

Parabola med stebričkoma – ali res?



IRENA KOSI ULBL

→ Profesorica matematike na gimnaziji je želela svojim dijakom popestriti ure matematike. Namesto pouka v učilnici je organizirala matematični sprehod po mestu. Dijaki so reševali kratke matematične naloge v povezavi s predmeti, ki so jih videli:

- Katere like opazite v oknu na cerkvi?
- Kolikšna je razlika dolžin poti dveh polžev, če je prvi lezel čez te tri stopnice, drugi pa po klančini ob robu stopnic?
- Kolikšen kot pravkar oklepata urni in minutni kazalec ure na rotovškem stolpu?

Ob koncu sprehoda je profesorica vzpodbudila dijake, da še sami poiščejo kakšen matematični primer, ki ga lahko vidijo z njihove zadnje postaje s sprehoda v parku. Janu se je pogled ustavil na verigi, ki je omejevala cono za pešce (slika 1).



SLIKA 1.

Veriga med stebrički

»Profesorica, poglejte, lep primer parabole!« Profesorica je malo pomislila in dejala: »Jan, mislim, da si mi dal dobro idejo za našo naslednjo uro matematike.« Pa poglejmo, o čem bodo govorili naši dijaki pri naslednji matematični uri.

Opomba. Številne ideje za opazovanja na različnih matematičnih sprehodih najdemo v [1].

Funkcije delimo na *algebraične* in *transcendentne*. Pravimo, da je funkcija f algebraična, če odvisna spremenljivka $y = f(x)$ zadošča enačbi oblike

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

kjer so koeficienti $a_0(x), \dots, a_n(x)$ polinomi spremenljivke x . Tako med algebraične funkcije sodijo polinomi, racionalne funkcije, koreni ter njihove vsote, razlike, produkti, kvocienti, potence in kompozitumi. Funkcije, ki niso algebraične, so transcendentne. Med transcendentnimi funkcijami najpogostejše uporabljamo logaritemsko in eksponentno funkcijo, kotne in ciklotometrične funkcije, v to skupino funkcij pa sodijo tudi hiperbolične funkcije. Osnovni hiperbolični funkciji sta hiperbolični sinus (sh) in hiperbolični kosinus (ch), z njunima predpisoma pa izpeljemo še predpisa za hiperbolični tangens (th) in hiperbolični kotangens (cth).

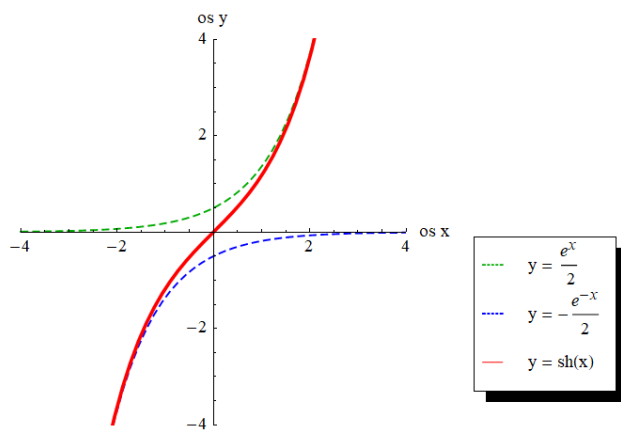
Najprej bomo spoznali predpisa za funkciji sh in ch, zapisali njuni definicijski območji in zalogi vrednosti, navedli nekaj osnovnih lastnosti ter narisali njuna grafa. Funkcijo hiperbolični sinus definiramo s predpisom

$$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pri tem smo z e označili število, ki predstavlja osnovo naravnega logaritma ($e = 2,71828\dots$). Ker sta funkciji e^x in e^{-x} definirani za vsa realna števila,



→ predstavlja ta množica tudi definicijsko območje funkcije sh. Funkcija sh je na celotnem definicijskem območju strogo naraščajoča, saj je vsota strogo naraščajočih funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $-\frac{e^{-x}}{2}$. Funkcija sh je liha funkcija. Hitro se namreč prepričamo, da je $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$ za vsako realno število x . Graf funkcije sh bo potekal skozi izhodišče koordinatnega sistema, ker je $\text{sh}(0) = 0$. Najprej narišemo graf za $x > 0$. Ko gre $x \rightarrow \infty$, se graf funkcije obnaša podobno kot graf funkcije $\frac{e^x}{2}$, saj postanejo v tem primeru vrednosti funkcije $-\frac{e^{-x}}{2}$ zanemarljivo majhne. Tako poznamo desni del grafa funkcije sh. Ker pa je funkcija liha, dobimo levi del grafa tako, da desni del prezrcalimo preko izhodišča koordinatnega sistema. Graf funkcije sh pa lahko dobimo tudi z grafičnim seštevanjem grafov funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $-\frac{e^{-x}}{2}$ (slika 2). Ugotovimo tudi, da je zaloga vrednosti funkcije sh celotna množica realnih števil.



