IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2019
Letnik 66
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2019, letnik 66, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** info@dmfa-zaloznistvo.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KATAKAVSTIKA BERNOULLIJEVE LEMNISKATE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A45, 53A04

V prispevku predstavljamo kratko zgodovino Bernoullijeve lemniskate in njeno katakavstiko za središčne žarke.

A CATACAUSTIC OF THE BERNOULLI LEMNISCATE

A brief history of the Bernoulli lemniscate and its catacaustic for central rays are presented.

Uvod

Kot že naslov pove, je osnova obravnavane katakavstike imela opravka z matematično družino Bernoullijevih v švicarskem Baslu. Lemniskato sta namreč že poznala matematika, brata Jakob (1655–1705) in Johann Bernoulli (1667–1748). Jakob je leta 1694 v septembrski številki revije Acta Eruditorum objavil članek (navajamo samo del naslova) *Constructio curvæ accessus & recessus æquabilis*, ki omenja algebrsko krivuljo z enačbo $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$. Danes jo običajno zapišemo v kartezičnih koordinatah z enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Prej omenjeni članek je dodatek Bernoullijevemu prispevku iz junijske številke iste revije, kar je razvidno iz drugega dela naslova. Napisan je v latinščini. Izvor ima sicer v povsem drugem problemu, in sicer v teoriji elastičnosti. Za nas pa je v članku zanimiva uporaba besede *lemniſci*, kar je rodilnik ednine samostalnika *lemniscus*. Bernoulli piše, da *je krivulja četrte razsežnosti* in ima obliko (namenoma uporabljamo starinske črke)

… jacentis notæ octonarii ∞, ſeu complicatæ in nodum faſciæ, ſive lemniſci, *d'un nœud de ruban* Gallis.

Bernoulli s tem pove, da ima omenjena krivulja obliko ležeče osmice, torej ∞, ali v vozel zvitega traku ali *lemniskusa*, obliko vozla francoskega traku. Navedeno besedilo je deloma v francoščini, kar je v reviji zapisano kurzivno. Namesto enačba ali krivulja *četrte razsežnosti* danes rečemo enačba ali krivulja *četrte stopnje*.

Beseda *lemniscus* je bila Bernoulliju všeč in krivuljo je na koncu članka poimenoval *curva lemniscata*, s trakovi okrašena krivulja, Bernoulliju na čast pa jo imenujemo *Bernoullijeva lemniskata*, da jo razlikujemo od drugih lemniskat.

Beseda *lemniscus* je grškega izvora. Stari Grki so zmagovalcu na športnih igrah na glavo pripeli lovorjev venec s posebnim volnenim trakom, ki se imenuje v grščini λημνίσκος. Nekateri besedo izpeljujejo iz λῆμος, kar pomeni *volna*, drugi (na primer [5]) pa iz imena otoka Lemnos, Λῆμνος, kjer naj bi prvi izdelovali take trakove. Beseda *lemniscus* je znana tudi v anatomiji. Ljudje nosimo *lemniskuse* v glavi, ne da bi za to sploh vedeli: *lemniscus medialis*, *lemniscus lateralis* in *lemniscus trigeminalis*.

Besedo *lemniskata* najdemo tudi v imenih nekaterih drugih krivulj, na primer: Boothova lemniskata, Geronova lemniskata in Brualdijeva lemniskata. Ker teh ne bomo obravnavali, bomo Bernoullijevo lemniskato odslej imenovali kar lemniskata.

Lemniskata kot Cassinijev oval

Jakob Bernoulli še ni vedel, da je lemniskati sorodne krivulje, *Cassinijeve ovale*, poznal že Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), italijansko-francoski matematik in astronom. Lemniskata je poseben primer Cassinijevih ovalov. Oglejmo si, kako definiramo Cassinijeve ovale.

Znano je, da je *elipsa* množica točk T v ravnini, za katere je *vsota* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 ($G_1 \neq G_2$) te ravnine konstantna. Podobno je *hiperbola* množica točk T v ravnini, za katere je *razlika* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstantna. Kaj pa, če vsoto oziroma razliko nadomestimo s produktom ali kvocientom? Za *kvocient* je odgovor preprost: krožnica, ki ji pravimo *Apolonijeva krožnica*. Če pa vzamemo produkt, dobimo Cassinijev oval. Torej: *Cassinijev oval* je množica točk T v ravnini, za katere je *produkt* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstanten.

Če označimo $r_1 = |G_1T|$ in $r_2 = |G_2T|$ ter izberemo za konstanto neko dolžino k, potem je enačba Cassinijevega ovala $r_1 \cdot r_2 = k^2$. Pri tem smo vzeli k^2 zato, da uskladimo dimenzije obeh strani enačbe. Točki G_1 in G_2 po zgledu elipse in hiperbole imenujemo *gorišči* ovala. S točkama G_1 in G_2 smo v ravnini vzpostavili tako imenovani *bipolarni koordinatni sistem*. Razdalji r_1 in r_2 določata točki T in T', ki sta si zrcalni glede na premico skozi G_1 in G_2. Razdalji r_1 in r_2 imenujemo *prevodnici* (poimenovanje po [7]) ustrezne točke. Elipsa ima v bipolarnem koordinatnem sistemu enačbo $r_1 + r_2 = 2a$, hiperbola pa $|r_1 - r_2| = 2a$.

