

KAOTIČNOST HIPERBOLIČNIH AVTOMORFIZMOV TORUSA

MITJA LAKNER¹, PETER PETEK² IN MARJETA ŠKAPIN RUGELJ¹

¹Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani

²Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 37D45, 54H20, 58F15

Že v prejšnjem članku [4] smo definirali hiperbolični avtomorfizem torusa, ki je po nekaj korakih povrnil rastrirano sliko mačke. V tem članku pa si ogledamo preslikavo na celim torusu in ugotovimo, da je kaotična po Devaneyevi definiciji. Še prej pa se seznanimo s pojmom kaotičnega sistema in si ogledamo enostaven primer.

HYPERBOLIC TORAL AUTOMORPHISMS ARE CHAOTIC

In our previous article [4] we defined the hyperbolic automorphism of the torus, returning the rastered image in few steps. Here we consider the mapping on the entire torus and find it is chaotic in the sense of Devaney. Beforehand we get acquainted with the notion of chaoticity and set up a simple example.

Uvod

V enem od prvih člankov o kaosu [5] je E. N. Lorenz obravnaval zelo poenostavljen model vremena in opazil to, čemur danes pravimo občutljivost na začetne pogoje, ki je znana tudi kot metuljev efekt: Če v Riu de Janeiru metulj zamahne s krili, to čez nekaj tednov lahko povzroči hurikan na Floridi [3]. V povsem determinističnem sistemu – saj vreme obvladujejo naravni, fizikalni zakoni – se pojavi navidezna slučajnost. Kaotičnost vremena doživljamo zadnje čase v živo, saj se z dodajanjem energije v sistem povečuje ta navidezna slučajnost in neobičajni vremenski pojavi.

Ogledali si bomo tri lastnosti: mešanje, goste periodične točke in občutljivost za začetni pogoj, ki so po Devaneyu karakterizacija kaosa.

V članku [4] smo že spoznali, da je hiperbolični avtomorfizem torusa periodičen na vsaki točki oblike $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$, kjer so i, j, N naravna števila, in so seveda te točke goste na kvadratu $Q = I \times I$ in zato na torusu. Vendar nas to ne sme zavesti, kako »lepa« da je ta preslikava.

Lastnost mešanja pomeni, da kjerkoli na torusu začnemo z neko majhno piko (ne točko!), se po nekem času znajdemo kjerkoli drugje, barva je razmazana povsod (glej слиki 2 in 3).

Definicija kaosa in primer

Devaney [2] je definiral kaos z naslednjimi tremi lastnostmi.

Definicija 1. Preslikava $f: X \rightarrow X$, kjer je (X, d) metrični prostor, je **kaotična**, če je:

- (a) f topološko tranzitivna,
- (b) množica periodičnih točk preslikave f gosta v X ,
- (c) f občutljiva za začetne pogoje.

Točka a je **periodična točka reda** n preslikave f , če je $f^n(a) = a$ in $f^j(a) \neq a$, $0 < j < n$, kjer je f^n n -ti iterat funkcije in ne potenca. Preslikava f je **topološko tranzitivna**, če za vsak par nepraznih odprtih množic U in V obstaja tako naravno število k , da velja $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Preslikava f je **občutljiva za začetne pogoje**, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x_0 \in X$ in poljubno odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje x_0 , obstajata $y_0 \in U$ in naravno število k , da velja $d(f^k(x_0), f^k(y_0)) > \delta$.

Kasneje so pokazali [1], da vsaj za metrične prostore iz prvih dveh pogojev sledi občutljivost za začetne pogoje.