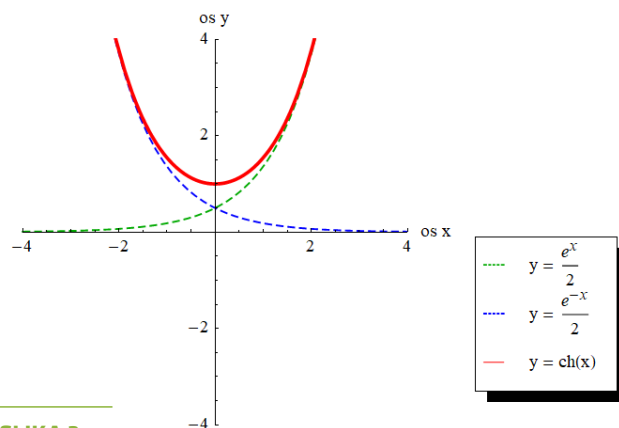
SLIKA 2.
Graf funkcije sh

Funkcijo hiperbolični kosinus definiramo s predpisom

$$\blacksquare \text{ ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Podobno kot pri hiperboličnem sinusu ugotovimo, da je definicijsko območje hiperboličnega kosinusa tudi celotna množica realnih števil. Ker je $\text{ch}(0) = 1$, bo graf funkcije sekal ordinatno os pri točki 1. Hiperbolični kosinus je soda funkcija, saj je $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$ za vsako realno število x . Graf funkcije hiperbolični kosinus je torej simetričen glede na ordina-

tno os. Podobno kot pri hiperboličnem sinusu ugotovimo, da se bo graf hiperboličnega kosinusa obnašal enako kot graf funkcije $\frac{e^x}{2}$, ko gre $x \rightarrow \infty$. Spet lahko najprej narišemo desno polovico grafa, levo pa dobimo z zrcaljenjem desne polovice preko ordinatne osi. Tudi v primeru hiperboličnega kosinusa lahko pridemo do grafa funkcije z grafičnim seštevanjem grafov funkcij $\frac{e^x}{2}$ in $\frac{e^{-x}}{2}$ (slika 3). Za funkciji hiperbolični tangens in hiperbolični kotangens navedimo le, da sta analogni ustreznima trigonometričnima funkcijama.



SLIKA 3.
Graf funkcije ch

Med hiperboličnimi in kotnimi funkcijami obstaja poleg imena še veliko drugih podobnosti. Ena izmed njih so zveze med hiperboličnimi funkcijami, ki nas spominjajo na analogne zveze med kotnimi funkcijami. Oglejmo si najpogostejšo med njimi. Neposredno iz definicije hiperboličnega sinusa in hiperboličnega kosinusa sledi zveza

$$\blacksquare \text{ ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1,$$

o čemer se lahko bralec hitro prepriča sam. Z uporabo te zveze lahko pojasnimo izvor imena hiperbolične funkcije. Oznaka hiperbolični izhaja iz dejstva, da lahko hiperbolo z implicitno enačbo

$$\blacksquare \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zapišemo v parametrični obliki

$$\blacksquare x = \pm a \text{ ch}(t), \quad y = b \text{ sh}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemer predznak + velja za desno, predznak – pa za levo vejo hiperbole. Iz zgornjega zapisa namreč sledi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1.$$

Opomba. Definicije in lastnosti obravnavanih hiperboličnih funkcij najdemo npr. v virih [2] in [4].

