

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **18** (1990/1991)

Številka 4

Strani 206–210

Franc Savnik:

RAZDELIVA SI VINO

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/18/1050-Savnik.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

RAZDELIVA SI VINO

V četrti številki 14. letnika *Preseka* je bila pod gornjim naslovom objavljena tale starodavna naloga:

“Dva prijatelja imata osem litrov vina v osemilitrski posodi. Poleg tega imata še petlitrsko in trilitrsko steklenico. Vino bi si rada razdelila na pol. Kako naj samo s prelivanju med temi tremi posodami razdelita vino?”

Anekdotično pravi, da je ta naloga usodno vplivala na življenjsko pot znamenitega francoskega matematika Poissona (*Siméon Denis Poisson*, 1781 — 1840), ki da je kot deček kazal na vseh področjih dokaj omejene sposobnosti. Ko pa je samostojno rešil nalogo o delitvi vina s pretakanjem med različno velikimi posodami, se je ogrel za matematiko in se z njo ukvarjal vse življenje.

Nalogo lahko posplošimo. Vzemimo posode A , B , C s celoštevilskimi prostorninami a , b , c , pri čemer je a sodo število in je $c \leq b$. Prva posoda naj bo polna, drugi dve prazni. Zanima nas, ali lahko vsebino posode A razpolovimo samo s pretakanjem med danimi posodami.

O izražanju: Naši predniki so za ravnanje z vinom in z drugimi tekočinami razvili obsežno in tenkočutno izrazje, o čemer pričajo glagoli *točiti*, *dotočiti*, *iztočiti*, *natočiti*, *odtočiti*, *potočiti*, *pretočiti*, *pritočiti*, *raztočiti*, *stočiti*. Žal med njimi ni takega, ki bi v celoti ustrežal potrebam naše naloge. Zadovoljili se bomo z zvezo “*natočiti iz X v Y*”, ki naj pomeni “*s pretakanjem iz X v Y izprazniti X ali napolniti Y*”.

Iz povedanega sledi, da je pred vsakim pretakanjem in po njem vsaj ena posoda polna, ali pa je ena prazna.

Trenutno razporeditev vina po posodah A , B , C opišimo z urejeno trojico celih nenegativnih števil (x, y, z) , kjer je

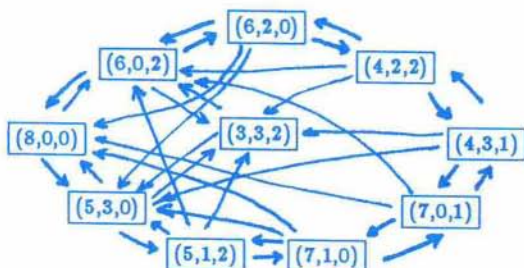
$$x + y + z = a \quad \text{in} \quad x \leq a, \quad y \leq b, \quad z \leq c.$$

Začetno stanje je tedaj podano s točko $(a, 0, 0)$, rešitev naloge pa je vsaka točka, ki jo lahko dosežemo s pretakanjem in ima vsaj eno koordinato enako $\frac{a}{2}$. Pretakanje med posodami lahko opišemo z usmerjenimi povezavami točk. Dobimo usmerjeni graf; imenujmo ga *graf naloge* $[a, b, c]$ ali kar *graf* $[a, b, c]$.

V tem članku se bomo ukvarjali izključno z nalogami, v katerih je $b + c \leq a$. Največjo skupno mero prostornin b in c bomo označevali z d . Upoštevali bomo, da je tedaj $b = b'd$ in $c = c'd$, kjer sta si števili b' in c' tuji.

Bralcu predlagam, da za ogrevanje nariše grafa $[20, 9, 6]$ in $[28, 15, 10]$

in ju primerja z grafom $[8, 3, 2]$. Videl bo, da imajo vsi trije enako število točk in isto število povezav in da so si tudi sicer zelo podobni. Pozneje bomo videli, da sta za to "odgovorna" pogoj $b + c \leq a$ in enakost razmerij $b : c$.



Slika 1. Graf $[8, 3, 2]$. V vsaki točki je vsaj ena posoda polna, ali pa je ena prazna. Naloga ima dve rešitvi: $(4, 2, 2)$ in $(4, 3, 1)$.

V nalogi $[20, 9, 6]$ lahko pretočimo naenkrat le 3, 6 ali 9 litrov vina, v nalogi $[28, 15, 10]$ pa le 5, 10 ali 15 litrov. To ni naključje; velja namreč

IZREK 1. Če je $b + c \leq a$, sta prostornini vina v posodah B in C večkratnika največje skupne mere teh dveh posod.