Poglejmo si enostaven primer kaotične preslikave. Če kvadriramo kompleksna števila $f(z) = z^2$, potem gredo iterati števil z , $|z| > 1$, v neskončnost, iterati števil $|z| < 1$, pa proti 0. Vmes, na enotski krožnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; z = e^{2\pi i \alpha}\}$, pa je kvadriranje kaotična preslikava. Za opazovanje kvadriranja bo ugodno, če kot α zapišemo v dvojiškem sistemu $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Ker je $z^2 = e^{2\pi i 2\alpha}$ in kot lahko vzamemo modulo 1, imamo nadalje

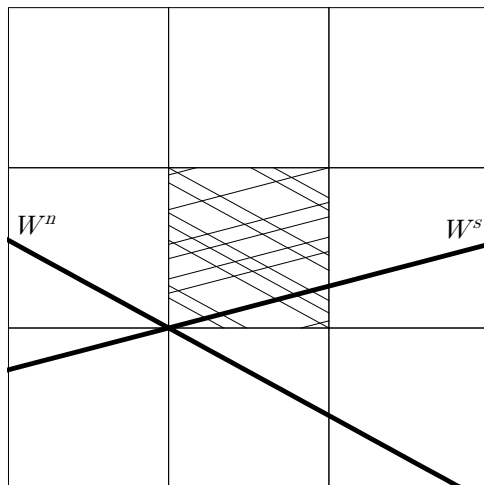
$$2\alpha \equiv 0, a_2 a_3 a_4 \dots \pmod{1},$$

kar pomeni, da kvadriranju ustreza pomik vejice na desno, pri čemer seveda prvo števko izgubimo [7].

Po tej pripravi pri kvadriranju ne bo težko slediti vsem značilnostim kaosa:

- občutljivost za začetni pogoj

Za $\delta = \frac{\pi}{2}$ velja za poljuben $z_0 = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, in poljubno njegovo okolico U naslednje: Na enotski krožnici vzamemo lok dolžine 2ε s središčem v z_0 , ki je vsebovan v U . Potem za neki n velja $2\pi 2^{-n} < \varepsilon$. Točka z' naj se ujema s točko z_0 v kotu α' na n števk, naslednja naj



Slika 1. Lastni premici W^s in W^n ter množici W_T^s in W_T^n v enotskem kvadratu.

bo različna $a'_{n+1} \neq a_{n+1}$, nadaljnje pa spet enake. Po n kvadriranjih se znajdeti točki ravno na nasprotni strani krožnice:

$$f^n(z') = -f^n(z_0),$$

torej sta kar se le da narazen; če merimo po krožnici, za π .

- periodične točke

Kot točke s periodo n je zapisan takole

$$\beta = 0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}.$$

Jasno je, da leži v okolici poljubne točke bližnja periodična točka, če se le kota ujemata na prvih n mestih za dovolj velik n .

- tranzitivnost

Tu si lahko dovolimo kar konstrukcijo tira $e^{2\pi i \tau}$, ki poljubno blizu obiše vsako točko. Takole napravimo:

$$\tau = 0,0100011011000001010100011101110111\dots$$

Kaj smo naredili, kakšen je napotek za naslednje številke? Vzamemo najprej ničlo, potem enico, sledijo vsi štirje možni pari ničel in enic, nato vseh osem možnih trojk ničel in enic in tako dalje. Poljubno zaporedje poljubne dolžine se znajde v tem zapisu. In to je zagotovilo, da

pridemo po »veelikem« število korakov poljubno blizu vsaki točki. Še več: za dobljeni tir velja, da če izpustimo prvih nekaj členov zaporedja, je preostanek tira še vedno gost. Torej za poljubni neprazni množici U in V obstaja točka tira, ki je v U , zato neki njen iterat pade v V .

Hiperbolični avtomorfizmi torusa

Definicija 2. Če v ravnini $\mathbb{R}^2$ identificiramo vse točke, katerih koordinate se razlikujejo za celo število, dobimo torus $\mathcal{T}$.

Identifikacija definira ekvivalenčno relacijo na $\mathbb{R}^2$, kjer je $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ natanko tedaj, ko sta $x_2 - x_1$ in $y_2 - y_1$ celi števili. Ta ekvivalenčna relacija določa projekcijo $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, $\pi(x, y) = [x, y]$. Dobljeni torus $\mathcal{T}$ je seveda homeomorfen geometrijskemu torusu (slika 2).