Kako pridemo do enačbe Cassinijevega ovala? V koordinatnem sistemu Oxy izberemo gorišči $G_1(-c,0)$ in $G_2(c,0)$. Pri tem je $c = |G_1G_2|/2 > 0$ polovica medgoriščne razdalje. Prevodnici točke $T(x,y)$ sta

$$r_1 = |G_1T| = \sqrt{(x+c)^2+y^2},\ r_2 = |G_2T| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Enačba Cassinijevega ovala v kartezičnih koordinatah je potem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = k^2.$$

Ko odpravimo korene in enačbo preuredimo, dobimo

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = k^4 - c^4.$$

Oval je simetričen glede na os x in glede na os y ter glede na koordinatno izhodišče O, ki je njegovo središče. Oblika ovala je močno odvisna od razmerja k/c. Za $k > c$ je oval enodelna, za $k < c$ pa dvodelna sklenjena krivulja brez samopresečišč.

Zanimiv je mejni primer $k = c$, ko je krivulja sicer enodelna, toda samo sebe preseka v točki O (slika 1). To je ravno *lemniskata*, za katero velja $r_1 \cdot r_2 = c^2$, v pravokotnih kartezičnih koordinatah pa

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Krivulja poteka skozi koordinatno izhodišče, je simetrična glede na obe koordinatni osi in glede na svoje samopresečišče O, kjer se seka pod pravim kotom. Tangenti v O sta premici $y = x$ in $y = -x$. Če vpeljemo *polos* lemniskate $a = c\sqrt{2}$, lahko njeno enačbo zapišemo v obliki, ki smo jo zapisali v uvodu:

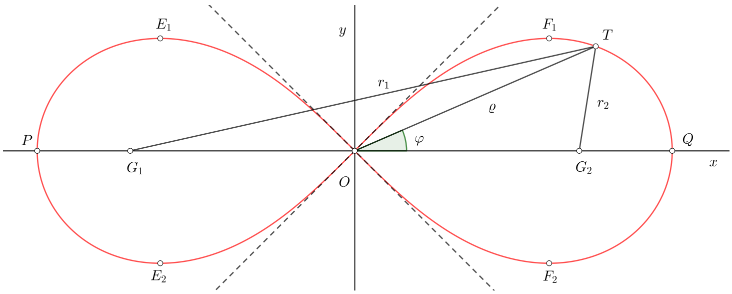
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Lemniskata os x preseka v svojih temenih $P(-a,0)$ in $Q(a,0)$. Točke E_1, E_2, F_1 in F_2 na lemniskati, ki imajo ekstremne ordinate, ustrezajo polarnemu radiju c.

Z uvedbo polarnih koordinat ϱ in φ, tako da je $x = \varrho\cos\varphi$ in $y = \varrho\sin\varphi$, dobimo enačbo lemniskate v polarni obliki: $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Pri geometrijski konstrukciji posameznih točk Cassinijevih ovalov, in s tem tudi lemniskate, se je treba nasloniti na kak izrek iz evklidske geometrije, ki govori o produktu dveh razdalj, na primer na višinski izrek v pravokotnem trikotniku ali na izrek o potenci točke glede na krožnico.

Lemniskata omejuje dva skladna lista. Njuno skupno ploščino S je prvi pravilno izračunal Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682–1766) okoli leta



Slika 1. Osnovni elementi Bernoullijeve lemniskate.

1750. Rezultat je presenetljivo preprost: $S = 2c^2 = a^2$. Dolžina lemniskate pa je delala matematikom kar hude težave, ker ni izrazljiva z elementarnimi funkcijami. Bernoulli je znal izraziti diferencial ds loka lemniskate s polarnim radijem ϱ. Velja namreč $ds^2 = \varrho^2\, d\varphi^2 + d\varrho^2$. Iz polarne oblike dobimo najprej z diferenciranjem

$$d\varrho = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{\varrho}\, d\varphi,$$

nato pa

$$d\varrho^2 = \frac{a^4}{\varrho^2}(1 - \cos^2 2\varphi)\, d\varphi^2 = \frac{a^4 - \varrho^4}{\varrho^2}\, d\varphi^2.$$

Nazadnje dobimo preprost rezultat

$$ds = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}}\, d\varrho.$$

Za dolžino s lemniskate je dovolj, da izrazimo dolžino ℓ njenega dela v prvem kvadrantu:

$$\ell = a^2 \int_0^a \frac{d\varrho}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}}.$$

S pomočjo substitucij $\varrho = au$ in $\varrho = a \cos \psi$ lahko rezultat zapišemo v oblikah

$$\ell = \frac{a \mathbf{\Gamma}^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \mathbf{K}(1/\sqrt{2}),$$

pri čemer je $\mathbf{\Gamma}$ Eulerjeva funkcija gama, $\mathbf{K}$ pa popolni eliptični integral prve vrste v Legendrovi obliki:

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \quad (p > 0), \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (0 < k < 1).$$