Trditev je očitno pravilna za začetno točko $(a, 0, 0)$. In če velja za točko (x_n, y_n, z_n) , velja tudi za točko $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$, ki jo iz prejšnje dobimo z enim natakanjem. Zaradi privzetka $b + c \leq a$ namreč lahko pretočimo iz poljubne posode v katero koli drugo posodo le večkratnik največje skupne mere d . Tako se veljavnost izreka prenese s točke $(a, 0, 0)$ na vsako drugo točko grafa.

Prostornina vina v posodi A je največja v točki $(a, 0, 0)$, najmanjša pa je takrat, ko sta posodi B in C polni: $a - b - c \leq x \leq a$. Ti oceni skupaj z izrekom 1 povesta, da so vrednosti x med števili $x_k = a - kd$, kjer je $k = 0, 1, \dots, b' + c'$. Pokazali bomo, da ob pametnem pretakanju lahko prostornina vina v posodi A doseže vsako izmed vrednosti x_k . Uporabimo postopek P1, ki je opisan na sliki 2.

V postopku P1 je posoda B pred vsakim natakanjem iz A v B prazna, po njem pa je polna, saj bi sicer posoda A bila prazna in bi zaradi $x = 0$ in $y < b$ ob privzetku $b + c \leq a$ veljalo $x + y + z < a$. Zato se pri vsakem natakanju iz A prostornina x zmanjša za b . Podobno uvidimo, da se pri vsakem natakanju v A prostornina x poveča za c .

Naj bo (x_m, y_m, z_m) m -ta točka, ki jo obiščemo v postopku P1. Očitno je $x_1 = a$. Pokažimo, da za vsako drugo dovoljeno vrednost m velja:

Če je $m = 2k$ ali $m = 2k + 1$, je $x_m = a - b - c + (kc) \bmod (b + c)$, kjer je k ustrezno naravno število in je $(kc) \bmod (b + c)$ ostanek pri deljenju $kc : (b + c)$.

- 1° Trditev je pravilna za $m = 2$, saj $(1 \cdot c) \bmod (b + c) = c$ in je $x_2 = a - b$.
- 2° Naj bo $m = 2k + 1$. Iz opisa postopka P1 je razvidno, da v točko z liho zaporedno številko lahko pridemo le z natakanjem iz B v C . Po formuli za x_m je $x_{2k+1} = x_{2k}$ in tako je tudi prav, saj pri natakanju iz B v C pustimo vino v posodi A pri miru.
- 3° Iz točke z zaporedno številko $m = 2k + 1$ stopimo v naslednjo točko. Pokazati moramo, da je

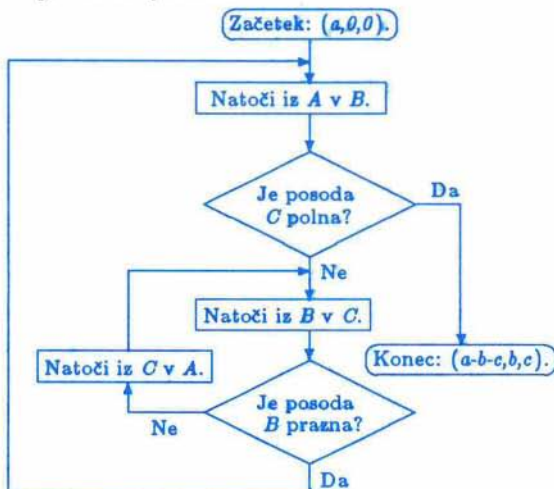
$$x_{m+1} = a - b - c + ((k + 1)c) \bmod (b + c).$$

Poglejmo v posodo B . Če je prazna, je $x_m \geq a - c$. Od tod sledi ocena $(kc) \bmod (b + c) + c \geq b + c$, zaradi katere je

$$(kc) \bmod (b + c) + c - (b + c) = ((k + 1)c) \bmod (b + c),$$

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m - b = x_m + c - (b + c) \\ &= a - b - c + (kc) \bmod (b + c) + c - (b + c) \\ &= a - b - c + ((k + 1)c) \bmod (b + c). \end{aligned}$$

Za natakanje iz A v B je trditev pravilna.



Slika 2. Postopek P1. Iz A lahko odtočimo le b litrov vina, v A ga lahko dotočimo le c litrov naenkrat. V točko z liho zaporedno številko lahko pridemo le z natakanjem iz B v C .

