosti lahko vidimo na slikah 24–27. Problem PLL parnosti odpravimo z naslednjim algoritmom.

Pogled spredaj/levo/zgoraj Pogled zadaj/levo/zgoraj



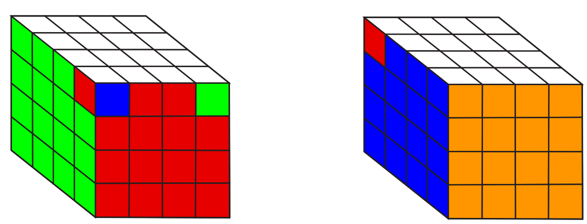
SLIKA 24.
Primer PLL parnosti

Pogled spredaj/levo/zgoraj Pogled zadaj/levo/zgoraj



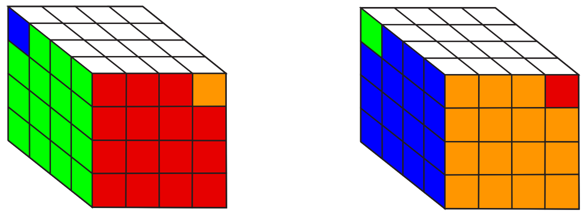
SLIKA 25.
Primer PLL parnosti

Pogled spredaj/levo/zgoraj Pogled zadaj/levo/zgoraj



SLIKA 26.
Primer PLL parnosti

Pogled spredaj/levo/zgoraj Pogled zadaj/levo/zgoraj



SLIKA 27.
Primer PLL parnosti

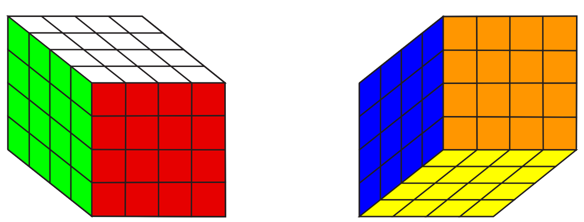
Cilj: odpraviti PLL parnost.

- Postavitev kocke: kocko postavite tako, da se ena izmed napačno permutiranih robni vrstic ali kotnih kocki nahaja na robu med U-plastjo in F-plastjo (primeri na slikah 24–27).
- Izvedite: r^2, U^2, r^2, U^2, u^2, r^2, u^2.
  Opomba. Ta korak popravi permutacijo robnih vrstic ali kotnih kockic, a ponovno premeša U-plast (zadnjo plast).
- S pomočjo algoritma za sestavljanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$ ponovno sestavite U-plast (zadnjo plast).

Zaključek

Če je vaša Rubikova kocka dimenzije $4\times4\times4$ takšna, kot prikazuje slika 28, potem ste uspešno prebrodili vse korake njenega reševanja. Čestitam! V nasprotnem primeru nič hudega, saj lahko poskusite ponovno.

Pogled spredaj/levo/zgoraj Pogled zadaj/levo/spodaj



SLIKA 28.
Sestavljena Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$

Čeprav reševanje Rubikove kocke dimenzije $4\times4\times4$ zahteva precej napora, vas bo presenetilo dejstvo, da je lažje rešiti Rubikovo kocko dimenzije $5\times5\times5$. Prav ste prebrali, tudi ta obstaja in jo poljudno imenujemo Profesorjeva kocka [5]. Za razliko od Rubikove kocke dimenzije $4\times4\times4$, se pri Rubikovi kocki dimenzije $5 \times 5 \times 5$ (tako kot pri Rubikovi kocki dimenzije $3 \times 3 \times 3$) sredinska kockica ne premika in nam nudi oporo pri njenem reševanju. Pravzaprav naš razmislek velja tudi v splošnem, da je Rubikove kocke sodih dimenzije težje reševati kot Rubikove kocke lihih dimenzij. Kaj torej še čakate? Če ste uspešno rešili Rubikovi kocki dimenzij $3 \times 3 \times 3$ in $4 \times 4 \times 4$, potem ste pripravljeni tudi na reševanje večjih Rubikovih kock. Zelo hitro boste ugotovili, da vam bodo poteze, ki ste se jih naučili do sedaj, koristile tudi pri reševanju večjih kock.

Literatura

[1] *Best Speed Cubes*, dostopno na `www.bestspeedcubes.com/4x4-rubiks-cubes/`, ogled 22. 4. 2017.

[2] *How to Solve the Rubik's Cube! (Beginner Method)*, dostopno na `www.youtube.com/watch?v=tYmtdFM1Zwk`, ogled 22. 4. 2017.

[3] M. Jakovac, *Rubikovo maščevanje: algoritem za reševanje Rubikove kocke* $4\times4\times4$ *– 1. del*, *Presek* **44** (2017/2018), 1, 22–29.