Osnovna lastnost funkcije $\mathbf{\Gamma}$ je njena rekurzivna enačba

$$\mathbf{\Gamma}(p+1) = p\mathbf{\Gamma}(p)\ (p>0).$$

Pri izpeljavi prvega izraza za ℓ uporabimo tudi Eulerjevo funkcijo $\mathbf{B}$ (beta), ki je definirana z izrazom

$$\mathbf{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \ \ (p>0, q>0),$$

in formule

$$\mathbf{B}(p,q) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q)}{\mathbf{\Gamma}(p+q)},\ \mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ (0<p<1),\ \mathbf{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Po zgledu četrtine krožnice s polmerom a in dolžino $\pi a/2$ so za lemniskato s polosjo a vpeljali število ϖ (*pi skript*), tako da je $\ell = \varpi a/2$ (več o tem na primer v [1]). Grobi približek za število ϖ je 2,622, natančna vrednost pa se izraža kot

$$\varpi = \frac{\mathbf{\Gamma}^2(1/4)}{2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2}\mathbf{K}(1/\sqrt{2}).$$

Drug razlog za uvedbo števila ϖ sta analogni obliki za dolžino krožnice in lemniskate pri $a=1$:

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \ \varpi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Računanje dolžine lemniskate je bil začetek razvoja teorije eliptičnih integralov in eliptičnih funkcij, s katerimi so se veliko ukvarjali na primer Leonhard Euler (1707–1783), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Niels Henrik Abel (1802–1829), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) in Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

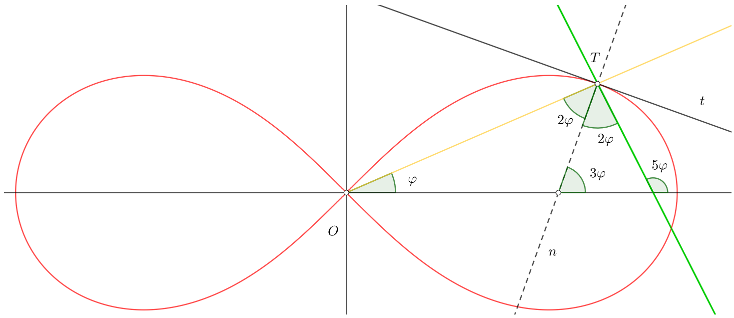
Normala in tangenta na lemniskato ter katakavstika

Za krivuljo, ki je podana v polarni obliki, je kot μ, ki ga tangenta t v točki T s polarnima koordinatama φ in ϱ na krivulji oklepa z daljico OT, dan s splošno formulo

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Črtica označuje odvajanje polarnega radija po kotu φ. Izpeljavo te pomembne formule v teoriji krivulj najdemo na primer v [7]. Za Bernoullijevo lemniskato je

$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{ctg}2\varphi,$$



Slika 2. Odboj središčnega žarka na lemniskati.

iz česar sledi $\mu = \pi/2 - 2\varphi$, če je T v prvem kvadrantu. Omejitev na prvi kvadrant za naše potrebe popolnoma zadošča. Kot med krajevnim vektorjem in normalo n pa je tako enak 2φ. Normala n seka abscisno os pod kotom 3φ (slika 2).

To pomeni, da normalo in tangento na Bernoullijevo lemniskato v dani točki T konstruiramo s kotom 2φ, ki ima en krak enak TO in vrh v točki T. Obstaja pa še nekaj postopkov za konstrukcijo tangente v točki lemniskate (glej na primer [3, 6]). Še več zanimivih lastnosti lemniskate najdemo v [2]. Avtor jih je navedel in dokazal v [4].

Katakavstika ravninske krivulje je ogrinjača premic nosilk odbitih žarkov, ki iz skupne točke z imenom *radiant* padajo v ravnini krivulje na to krivuljo. Upoštevamo samo prvi odboj na krivulji. Radiant je lahko »v neskončnosti«. Takrat so na krivuljo padajoči žarki med seboj vzporedni v neki smeri. Oblika katakavstike lemniskate je odvisna od radianta. Za žarke, ki na lemniskato padajo vzporedno z eno od njenih simetral, dobimo neomejeno katakavstiko.

Omejeno, srčasto katakavstiko lemniskate dobimo za žarke, ki izhajajo iz njenega središča O. Če je naklonski kot vpadnega žarka φ, je naklonski kot odbitega žarka 5φ (slika 2). Pri tem upoštevamo, kar že vemo: vpadni in odbojni kot žarka sta enaka 2φ.