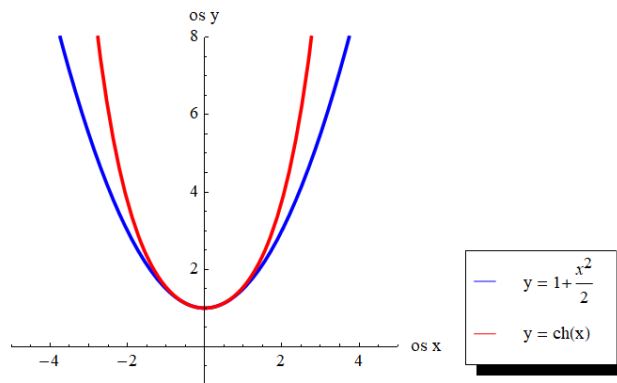
Zadnji del prispevka bomo namenili hiperboličnim funkcijam v realnem življenju. Čeprav morda ne bi pričakovali, srečamo hiperbolične funkcije na različnih področjih človekovega življenja: oceansko inženirstvo, optika, kemija ...

Najpogostejša in najbolj znana je uporaba krivulje, ki predstavlja graf hiperboličnega kosinusa. To krivuljo imenujemo verižnica in v nadaljevanju prispevka jo bomo nekoliko podrobneje opisali. Vzemimo verigo ali nit ter jo podprimo (obesimo) v dveh točkah tako, da prosto visi. Zaradi težnosti bo zavzela obliko krivulje – verižnice. Angleška beseda za verižnico *catenary* izhaja iz latinske besede *catena*, ki pomeni veriga. Galileo Galilei (1564–1642) je menil, da opisana viseča veriga zavzame obliko parabole. V to sta kasneje podvomila Christiaan Huygens (1629–1695) in Joachim Jungius (1587–1657); slednji je upravičenost dvoma potrdil z eksperimentom. Ko je bil na razpolago infinitezimalni račun, pa so Johann Bernoulli (1667–1748), David Gregory (1659–1708) in Gottfried W. Leibniz (1646–1716) ugotovili, da je verižnica krivulja z enačbo

$$y = b + a \operatorname{ch}\left(\frac{x - c}{a}\right),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$. S primerno izbiro koordinatnega sistema dosežemo, da je enačba verižnice preprostejše oblike $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$. Pri tem je a pozitivna konstanta, odvisna od dolžine verige, njenih fizikalnih lastnosti in od lege obesišč. Enačbo izpeljemo z upoštevanjem sil, ki delujejo na mirujoči del verige, ki je podprta v dveh točkah, sicer pa med njima prosto visi. Z nekaj znanja odvajanja in integriranja (med drugim uporabimo obrazec za dolžino loka krivulje) rešimo navadno diferencialno enačbo 2. reda. Izpeljavo najdemo npr. v [3]. Na sliki 4 sta v istem koordinatnem sistemu prikazani parabola z enačbo $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ in verižnica z enačbo $y = \operatorname{ch}(x)$. Iz slike razberemo, da se v bližini koordinatnega izhodišča krivulji praktično prekrivata, sicer pa ordi-

nate točk verižnice za večje $|x|$ rastejo hitreje kot ustrezne ordinate točk na paraboli.



SLIKA 4.

Parabola z enačbo $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ in verižnica z enačbo $y = \operatorname{ch}(x)$

Verižnico srečamo velikokrat tudi v vsakdanjem življenju: njeno obliko zavzamejo električni kabli med daljnovodi, preprost viseči most ali veriga med stebričkoma, ki na primer omejuje pot za pešce. Prisotna pa je tudi v gradbeništvu in arhitekturi. Oboki, zgrajeni v obliki narobe obrnjenih verižnic, so namreč zelo trdni, saj gradniki, ki jih tvorijo, podpirajo drug drugega in tako se obok pod lastno težo ne zruši. Prav tako je oblika verižnice dobrodošla tudi pri jeklenih konstrukcijah (mostovi, nosilci kupol).

Na koncu ure je Jan dvignil roko: »Profesorica, torej ... na sprehodu smo videli lep primer verižnice!« Profesorica mu je z nasmehom pritrdila.

Literatura

- [1] J. A. Adam, *Matematični sprehodi v naravo*, Knjižnica Sigma (številka 94), DMFA – založništvo, Ljubljana, 2012.
- [2] J. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematični priročnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol*, 8. ponatis, Tehniška založba Slovenije, 1984.
- [3] R. T. Smith, R. B. Minton, *Calculus*, McGraw-Hill Companies, Inc., 2002.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika I*, 9. nespremenjena izdaja, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1987.

× × ×