Definicija 3. Naj bo $A = (a_{ij})$ matrika dimenzije 2×2 z lastnostmi

- (a) A je hiperbolična (lastni vrednosti ne ležita na enotski krožnici v kompleksni ravnini),
- (b) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i, j \leq 2$,
- (c) $\det A = \pm 1$.

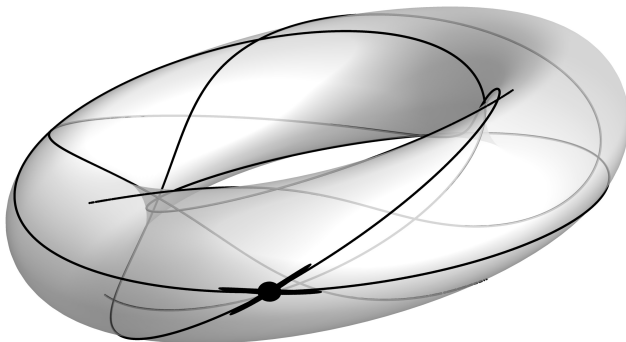
Matrika A inducira tako preslikavo $L_A : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, da je $L_A \circ \pi = \pi \circ A$. To preslikavo imenujemo **hiperbolični avtomorfizem torusa**:

$$L_A([x, y]) \equiv A(x, y)^T \pmod{1}.$$

Opomba 4. Ker je $\det A = \pm 1$, je A^{-1} tudi hiperbolična in elementi matrike so cela števila. To pomeni, da A^{-1} tudi inducira hiperbolični avtomorfizem torusa $(L_A)^{-1}$. Torej je L_A res bijekcija za $\mathcal{T}$.

Trditev 5. Množica periodičnih točk preslikave L_A je gosta v $\mathcal{T}$.

Dokaz. Naj bo p poljubna točka v $\mathcal{T}$ z racionalnimi koordinatami. Če poiščemo skupni imenovalac, lahko privzamemo, da je p oblike $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$, kjer so r, s in k naravna števila. Take točke so goste v $\mathcal{T}$, saj lahko vzamemo k poljubno velik. Pokažimo še, da je p periodična s periodo manjšo ali enako k^2 . V $\mathcal{T}$ je natanko k^2 točk oblike $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$, $0 \leq r, s < k$. Ker je A celoštevilška, je slika poljubne take točke z L_A zopet take oblike. To pomeni, da L_A permutira točke take oblike. Torej obstajata taki celi števili



Slika 2. Prvi in peti iterat majhne okolice negibne točke $[0, 0]$.

i in j , da je $L_A^i(p) = L_A^j(p)$ in $|i - j| \leq k^2$. Iz tega sledi, da je $L_A^{j-i}(p) = p$. Torej je p periodična s periodo manjšo ali enako k^2 . ■

Ker je A hiperbolična matrika z $\det A = \pm 1$, je absolutna vrednost ene od lastnih vrednosti manjša, druge pa večja od 1. Označimo z λ_s lastno vrednost matrike A , ki zadošča pogoju $|\lambda_s| < 1$, in z λ_n lastno vrednost, ki zadošča pogoju $|\lambda_n| > 1$. Če sta v_s in v_n pripadajoča lastna vektorja, potem sta lastna podprostora W^s in W^n matrike A premici skozi izhodišče v $\mathbb{R}^2$. Eksplicitno:

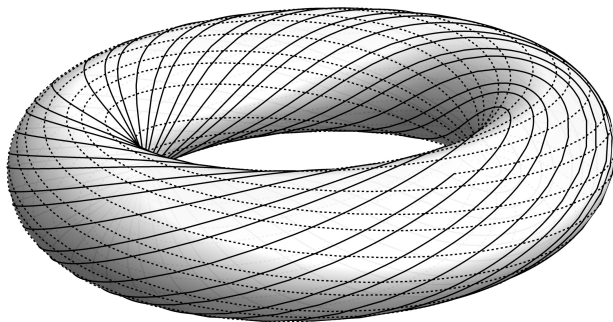
$$W^s = \{tv_s; t \in \mathbb{R}\}, \quad W^n = \{tv_n; t \in \mathbb{R}\}.$$