Žarek naj se odbije v točki T, ki ima polarni kot φ. Ker je naklonski kot odbitega žarka 5φ, ima odbiti žarek v koordinatnem sistemu Oxy enačbo

$$y - \varrho \sin\varphi = \operatorname{tg} 5\varphi(x - \varrho\cos\varphi),$$

iz katere brez težav izpeljemo za računanje ugodnejšo obliko

$$x \sin 5\varphi - y \cos 5\varphi = \varrho \sin 4\varphi.$$

To je enoparametrična družina premic, kjer je φ parameter. Njihovo ogrinjačo dobimo po splošni metodi, ki je opisana na primer v [7]. Zgornjo enačbo odvajamo po parametru φ in rezultat delimo s 5:

$$x\cos 5\varphi + y\sin 5\varphi = \frac{1}{5}\varrho' \sin 4\varphi + \frac{4}{5}\varrho \cos 4\varphi.$$

Dobimo linearni sistem enačb za x in y z determinanto 1. Rezultat je naslednja parametrična oblika katakavstike:

$$x = \frac{4\varrho\cos 4\varphi + \varrho'\sin 4\varphi}{5}\cos 5\varphi + \varrho \sin 4\varphi \sin 5\varphi,$$

$$y = \frac{4\varrho\cos 4\varphi + \varrho'\sin 4\varphi}{5}\sin 5\varphi - \varrho \sin 4\varphi \cos 5\varphi.$$

Če v obeh izrazih na desni strani izpostavimo ϱ in upoštevamo, da je $\varrho'/\varrho = -\operatorname{tg} 2\varphi$, dobimo s pretvorbami trigonometričnih izrazov preprostejšo obliko:

$$x = \frac{1}{5}\varrho(\varphi)(5\cos\varphi - \cos 5\varphi), \quad y = \frac{1}{5}\varrho(\varphi)(5\sin\varphi - \sin 5\varphi).$$

Omejenost dobljene krivulje se lepo vidi iz njene parametrične oblike. Ne pozabimo, da je pri tem $\varrho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ in da φ ni polarni kot točk katakavstike.

Kot zanimivost dodajmo še, da je krivulja

$$x = 5\cos\varphi - \cos 5\varphi, \quad y = 5\sin\varphi - \sin 5\varphi$$

epicikloida s štirimi loki na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = 16$. Potemtakem je katakavstika neke vrste hibrid med lemniskato in to epicikloido.

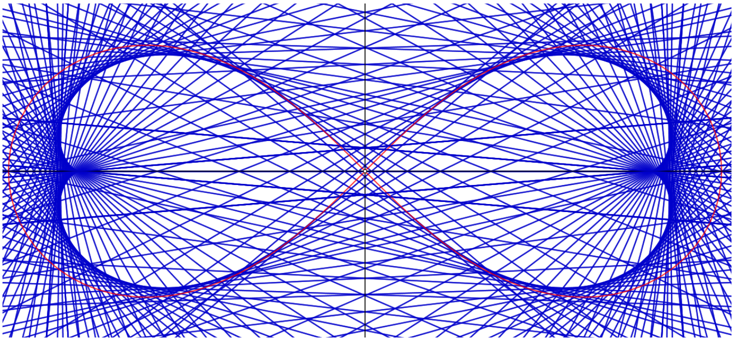
Katakavstika ima osti v točkah $(-4a/5, 0)$ in $(4a/5, 0)$. V okolici središča O se lemniskata in katakavstika dobro ujemata (slika 4).

Ploščina S_k lika, ki ga ograjujeta oba dela katakavstike, je $4a^2/5$, kar pomeni, da pokriva 4/5 obeh listov lemniskate. Do tega rezultata pridemo z naslednjim računom:

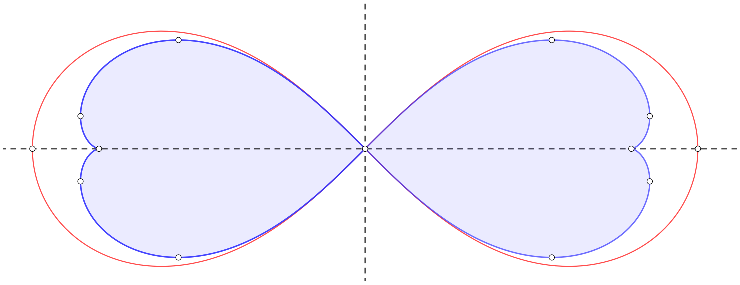
$$S_k = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (xy' - x'y)\, d\varphi = \frac{6a^2}{5}\int_0^{\pi/4} (\cos 2\varphi - \cos 6\varphi)\, d\varphi = \frac{4a^2}{5}.$$

Prav tako dobimo za diferencial ločne dolžine ds katakavstike za središčne žarke v nasprotju s samo lemniskato razmeroma preprost izraz:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\varphi = \frac{6a}{5} \cdot \frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$



Slika 3. Družina premic nosilk odbitih žarkov.



Slika 4. Katakavstika lemniskate za središčne žarke omejuje dve srci.

Dolžina ℓ_k njenega loka v prvem kvadrantu je

$$\ell_k = \frac{6a}{5}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{6a}{5}.$$

Ugotovili smo že, da je dolžina lemniskate v prvem kvadrantu

$$\ell = \frac{\varpi a}{2},$$

kar je približno 1,311a in seveda več kot $6a/5 = 1{,}2a$. Tudi slika 4 kaže, da je katakavstika za spoznanje krajša od lemniskate.