[4] *Jessica Fridrich*, dostopno na `www.ws.binghamton.edu/fridrich/`, ogled 22. 4. 2017.

[5] *Professor's Cube*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Professor\%27s\_Cube`, ogled 22. 4. 2017.

[6] *Rubik's Revenge*, dostopno na: `en.wikipedia.org/wiki/Rubik\%27s\_Revenge`, ogled 22. 4. 2017.

[7] *Solving the Rubik's Revenge* $(\times 4 \times 4)$, dostopno na `www.speedcubing.com/chris/4-solution.html`, ogled 22. 4. 2017.

[8] N. Špur, *Algoritem za reševanje Rubikove kocke*, *Presek* **42** (2014/2015), 4, 23–29.

× × ×

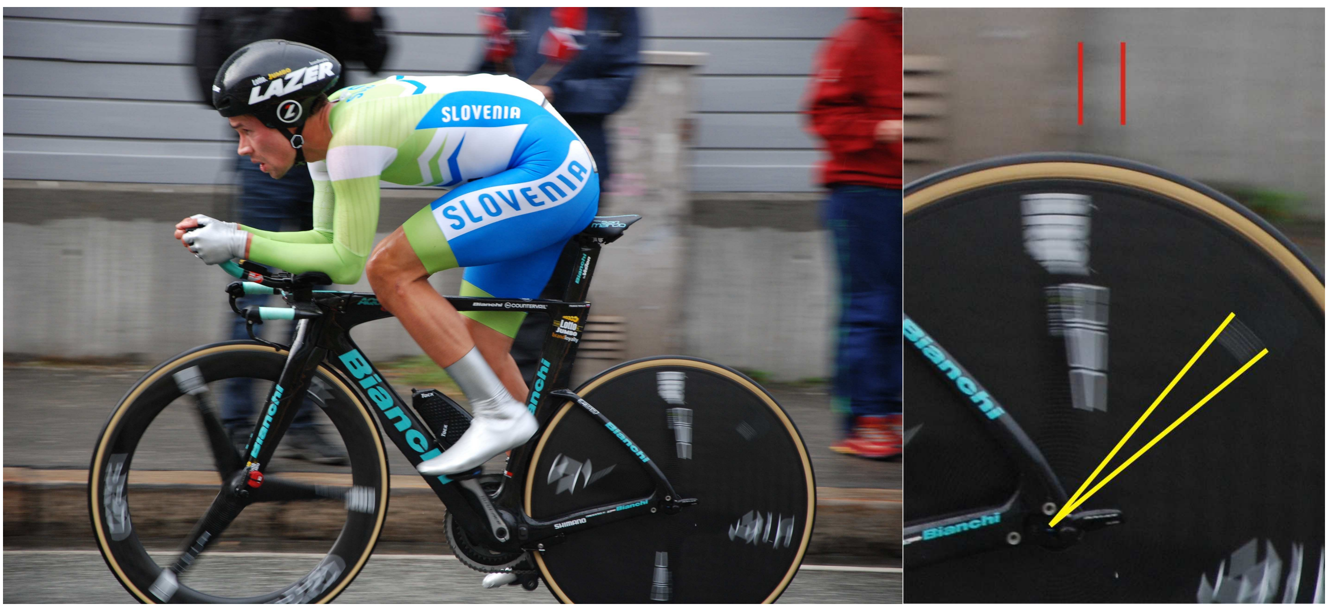
Gibanje zamrznjeno v času

Aleš Mohorič

Nedavno je bilo v norveškem Bergnu svetovno prvenstvo v kolesarstvu. Na kronometru je izvrstno drugo mesto dosegel naš Primož Roglič. Med navdušenimi navijači ob progi je bila tudi Slovenka, ki živi v Bergenu; prav ona je posnela tokratno naravoslovno fotografijo. Fotografija je posneta s posebno tehniko fotografiranja s sledenjem objektu (angleško panning).

To tehniko pogosto uporabimo, kadar želimo na fotografiji ustvariti vtis gibanja; z njo fotografiramo objekt, ki se giblje. Čas osvetlitve podaljšamo. Med fotografiranjem objekt spremljamo s kamero, tako da kamero vrtimo okrog osi, pravokotne na smer gibanja objekta in na smer, v kateri je objekt. Pri tem ostane objekt na fotografiji pri miru in oster, okolica pa se zabriše. Telesa v ozadju, ki pravzaprav mirujejo, se na sliki premaknejo vsa enako, točke na kolesu bicikla pa sorazmerno njihovi oddaljenosti od osi. To je jasen znak, da je obodna hitrost krožečega telesa sorazmerna polmeru krožnice.