Za vsako točko $(x, y) \in W^s$ zaporedje $A^m(x, y)^T$ konvergira v izhodišče, saj je $A^m(x, y)^T = \lambda_s^m(x, y)^T$. Za $(x, y) \in W^n$ pa konvergira v izhodišče zaporedje $A^{-m}(x, y)^T$.

Definirajmo množici, krivulji, $W_{\mathcal{T}}^s = \pi(W^s)$ in $W_{\mathcal{T}}^n = \pi(W^n)$ na torusu $\mathcal{T}$ (glej slike 1 in 3). Za poljubno točko $[x, y] \in W_{\mathcal{T}}^s$ velja $L_A^m[x, y] \rightarrow [0, 0]$, ko gre $m \rightarrow \infty$. Za poljubno točko $[x, y] \in W_{\mathcal{T}}^n$ pa velja $L_A^{-m}[x, y] \rightarrow [0, 0]$, ko gre $m \rightarrow \infty$. Razdalja na torusu je inducirana z evklidsko razdaljo v $\mathbb{R}^2$, to je najmanjša razdalja ekvivalenčnih razredov v $\mathbb{R}^2$.

Lema 6. Množici $W_{\mathcal{T}}^s$ in $W_{\mathcal{T}}^n$ sta gosti v $\mathcal{T}$.

Dokaz. Pokažimo, da je smerni koeficient premice W^s iracionalno število. Če bi bil racionalno število, bi šla premica W^s skozi točko (x, y) s celoštevilskima koordinatama. Potem bi imela $A^m(x, y)^T$ tudi celoštevilske koordinate, kar je v nasprotju z dejstvom, da $A^m(x, y)^T \rightarrow 0$, ko gre $m \rightarrow \infty$.

Slika 3. Del množic W_T^s in W_T^n .

Naj bo x_j x -koordinata preseka premice $y = j$ in W^s za $j = 1, 2, 3, \dots$. Velja $x_j = jx_1$. Ker je smerni koeficient W^s enak $\frac{1}{x_1}$, je x_1 iracionalno število. Projekcije točk (x_j, j) na torus $\mathcal{T}$ so oblike $[\alpha_j, 0]$, $0 \leq \alpha_j < 1$, $\alpha_j = x_j - m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$. Ker je

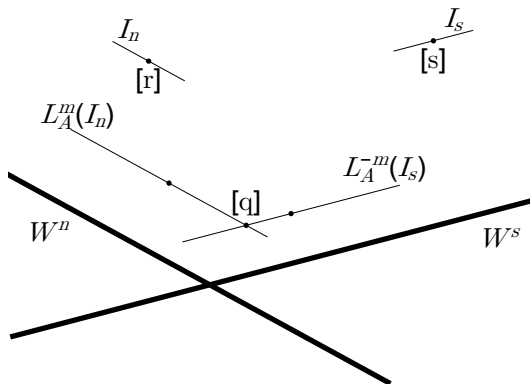
$$(e^{i2\pi\alpha_1})^j = e^{i2\pi j(x_1 - m_1)} = e^{i2\pi x_j} = e^{i2\pi\alpha_j},$$

so točke α_j zaradi leme 7 goste na intervalu $[0, 1]$. Projekcija W^s na torus, gledana v kvadratu $[0, 1]^2$, je družina vzporednih daljic, ki sekajo os x v točkah $(\alpha_j, 0)$. Zato so te daljice goste v torusu (glej slike 1, 2 in 3). Dokaz gostosti za W_T^n je podoben. ■

Če je $p \neq [0, 0]$ in $p \in W_T^s \cap W_T^n$, pravimo, da je p **homoklinična** k $[0, 0]$. Iz leme 6 sledi, da so homoklinične točke goste v torusu (glej sliko 1).