Lepo se da izračunati tudi ekstremne koordinate točk katakavstike. Ekstremne abscise imajo točke s koordinatami

$$x = \pm\frac{4a}{5},\ \ y = 0 \quad \text{in} \quad x = \pm\frac{a}{8}\sqrt[4]{20}(\sqrt{5}+1),\ \ y = \pm\frac{a}{20}\sqrt{29\sqrt{5}-61},$$

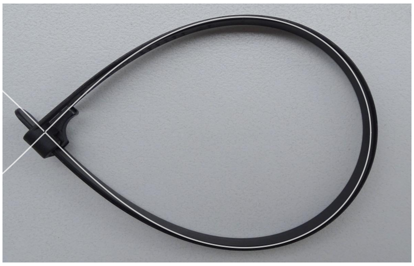
ekstremne ordinate pa točke s koordinatami

$$x = \pm\frac{a}{20}\sqrt{29\sqrt{5}+61},\ \ y = \pm\frac{a}{8}\sqrt[4]{20}(\sqrt{5}-1).$$

Vse navedene točke so konstruktibilne (z neoznačenim ravnilom in šestilom). Prvi dve točki iz prve skupine sta osti katakavstike.

Za konec

Ekstremne točke katakavstike lemniskate so konstruktibilne. Za samo lemniskato so se matematiki že od samega začetka trudili, da bi njen lok v prvem kvadrantu z geometrijsko konstrukcijo razdelili na dolžinsko enake dele. Omenjeni Fagnano je potrdil, da se lok da razdeliti na dva, tri in pet dolžinsko enakih delov. Na vprašanje, kdaj se ga da razdeliti na n enakih delov, je odgovoril Abel. Odgovor je presenetljiv: natanko tedaj, ko je konstruktibilen pravilni n-kotnik.



Slika 5. Upogib kabelske plastične vezice. Svetla krivulja je lemniskata.

Pravilnost Bernoullijevega računa v članku, ki je bil omenjen na začetku pričujočega prispevka, lahko sami preverimo z upogibom primerno prožnega traku, na primer še ne uporabljene kabelske plastične vezice. Poskrbeti je treba, da se oba konca stikata pod pravim kotom (slika 5). Ujemanje je kar dobro, kljub temu, da vezica ni idealno prožna.

LITERATURA

[1] P. Eymard in J.-P. Lafon, *The number* π, AMS, Providence, 2004.

[2] W. Hess, *Eigenschaften der Lemniskate*, Z. Math. Phys. **26** (1881), 143–144.

[3] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2012.

[4] M. Razpet, *Bernoullijeva lemniskata*, študijsko gradivo, dostopno na `www.pef.uni-lj.si/matwww/lemniskata01.pdf`, ogled 7. 11. 2019.

[5] S. Schwartzman, *The words of mathematics*, MAA, Washington, 1994.

[6] J. Steiner, *Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate*, J. Reine Angew. Math. **14** (1835), 80–82.

[7] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana, 1968.

HOMOPOLARNI MOTORJI

ROBERT HAUKO

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Mariboru

PACS: 41.20.Gz

Homopolarni motorji, tako kot homopolarna indukcija na splošno, niso vključeni v standardne fizikalne učbenike. Kljub temu pa lahko pojave, povezane s homopolarno indukcijo, uporabimo kot zanimivo učno dopolnilo pri rednem pouku fizike, v okviru dodatnih ur ali pri različnih raziskovalnih projektih. Homopolarni motorji so najbolj preprost primer elektromotorja na enosmerni tok in elementarna oblika pretvorbe električne energije v mehansko. Na višjih ravneh poučevanja fizike omogočajo preprosto demonstracijo sile na gibajoči naboj (tokovni vodnik) in analizo njenega navora. Kot vse homopolarne naprave lahko tudi motorna izvedba s svojo zagonetnostjo, ki ima dolgo zgodovinsko ozadje, ponudi miselni izziv izkušenim fizikom.

THE HOMOPOLAR MOTORS

Homopolar motors, like homopolar induction in general, are usualy not included in the physics texbooks. However, the phenomena associated with homopolar induction can be used as an interesting supplementary chapter in regular physics classes, as part of additional hours or in various school research projects. Homopolar motors are the simplest example of a direct-current electric motor, and thus an elemental example of converting electricity into the mechanical energy. At the higher levels of physics education, the motors can serve for demonstration of the magnetic force on a moving charge (wire segment) and for analysis of magnetic torque. Like all homopolar devices, the motor version with its puzzle, that has a long history, offers a mental challenge also for experienced physicists.

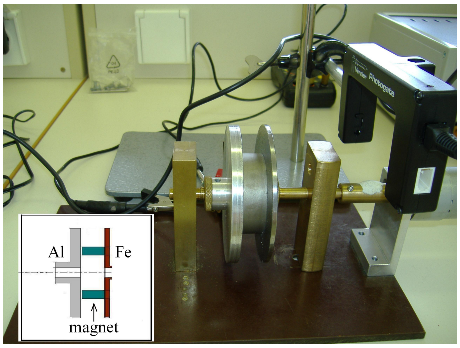
Uvod

O homopolarni indukciji smo prav na tem mestu že pisali [3], za lažje nadaljevanje ponovimo v uvodu ključne značilnosti pojava:

- Homopolarna indukcija je elektromagnetna indukcija s homogenim ali z osno simetričnim magnetnim poljem.
- Oznaka »homopolarna« (tudi »unipolarna«) izvira iz sredine 19. stoletja, ko je prevladovalo prepričanje, da je pri pojavu pomemben samo en pol magneta.
- Če vrtimo kovinski disk okrog simetrijske osi magnetnega polja, se med središčem in robom diska inducira napetost U_i.

