Parabola na zaključnem izpitu Jurija Vege

Marko Razpet

Jurij Vega (1754–1802) je moral leta 1775 za dokončanje dveletnega študija na ljubljanskem liceju opraviti obširen izpit *Tentamen philosophicum*. Izpitne teme so bile natisnjene v latinščini na 52-ih straneh, od katerih je bilo 26 strani posvečenih matematiki, 20 strani fiziki in štiri strani logiki ter metafiziki. Vega je zaključni izpit opravil z odliko. O svojem študiju na ljubljanskem liceju pa je kasneje zapisal, da vstop v to učilišče spada med najsrečnejše dogodke njegovega življenja.

Ogledali si bomo dve trditvi o paraboli iz poglavja o stožnicah v Tentamenu. Domnevamo lahko, da je izpitna komisija od kandidatov pričakovala natančno poznavanje trditev, njihovo razlago in morda tudi dokaz. Ker tedanjih postopkov reševanja natanko ne poznamo, bomo najprej ponovili nekaj osnovnih pojmov in trditvi predstavili v današnjem jeziku.

Pri stožnici so nam znani pojmi: teme, gorišče, vodnica, tetiva, tangenta in simetrala. V Vegovem času so parameter parabole imenovali dolžino tiste tetive, ki poteka skozi gorišče, pravokotno na simetralo parabole. Danes imenujemo parameter parabole polovico te dolžine in jo označujemo s p.

Poznali so tudi pojem premera ali diametra parabole. To je vsak poltrak, ki ima krajišče na paraboli in poteka vzporedno z njeno simetralo po notranjosti parabole. Izraz *premer parabole* je smiseln, če imamo parabolo za v neskončnost razpotegnjeno elipso, pri čemer premer elipse preide v premer parabole. Vsako tetivo skozi središče elipse imenujemo premer ali diameter elipse.

Parabolo najlaže obravnavamo v analitični obliki. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy postavimo njeno teme v koordinatno izhodišče O, gorišče pa v točko $F(p/2, 0)$. Vodnica parabole je premica $x = -p/2$, enačba parabole pa se glasi $y^2 = 2px$.

Vedeti pa je treba tudi, da ima tangenta na parabolo $y^2 = 2px$ v točki $T(\xi, \eta)$ enačbo $\eta y = px + p\xi$. Pri tem je seveda $\eta^2 = 2p\xi$. Kako pridemo do enačbe tangente? Poljubna premica, ki poteka skozi točko $T(\xi, \eta)$, ima enačbo $x - \xi = k(y - \eta)$, kjer je k realno število, ki ga je treba določiti tako, da bo ta premica imela s parabolo eno samo skupno točko, in sicer $T(\xi, \eta)$. Iz enačbe premice izrazimo $x = k(y-\eta)+\xi$, kar vstavimo v enačbo parabole in dobimo kvadratno enačbo za y:

$$y^2 = 2pk(y - \eta) + 2p\xi = 2pky - 2pk\eta + \eta^2.$$

Preuredimo in razstavimo:

$$y^2 - 2pky + 2pk\eta - \eta^2 = (y - \eta)(y + \eta - 2pk) = 0.$$

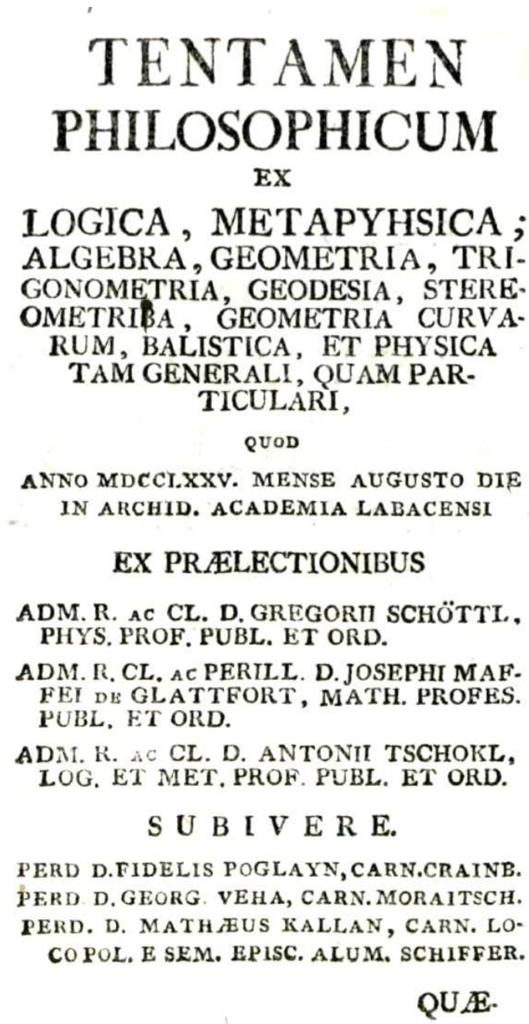
Enačba ima rešitvi $y_1 = \eta$ in $y_2 = 2pk - \eta$. Iz zahteve $y_1 = y_2 = \eta$ dobimo $k = \eta/p$. Iskana tangenta ima torej enačbo $x - \xi = (y - \eta)\eta/p$ oziroma $\eta y = px + p\xi$. Zdaj se lahko lotimo naših nalog.