Lema 7 ([2]). Naj bo $f: S^1 \rightarrow S^1$ zasuk krožnice za kot ω . Če je ω racionalni zasuk, to je $\omega = 2\pi\frac{p}{q}$, v racionalnem razmerju s polnim kotom, je q -ta iteracija identiteta in vse točke so periodične. Če je f iracionalen zasuk, je tir vsake točke gost na krožnici.

Dokaz. Krožnico predstavimo v kompleksni ravnini $S^1 = \{z; |z| = 1\}$ in opremimo z ločno dolžino $d(z_1, z_2)$ kot metriko. Zasuk je množenje z $\lambda = e^{i\omega}$. Pokažimo, da je pri iracionalnem zasuku tir točke 1 gost v krožnici. Zaradi rotacije bo potem isto veljalo za poljubno točko iz S^1 . Vzemimo poljubno točko $\eta \in S^1$ in njeno ε -okolico. Pokažimo, da v njej ležijo točke iz tira λ^n , $n = 0, 1, \dots$. Zaradi iracionalnosti zasuka so vsi členi zaporedja $\lambda^n = e^{ni\omega}$ različni med sabo in zato obstaja stekališče. Posledično imamo taki števili n_1 in n_2 , da sta λ^{n_1} in λ^{n_2} obe v njegovi ε -okolici. Zato je $d(\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}) < 2\varepsilon$.



Slika 4. W^n je vzporedna $L_A^m(I_n)$ in W^s je vzporedna $L_A^{-m}(I_s)$.

Označimo $k = n_1 - n_2$. Ker se pri množenju z λ^{n_2} razdalja ohranja, velja $d(\lambda^k, 1) < 2\varepsilon$. Točke λ^{jk} , $j = 1, 2, \dots$ ležijo na krožnici, tako da so razdalje zaporednih točk manjše od 2ε . Zato v ε -okolici točke η leži vsaj ena točka λ^{jk} . ■

Trditev 8. Preslikava L_A je topološko tranzitivna.

Dokaz. Naj bosta U in V dve odprti množici v $\mathcal{T}$, kar pomeni, da sta njuni prasliki odprti množici v $\mathbb{R}^2$. Izberemo lahko točki $[r] \in U$ in $[s] \in V$, ki sta homoklinični k $[0, 0]$. Izberimo odprt interval I_n v $W_{\mathcal{T}}^n \cap U$, ki ima središče v $[r]$, in odprt interval I_s v $W_{\mathcal{T}}^s \cap V$, ki ima središče v $[s]$. Pri iteraciji z L_A se iterati središča $[r]$ približujejo $[0, 0]$, saj $[r]$ leži na $W_{\mathcal{T}}^n$. Iterati intervala I_n pa se daljšajo. Podobno se pri iteraciji z L_A^{-1} iterati središča $[s]$ približujejo $[0, 0]$, iterati intervala I_s pa se daljšajo. Torej obstaja tak m , da je $L_A^m(I_n) \cap L_A^{-m}(I_s) \neq \emptyset$. Naj bo $[q]$ v tem preseku (glej sliko 4). Potem je $[p] = L_A^{-m}[q] \in U$ in $L_A^m[q] \in V$. Torej je $L_A^{2m}[p] \in V$, kar pomeni, da je L_A topološko tranzitivna. ■

Iz trditev 5 in 8 sledi

Izrek 9. Hiperbolični avtomorfizem torusa $L_A: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ je kaotična preslikava.

Leta 2006 je Lee [6] dokazal, da če matrika A ni hiperbolična, potem L_A ni kaotična preslikava. Nekaj posebnih primerov si bomo pogledali v naslednjem poglavju.