- Nastanek napetosti lahko na srednješolski ravni razložimo z magnetno silo na gibajoče se elektrone znotraj kovinskega diska. Dobimo zvezo
$$U_i = \frac{\omega}{2\pi}\Phi_m, \tag{1}$$
pri čemer je ω kotna hitrost vrtenja diska in Φ_m magnetni pretok skozi krožno zanko, ki poteka po obodu diska.

- Inducirano napetost izmerimo tudi v primeru, če se skupaj s kovinskim diskom vrti še izvir magnetnega polja. Nasprotno pa samo vrtenje izvira magnetnega polja na mirujočem disku ne povzroči nastanka inducirane napetosti (slika 1).

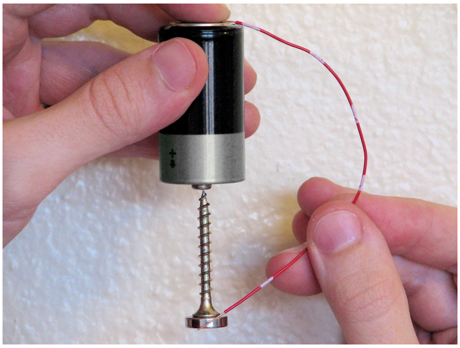


Slika 1. Faradayev poskus. Na skupno os pritrdimo nemagnetni kovinski disk (Al) in trajni magnet s feromagnetnim dodatkom (Fe). Vrtilni mehanizem omogoča samostojno vrtenje kovinskega diska ali magneta in hkratno vrtenje obeh elementov. V vseh treh primerih merimo napetost med središčem in robom kovinskega diska. Rezultat je presenetljiv: inducirano napetost izmerimo v primerih, ko vrtimo samo kovinski disk ali ko skupaj vrtimo kovinski disk in magnet, ob mirovanju diska in vrtenju magneta napetosti ne izmerimo [3].

- Izid opisanega eksperimenta ni v skladu z eno od osnovnih predstav o magnetni indukciji, tj. pomembnostjo relativnega gibanja med prevodno zanko in izvirom magnetnega polja.

- Pokaže se, da lahko izid poskusa enakovredno razložimo na dva načina; absolutna razlaga poudarja pomen gibanja prevodnika, gibanje izvira pa je za nastanek inducirane napetosti nepomembno. Relativna razlaga poudarja pomen relativnega gibanja med vsemi tremi pari vključenih elementov: kovinskim diskom, izvirom magnetnega polja in voltmetrom (preostankom vezja).

- Vse homopolarne naprave vključujejo drsne kontakte, ki omogočajo relativno gibanje med posameznimi deli električnega kroga.



Slika 2. Homopolarni motor – najbolj preprosta oblika elektromotorja [8].

Eksperiment

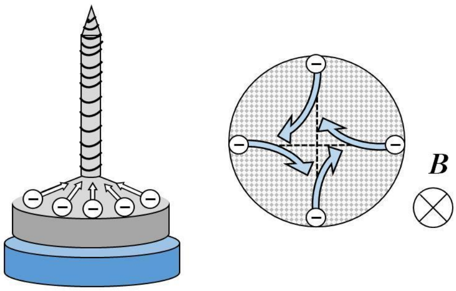
Povežimo baterijo, kovinski vijak in majhen ploščni magnet tako, kot je prikazano na sliki 2.

Brž ko sklenemo električni krog, se vijak (skupaj z magnetom) začne vrteti! Dobili smo preprosto napravo, ki pretvarja električno energijo v mehansko, kar je osnovna značilnost elektromotorjev. Tako kot pri homopolarni indukciji, imamo opravka z osno simetričnim magnetnim poljem, zato ga imenujemo homopolarni motor. Še pred razlago delovanja motorja si zastavimo nekaj osnovnih vprašanj:

- Kakšna je vloga vijaka? Ga lahko nadomestimo z žebljem ali z žico?
- Od katerih fizikalnih količin je odvisna končna hitrost vijaka?
- Kako bi odvisnost raziskali s (šolskim) eksperimentom?
- Kaj se zgodi, če vijaku preprečimo vrtenje? Se bo v tem primeru vrtel preostanek vezja? Bi bila potem smer vrtenja enaka ali nasprotna smeri vrtenja vijaka?
- Ali vrtenje magneta vpliva na delovanje motorja?
- Kako je z ohranitvijo vrtilne količine? Kaj je »akcija« in kaj »reakcija«?

Razlaga

Pri iskanju odgovorov na zastavljena vprašanja začnemo razlago s tokom, ki ga požene baterija skozi zaključeno tokovno zanko, katere del je tudi vijak. Začetni tok je odvisen od napetosti baterije U_0 in od električnega upora vijaka (celotnega vezja) R. Ker ima električni tok v področju glave vijaka pretežno radialno smer, se na posamezne tokovne odseke pojavi pravokotna magnetna sila, ki povzroči navor in vrtenje vijaka. V mikroskopski sliki deluje na gibajoče se elektrone magnetna sila, zato ti pridobivajo v povprečju tudi tangencialno komponento hitrosti. Trke elektronov z ioni v tangentni smeri zazna vijak kot magnetni navor (slika 3).