Tentamen, Naloga CLXII.

Naj bo t tangenta v temenu parabole, d pa tangenta v presečišču parabole s poljubno vzporednico s' simetrale s parabole. Če se premica t', ki je vzporedna t, in premica d', ki je vzporedna d, sekata v točki na paraboli, potem je ploščina trikotnika, omejenega s t', d' in s, enaka ploščini pravokotnika, omejenega s t, t', s in s' (slika 2).

Dokaz.

Zapišimo točke s koordinatami $T(\xi, \eta)$, $T'(\xi', \eta')$. Pri tem je $\xi \geqslant 0$ in $\xi' \geqslant 0$. Upoštevati je treba tudi,

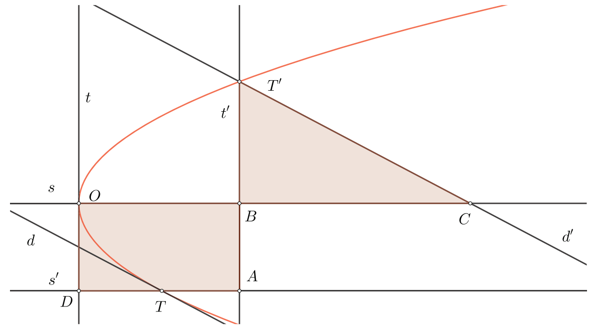

TENTAMEN
PHILOSOPHICUM
EX
LOGICA, METAPYHSICA;
ALGEBRA, GEOMETRIA, TRIGONOMETRIA, GEODESIA, STEREOMETRIBA, GEOMETRIA CURVARUM, BALISTICA, ET PHYSICA TAM GENERALI, QUAM PARTICULARI,
QUOD
ANNO MDCCLXXV. MENSE AUGUSTO DIE
IN ARCHID. ACADEMIA LABACENSI
EX PRÆLECTIONIBUS
ADM. R. AC CL. D. GREGORII SCHÖTTL, PHYS. PROF. PUBL. ET ORD.
ADM. R. CL. AC PERILL. D. JOSEPHI MAFFEI DE GLATTFORT, MATH. PROFES. PUBL. ET ORD.
ADM. R. AC CL. D. ANTONII TSCHOKL, LOG. ET MET. PROF. PUBL. ET ORD.
SUBIVERE.
PERD D. FIDELIS POGLAYN, CARN. CRAINB.
PERD D. GEORG. VEHA, CARN. MORAITSCH.
PERD. D. MATHÆUS KALLAN, CARN. LOCO POL. E SEM. EPISC. ALUM. SCHIFFER.
QUÆ-

SLIKA 1.
Naslovnica zbirke izpitnih vprašanj z imeni članov komisije in kandidatov, med katerimi je tudi Jurij Vega (Georgius Veha). Naslovnica ni brez tiskarskih napak.

da veljata relaciji $\eta^2 = 2p\xi$ in $\eta'^2 = 2p\xi'$. Enačbe sodelujočih premic so:

$$(t)\quad x = 0,\qquad (t')\quad x = \xi',\qquad (s)\quad y = 0,$$
$$(s')\quad y = \eta,\qquad (d)\quad \eta y = px + p\xi,$$
$$(d')\quad \eta(y - \eta') = p(x - \xi').$$

Naj bo B presečišče premic t' in s, C pa presečišče premis s in d'. Potem je razlika abscis točk C in B



SLIKA 2.
Trikotnik in pravokotnik sta ploščinsko enaka.

enaka $-\eta\eta'/p$. Trikotnik BCT' je pravokotni s katetama $|BC| = |\eta\eta'|/p$ in $|BT'| = |\eta'|$. Njegova ploščina je

$$S(BCT') = \frac{1}{2}|BC| \cdot |BT'| = \frac{1}{2p}|\eta\eta'^2| = \xi'|\eta|.$$

Pravokotnik $DABO$ pa ima stranici $|OB| = \xi'$ in $|AB| = |\eta|$ in ploščino

$$S(DABO) = |OB| \cdot |AB| = \xi'|\eta|.$$

Torej je res $S(BCT') = S(DABO)$, kar je bilo treba dokazati. ■

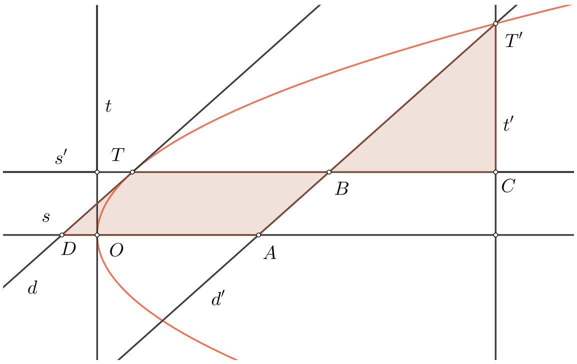
Tentamen, Naloga CLXV.