Iz časa osvetlitve in dolžine sledi na fotografiji, ki jo izrazimo z dolžino znanega telesa na fotografiji, lahko izračunamo hitrost objekta. V našem primeru upoštevamo premer kolesa 66 cm, čas osvetlitve 1/200 s in dolžino sledi, ki jo na fotografiji pusti mirujoče telo, ter pridemo do hitrosti 30 km/h. Razmislite, katere podatke bi potrebovali, da ugotovite razdaljo med fotografinjo in Primožem.



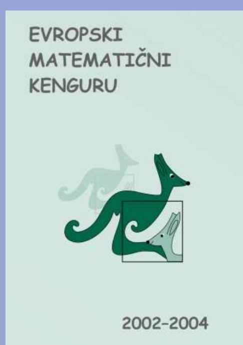
SLIKA 1.
Levo: fotografija Primoža Rogliča med izvrstno vožnjo, s katero je osvojil drugo mesto na kronometru svetovnega prvenstva v kolesarstvu, narejena s tehniko sledenja objektu. Desno: povečana podrobnost slike, z označenimi premiki točk na telesu – telesa v ozadju se med časom osvetlitve na fotografiji premaknejo vzporedno za toliko, kot je označeno z rdečima navpičnima črtama; točke, ki krožijo (točke na kolesu krožijo okoli osi), se premaknejo sorazmerno svoji oddaljenosti od osi. Fotografija: Tina Pavlin

× × ×

Matematični kenguru

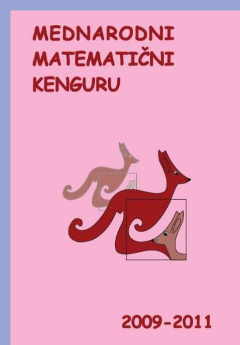
Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



10,99 EUR

18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Nagradna križanka

GLAS, TVORJEN Z ZLITJEM ZAPORE IN PRIPORE OB ZGORNJIH DLESNIH
ZMAGO SAGADIN
OVENČANI NAGRA- JENEC
RAČUNAL- NIŠKO MED- MREŽJE
ZMAGO- SLAVJE
STAROSTA
IVAN MINATTI
SPOGLED- LJIVOST
AVTOR MARKO BOKALIČ
HIŠICA NA VRTU
REKA NA JUGU PORTU- GALSKE
GRČASTA IZBOKLINA NA STEG- NENICI, TROHANTER
LEVI PRITOK BOSNE PRI DOBOJU
ITALIJAN. LETOVIŠČE Z GLASBE- NIM FES- TIVALOM
USIHANJE HRBTNEGA MOZGA
POLJSKO MESTO
NEJASNA PREDSTAVA O ČEM NA PODLAGI KRATKOTRAJ. ZAZNAVE
ODVAJALO, KI SE VBRIZGA V DANKO
PRAVILNI ŠTIRI- KOTNIK
SIMBOL
FRANCOSKI VIOLINIST IN SKLA- DATELJ (RODOLPHE)
ORODJE PRI PLUGU
ŽAMETU PODOBNA TKANINA
RUSKI LIRIK (MIHAIL)
ŽIVALSKO BLATO
NEMŠKI SKLADAT. (KASPAR)
REKA SENA PO FRANC.
NEKDANJA ADMINI- STRATORKA ZA STROJNO PISANJE
PODROČJE ALGEBRE
DANAŠNJI POTOMCI KELTOV
VZHODNI PREDEL LJUBLJANE
ZGREŠEN STREL
BLONDINEC Z ODTENKOM RUMENE BARVE
NEMŠKI HIGIENIK (WILHELM)
JAMSKI SIFON
ŽIVLJENJ- SKA DOBA RADIOAKT. DELCEV
KLJUN
STIKLJIV OTROK
MOČVIRSKA RASTLINA
VPRAŠAL- NICA PO ČASU
NAŠ SKLA- DATELJ (RISTO)
SILVA ČEH
KOVINSKA POSODA ZA DROB- LJENJE, MOŽNAR
UMSKOST
MESTO OB REKI ROCK RIVER V ILLINOISU
PROSOJNA MEGLICA
GL. MESTO FERSKIH OTOKOV
STAR IZRAZ ZA ANTRAKS
IZDELO- VALEC OSTREŠIJ
INDIJSKA DRŽAVA V ZALEDJU BENGAL. ZALIVA
VELIK PERZIJSKI MITIČNI PTIČ
OČKA
STRELJA- NJE NA LETEČE TARČE
NJEJ
POKOJNI TURŠKI TIRANSKI VODITELJ (KENAN)
TRTNI ZAVIJAČ (NAREČNO)
CEPLJENJE DRV
OBRAMBNI SKOK VRATARJA PRI NOGOMETU
ČRPALKA, DELUJOČA NA CUREK VODE ALI PARE
NASILNA PRISVO- JITEV TUJE STVARI
NAŠ STRO- KOVNJAK ZA POMOR. PRAVO (MARKO)
MOČNO POŽELENJE
NEM. MLAD. PISATELJ (MICHAEL)
ODRSKO DELO V OBLIKI DIALOGOV
KANADSKO- AMERIŠKI IGRALEC CARREY
OKROGLA PLETENA POSODA
CITROENOV OLDTIMER
MED SEBOJ POVEZANI KRAJANI, SOSESKA
AMERIŠKA USTANOVA ZA VESOLJ. RAZISKAVE
EDEN
DREVESNA ŽIVAL IZ TROPSKE AZIJE, BINTURONG
AVTOBUSNA POSTAJA
CENJEN, UPOŠTEVAN ČLOVEK