Slika 3. Pri električnem toku skozi vijak pridobijo elektroni zaradi magnetne sile še tangencialno komponento hitrosti, na vijak deluje magnetni navor.

V [4] je bilo pokazano, da velja za magnetni navor zveza:

$$M = \frac{I}{2\pi}\Phi_B, \tag{2}$$

pri čemer je Φ_B magnetni pretok skozi zanko, ki gre po obodu glave vijaka. Magnetni navor je premo sorazmeren z električnim tokom, kakor to poznamo pri tokovni zanki [6], le da zdaj kaže vektor navora v smeri zunanjega magnetnega polja in ne v pravokotni smeri.

Navor lahko torej povečamo tako, da povečamo tok skozi zanko ali da uporabimo močnejši magnet oz. vijak s širšo glavo. Na stikih med vrtečim se vijakom in baterijo na eni strani ter žičnim kontaktom na drugi strani se ustvarja majhen zunanji zaviralni navor M_{zun}; privzemimo, da je njegova vrednost stalna. Dovolj velika napetost na viru povzroči rezultanto navora ter posledično enakomerno pospešeno vrtenje vijaka. Vendar nas izkušnje z motorji iz vsakdanjega življenja učijo, da pospeševanje običajno traja zelo kratek čas. Večina elektromotorjev dokaj hitro doseže končno hitrost in od takrat naprej se vrti motorna gred enakomerno. Razlog je reakcijski navor, ki je posledica inducirane napetosti v motorju.

Zaradi vrtenja vijaka v magnetnem polju se med osjo in robom vijaka inducira električna napetost, podobno kot v primeru vrtenja Faradayevega diska (1). Inducirana napetost ima nasprotno polariteto kot vir napetosti, zato se celotna gonilna napetost tokovne zanke in s tem električni tok zmanjšata. Za neto električni tok velja torej:

$$I = \frac{U_0 - U_i}{R}. \tag{3}$$

V stacionarnem stanju ob enakomernem vrtenju vijaka sta magnetni navor in zunanji zaviralni magnetni navor v ravnovesju:

$$M = M_{zun}, \tag{4}$$

Iz enačb (2), (3) in (4) dobimo zvezo

$$\frac{(U_0 - U_i)\Phi_B}{R\ 2\pi} = M_{zun}.$$

Ker poznamo zvezo med inducirano napetostjo in kotno hitrostjo vijaka (1), dobimo za končno hitrost vijaka izraz

$$\omega = \frac{2\pi U_0}{\Phi_B} - \frac{M_{zun} 4\pi^2 R}{(\Phi_B)^2}. \tag{5}$$

Za primer, ko velja $M_{zun} \approx 0$, lahko v (5) izpustimo drugi člen in dobimo končno hitrost vijaka

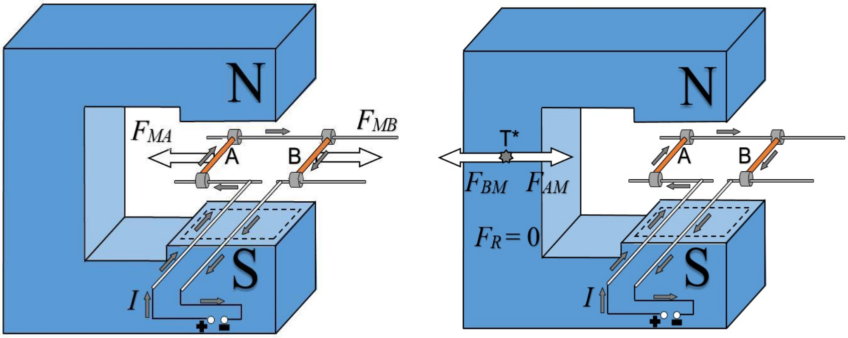
$$\omega = \frac{2\pi U_0}{\Phi_B}, \tag{6}$$

kjer je Φ_B magnetni pretok skozi vrhnjo ploskev glave vijaka. Končna hitrost vijaka je torej premo sorazmerna z napetostjo baterije in obratno sorazmerna z gostoto magnetnega polja in ploščino glave vijaka. S spreminjanjem baterije, magnetov in dimenzije vijaka se da enačbo (6) dokaj hitro kvalitativno potrditi, natančnejša meritev pa se zdi primerna tudi za laboratorijsko vajo ali projektno oz. raziskovalno nalogo.

Na koncu poudarimo še enkrat, da velja približek za končno kotno hitrost (6) samo, ko je zunanji navor zanemarljiv. V primeru homopolarnih motorjev v funkciji delovnih orodij, ko je premagovanje zunanjega navora ključna naloga, je treba za končno hitrost vijaka uporabiti celotno rešitev (5). V limitnem primeru največjih obremenitev sta kotna hitrost in inducirana napetost zanemarljivi, tako da lahko neposredno iz zveze (2) dobimo zahteve po električnem toku in lastnostih uporabljenega magneta.