Nekaj nalog

1. Naj bo $f: S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^2$. Poiščite periodične točke reda 3 in 4.
2. Katera od naslednjih matrik inducira hiperbolični avtomorfizem torusa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}?$$
3. Poiščite razdaljo med točkama $P(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$ in $Q(\frac{9}{10}, \frac{2}{3})$ na torusu.
4. Naj bo L_A avtomorfizem torusa, induciran z matriko $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - (a) Znotraj 0,1-okolice točke $[0, 0]$ poiščite kakšno homoklinično točko k njej.
 - (b) V 0,1-okolici točke $[0, 0]$ poiščite takšno točko P in tak m , da bo

$$d(L_A^m(P), [0, 0]) > 0,5.$$

5. Naj za L_A veljata točki (b) in (c) iz definicije 3 (L_A je avtomorfizem torusa) in naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pripadajoča matrika z lastnima vrednostma λ_1 in λ_2 . Če je $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = \pm 1$ in sta λ_1 in λ_2 realni, potem je $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ali pa je matrika hiperbolična. Če matrika A ni hiperbolična, potem nastopijo naslednje možnosti [6]:
 - (i) $\lambda_{1,2} = \pm 1$, (ii) $\lambda_{1,2} = 1$, (iii) $\lambda_{1,2} = -1$ in (iv) lastni vrednosti nista realni. Pokažite, da velja:

- (a) Če je $\lambda_{1,2} = \pm 1$, potem L_A ni kaotična.
- (b) Če lastni vrednosti nista realni, potem imamo naslednje možnosti:
 - (i) $\lambda_{1,2} = \pm i$, (ii) $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ali (iii) $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- (c) Če je $\lambda_{1,2} = \pm i$, potem L_A ni kaotična.

Rešitve:

1. Periodične točke reda 3 so oblike $z_k = e^{\frac{k2\pi i}{7}}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sestavljajo dva cikla reda 3: (z_1, z_2, z_4) in (z_3, z_6, z_5) .
 Periodične točke reda 4 so oblike $z_k = e^{\frac{k2\pi i}{15}}$, $k = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14$. Sestavljajo tri cikle reda 4: (z_1, z_2, z_4, z_8) , (z_3, z_6, z_{12}, z_9) in $(z_7, z_{14}, z_{13}, z_{11})$.

2. Edino matrika C ima lastni vrednosti, ki ne ležita na enotski krožnici.
3. Na torusu je $d(P, Q) = \frac{\sqrt{34}}{15}$.
4. (a) $P(\frac{9-5\sqrt{3}}{6}, \frac{7\sqrt{3}-12}{6})$,
(b) $P(\frac{1}{20}, \frac{\sqrt{3}-1}{40})$, $m = 2$.
5. (a) Iz karakteristične enačbe

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

sledi, da je $a + d = 0$ in $\det A = -1$. Torej je matrika A oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ in $A^2 = I$. Torej L_A ni kaotična, saj ni občutljiva za začetne pogoje.

- (b) Če lastni vrednosti nista realni, potem iz formule

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

sledi, da je $\det A = 1$ in $(a + d)^2 < 4$. Če je $a + d = 0$, potem sta $\lambda_{1,2} = \pm i$. Če je $a + d = 1$, potem sta $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Če je $a + d = -1$, potem sta $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

- (c) Če je $\lambda_{1,2} = \pm i$, potem je matrika A oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ in $A^4 = I$. Torej L_A ni kaotična, saj ni občutljiva za začetne pogoje.

LITERATURA

- [1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Am. Math. Monthly **99** (1992) 332–334.
- [2] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [3] J. Gleick, (prev. S. Kuščer) *Kaos*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1991.
- [4] M. Lakner, P. Petek, M. Škapin Rugelj, *Vrnitev Arnoldove mačke*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015) 41–52.
- [5] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Am. Sci. **20** (1963) 130–141.
- [6] J. S. Lee, *A Characterization of Hyperbolic Toral Automorphism*, Commun. Korean Math. Soc. **21** (2006) 759–769.
- [7] P. Petek, *O zaporedju za računanje kvadratnih korenov*, Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 142–145.