Naj bo t tangenta v temenu parabole, d pa tangenta v presečišču parabole s poljubno vzporednico s' simetrale s parabole. Če se premica t', ki je vzporedna t, in premica d', ki je vzporedna d, sekata v točki na paraboli, potem je ploščina trikotnika, omejenega s t', d' in s', enaka ploščini paralelograma, omejenega z d, d', s in s' (slika 3).

Dokaz.

Ohranimo oznake premic prve trditve. Sedaj je točka B presečišče premice s' in d', C pa presečišče premic s' in t'. Razlika abscis točk C in B je $|\eta(\eta - \eta')/p|$, razlika ordinat točk T' in c pa $|\eta - \eta'|$. Trikotnik BCT' je pravokotni s katetama $|BC|$ in $|CT'|$, njegova ploščina je

$$S(BCT') = \frac{1}{2}|BC| \cdot |BT'| = \frac{1}{2p}|\eta|(\eta - \eta')^2.$$



SLIKA 3.
Trikotnik in paralelogram sta ploščinsko enaka.

Stranica paralelograma $DABT$ je $|TB| = |\xi - \xi' - \eta(\eta - \eta')/p|$, višina nanjo pa $|\eta|$. Ploščina paralelograma je torej

$$S(DABT) = \left|(\xi - \xi') - \frac{\eta(\eta - \eta')}{p}\right| \cdot |\eta| = \frac{1}{2p}|\eta|(\eta - \eta')^2.$$

Pri tem smo upoštevali relaciji $\eta^2 = 2p\xi$ in $\eta'^2 = 2p\xi'$. Torej je res $S(BCT') = S(DABT)$, kar je bilo treba dokazati. ■

Radovedni bralec z znanjem latinščine bo v Tentamenu našel še več zanimivih trditev o parabolah. Ena izmed njih je tudi naslednja. Njen dokaz prepuščamo bralcem.

Tentamen, Naloga CLXVI.

Tangenta na parabolo v krajišču premera, ki poteka skozi središče katerekoli njene tetive, je vzporedna tej tetivi. Ta premer razpolavlja vse tetive, ki so tej tetivi vzporedne.

Tentamen je dosegljiv na spletni povezavi www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:DOC-TQDP2BPU.

× × ×

10. evropska dekliška matematična olimpijada

Boštjan Kuzman

→ Med 9. in 15. aprilom 2021 je, zaradi pandemije, na daljavo v organizaciji Gruzije potekala Deseta evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO). Sodelovalo je 213 tekmovalk iz 54 držav. Slovenijo so zastopale Katarina Grilj (SŠ Slovenska Bistrica, Gimnazija), ki je osvojila bronasto medaljo, in Lana Prijon (Gimnazija Bežigrad), Kaja Rajter (II. gimnazija Maribor) ter Tjaša Sušnik (Gimnazija Kranj). Dijakinje so se na tekmovanje pripravljale tudi na celoletnih pripravah, ki jih pod okriljem DMFA Slovenije izvajajo bivši tekmovalci, med njimi Ana Meta Dolinar in Luka Horjak, ki sta tokrat poskrbela tudi za brezhibno izvedbo tekmovanja v Plemljevi vili na Bledu. V uredništvu vsem čestitamo in dodajamo dve nalogi iz tekmovanja. Ostale naloge in rešitve najdete na spletni strani EGMO, `www.egmo.org`.

Naloga 1. Število 2021 je *čudovito*. Če je katerikoli element množice $\{m, 2m+1, 3m\}$ čudovit za neko pozitivno celo število m, potem sta tudi ostala dva elementa čudovita. Ali je število 2021^{2021} čudovito? (Angelo Di Pasquale, Avstralija)

Naloga 5. V ravnini leži točka O, ki jo imenujemo izhodišče, in naj bo P neka množica 2021 točk v ravnini, za katero velja:

- poljubne tri različne točke iz P ne ležijo na skupni premici;
- poljubni dve različni točki iz P ne ležita na skupni premici skozi O.

Trikotnik z oglišči v P imenujemo *debel*, če leži točka O strogo znotraj trikotnika. Določite največje možno število debelih trikotnikov. (Veronika Schreitter, Avstrija)

× × ×