1 2 4 5 6

"SRCE" NUKLEARKE
RADIOAKT. ELEMENT, RAZPADNI PRODUKT POLONIJA

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
KRAJ NA GORIŠKEM
ŠUM VODE, KI PREHAJA ČEZ OVIRO
SKUPNOST PRVEGA IN DRUGEGA
RAČUNALNIKOV DELOVNI POMNILNIK
STAROVEŠKA JUDOVSKA MENIŠKA SKUPNOST
ZAPESTNICI PODOBEN PREDMET NA NADLAKTI
JULIJ NARDIN
VISOKO OBUVALO ZA DEŽ
8
MESTO V ALBANIJI
NEKDANJI LIBIJSKI DIKTATOR GADAFI
ZELO ŽIV OTROK, ŽIVEC
PAKISTAN
NEWYORŠKI TEHNOLOŠKI BORZNI INDEKS
ENORAZSEŽNA GEOMETRIJSKA TVORBA
REZILNI PRIBOR
IZRAZIT RT PRI VALENCII
DUHOVNI DVOJNIK FIZIČNEGA TELESA V OKULTIZMU
ZDRUŽENA LEVICA
AMERIŠKI KEMIK, NOBELOVEC ZA MIR (LINUS)
ZELO ŽELJEN UVELJAVITVE
VEČJA VALOVITA DOLINA V GORSKEM SVETU
LATINSKO IME ZA KAČO KOBRO
IDA KRAVANJA JE ? RINA
LATINSKOAMERIŠKI PLES
OPLOV MODEL AVTA
ALOJZIJ VADNAL
ENAKI ČRKI
IME FRANKOVSKIH KRALJEV
NAŠ IGRALEC NAMIZNEGA TENISA (BOJAN)
ODSTRANJENA LUPINA
ANGLEŠKO IME ZA DUNAJ
ŽENA, KI JE DALJ ČASA BREZ MOŽA
KRAJ PRI GROSUPLJU
7
FILMSKI JUNAK VENTURA
NAJFINEJŠI PESEK
PRIPRAVA ZA UBIJANJE Z UDARCEM
AJATOLA HAMENEJ
PORTUGAL. PISATELJ (FERNANDO)
NAŠ MAKROEKONOMIST (MOJMIR)
TELUR
ODPRTINICA V ZIDU
ŠPARTANSKI KRALJ
NEKD. FR. KOLESAR (JACQUES)
NAŠI MOTOKROSISTI
9
POLJE ZA MEJNO ČRTO IGRIŠČA
dMFA
HUMORISTA PUTRIH
STARI OČE
DUH, DUŠA
SOCIALNA ŽUŽELKA
PODREDNI VEZNIK
REŽISERKA IN FOTOGRAFINJA RIEFENSTAHL
NORVEŠKO MESTO PRI OSLU
PRIŽNICA V MOŠEJI
POČIVALNIK PRED TELEVIZORJEM
ŠPORT Z ŽOGO
ČRNO-BEL ROPARSKI DELFIN
CERKVENO GLASBILO
POGOSTO HRVAŠKO MOŠKO IME
3. OSEBA EDNINE
OPEČNA STENA
PLOŠČATO REZILO ŽAGE
BRITANSKA PEVKA (RITA)
STRANICA TRAPEZA
BRITANSKI MITIČNI KRALJ
GLASBENIK IN IMITATOR ARTAČ
SLOG PLAVANJA
ŠOLSKA TRAJA 45 MINUT
3
GLAVNO MESTO ŠKOTSKE
ZGOLJ
IVAN TAVČAR
ORGAN, KI IZRAŽA ZELO MAJHNO STOPNJO
SOBNA RASTLINA S PRSTASTIMI LISTI
PRIOSTRENA KONICA
RAKETNI MODELAR

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. decembra 2017**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×