Če pa posoda B ni prazna, pustimo vino v njej pri miru in po natakanju iz C v A je $x_m + c < a$. Potem je

$$(kc) \bmod (b+c) + c < b+c, \text{ zato} \\ (kc) \bmod (b+c) + c = ((k+1)c) \bmod (b+c) \text{ in je}$$

$$x_{m+1} = x_m + c = a - b - c + (kc) \bmod (b+c) + c \\ = a - b - c + ((k+1)c) \bmod (b+c).$$

Formula za x_{m+1} velja tudi pri natakanju iz C v A .

Sedaj znamo izračunati prostornino x_m za vsako točko, ki jo obiščemo v postopku P1. Ne vemo pa še, ali ta postopek doseže vse točke grafa; ne vemo niti, ali se sploh kdaj konča. Naslednji premislek pokaže, da je odgovor na obe vprašanji pritrdilen.

Naj bosta b' in c' prostornini posod B in C , izmerjeni z največjo skupno mero teh dveh posod. Števili b' in c' sta si tedaj tuji in ko preteče k vrednosti $1, 2, \dots, b' + c'$, zavzame izraz $a - b - c + (kc) \bmod (b+c)$ natanko $b' + c'$ različnih vrednosti.

Denimo, da to ni res. Potem obstajata v zaporedju $1, 2, \dots, b' + c'$ različni števili k_1 in k_2 , za kateri dajeta izraza $k_1 c$ in $k_2 c$ pri deljenju z $b+c$ enak ostanek. Potem je razlika $k_1 c - k_2 c$ deljiva z $b+c$ in je produkt $(k_1 - k_2)c'$ deljiv z $b' + c'$. Ker sta si števili c' in $b' + c'$ tuji, je razlika $k_1 - k_2$ deljiva z $b' + c'$. To pa je zaradi ocene $k_1 - k_2 < b' + c'$ možno le, če je $k_1 = k_2$. Res so za $k = 1, 2, \dots, b' + c'$ vse vrednosti $a - b - c + (kc) \bmod (b+c)$ med seboj različne.

Brž ko k doseže vrednost $b' + c'$, je

$$x_m = a - b - c + ((b' + c')c) \bmod (b+c) \\ = a - b - c + ((b+c)c') \bmod (b+c) \\ = a - b - c.$$

Posodi B in C sta tedaj polni in postopek P1 se konča.

Iz povedanega sledi, da doseže v postopku P1 prostornina vina v posodi A vsako izmed vrednosti $x_k = a - kd$, kjer je $k = 0, 1, \dots, b' + c'$.

Vrednosti $x = a$ in $x = a - b - c$ nastopita le v prvi in zadnji točki, vse druge vrednosti x pa nastopijo po dvakrat. Graf $[a, b, c]$ ima potemtaka $2(b' + c')$ točk. Preštejmo še povezave. V točkah $(a, 0, 0)$ in $(a - b - c, b, c)$ izvirata po dve, v točkah $(a - b, b, 0)$ in $(a - c, 0, c)$ izvirajo po tri, v vsaki

izmed preostalih točk pa po štiri. Imamo

IZREK 2. Če je $b+c \leq a$, ima graf naloge $2(b'+c')$ točk in $8(b'+c')-6$ povezav.

Vidimo, da ob pogoju $b+c \leq a$ podatek a ne vpliva na število točk. Tako ima na primer graf [1734, 243, 162] deset točk – toliko kot graf [1734, 3, 2] ali pa graf [8, 3, 2].

Po vsem, kar smo ugotovili o grafu pretakanja, lahko nalogo o delitvi vina povemo takole:

Ali je enačba $a - kd = a/2$ z neznanko k rešljiva v številih $1, 2, \dots, b' + c'$?

Izračunamo $k = \frac{a}{2d}$ in odgovor zapišemo v

IZREK 3. Če je $b + c \leq a$, je naloga o delitvi vina rešljiva natanko takrat, kadar prostornina $\frac{a}{2}$ ne presega vsote $b + c$ in je večkratnik največje skupne mere posod B in $\bar{C}$.

V postopku P1 smo s pretakanjem iz A v B , iz B v C in iz C nazaj v A obiskali vsako točko grafa natanko enkrat. To pa lahko naredimo tudi s postopkom — imenujmo ga P2, ki je zasnovan na strategiji pretakanja $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$. Bralec se lahko sam prepriča, da iz točke $(a, 0, 0)$ do rešitve (če ta sploh obstaja) vodijo tudi druge poti. Vendar je najkrajša tista, ki jo kaže postopek P1, ali pa tista, ki jo kaže postopek P2. Njuni dolžini se da izračunati, vendar tega vprašanja tokrat ne bomo načenjali.

Franc Savnik