Analogija

V šolah se na splošno premo gibanje obravnava podrobneje od kroženja in vrtenja. Z uporabo analogije z ravnimi tokovnimi vodniki poskusimo zato še poglobiti razumevanje principa delovanja homopolarnega motorja. Namesto o navorih bomo govorili o silah, vrtilno količino pa nadomestili z gibalno količino. Analizirali bomo reakcije v obliki magnetnih sil na gibajoče naboje in induciranih napetosti. Zanimalo nas bo, ali sta tudi v primeru homopolarnih motorjev obe razlagi homopolarne indukcije enakovredni (pomembnost absolutnega ali relativnega gibanja) in ali ima gibanje izvira magnetnega



Slika 4. Prikaz delovanja homopolarnega motorja s pomočjo razlage magnetne sile na gibljive prečke znotraj pravokotne tokovne zanke. Rezultanta sil na magnet je enaka nič.

polja kakšen vpliv na delovanje motorja. S spoznanji bomo dopolnili zbirko odgovorov na zastavljena vprašanja v poglavju Eksperiment.

Skozi tokovno zanko, ki se zvečine nahaja v zunanjem homogenem magnetnem polju, naj teče enosmerni tok v smeri, kot je prikazano na sliki 4. Drsni stranici A in B dolžine l sta na medsebojni razdalji r in se lahko prosto (premo) gibljeta po dveh pritrjenih kovinskih nosilcih. Brez zunanjega magnetnega polja deluje med prečkama A in B odbojna magnetna sila

$$F = \frac{\mu l I^2}{2\pi r},$$

ki se s povečevanjem medsebojne razdalje zmanjšuje. V primeru zunanjega magnetnega polja čuti vsaka od prečk silo

$$F_{MA} = F_{MB} = IlB. \tag{7}$$

Magnetna sila, ki deluje na prečki v različnih smereh in ni odvisna od njune medsebojne razdalje, povzroči gibanje prečk. Tudi v tem primeru se električna energija pretvarja v mehansko, spet imamo opravka s homopolarnim elektromotorjem. Po 3. Newtonovem zakonu deluje vsaka od prečk z nasprotno enako silo na magnet. Obe sili se uravnovesita, tako da magnet ne zazna nobene efektivne sile. Enaka ugotovitev velja tudi za drugi par vzporednih vodnikov. Rezultanta sil na magnet F_R je enaka nič vsaj dotlej, dokler se večji del tokovne zanke nahaja znotraj homogenega magnetnega polja magneta.

Če izberemo smer električnega toka tako, da kaže lastno magnetno polje zanke v smeri zunanjega magnetnega polja, je učinek delovanja magnetne sile večanje razdalje med prečkama in s tem zmanjševanje lastnega magnetnega polja zanke. Obratno se zgodi, če smer toka skozi zanko zamenjamo.

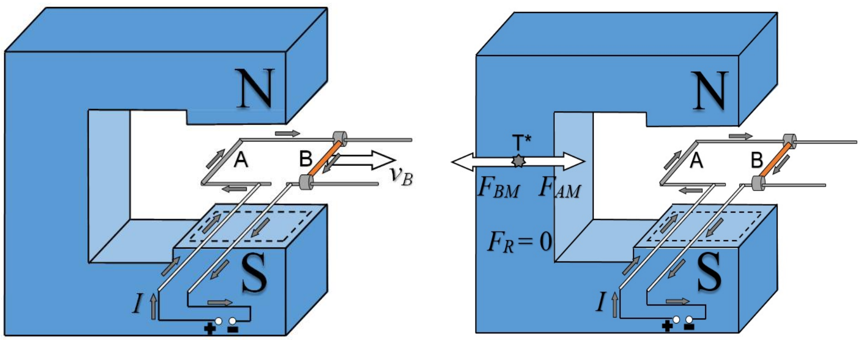
V obeh primerih se zdi, kot da zunanje magnetno polje deluje le kot sredstvo za medsebojno interakcijo posameznih delov električne zanke. Dokler so vsi deli tokovne zanke v enakem magnetnem polju, se izvir magnetne sile v efektivnem smislu prenese z zunanjega magneta na posamezne vzporedne odseke tokovne zanke.

Kot smo že povedali, se gredi v elektromotorjih zaradi indukcije prej ali slej začnejo vrteti enakomerno. S hitrejšim vrtenjem se povečuje reakcijski navor, ki čez čas uravnovesi primarni magnetni navor. Poglejmo, kako je z reakcijo v uporabljeni analogiji. Na nosilce naboja v prečkah A in B, ki se zaradi gibanja prečk gibljejo pravokotno na homogeno magnetno polje, deluje magnetna sila

$$F_m = evB.$$

Med krajiščema obeh gibajočih se prečk se, merjeno v laboratorijskem sistemu mirujočega preostanka kroga, inducira električna napetost. Učinka obeh induciranih napetosti se seštejeta in poženeta inducirani tok v nasprotno smer glede na prvotno smer toka. Zaradi tega se skupni tok v zanki zmanjša, s tem se zmanjša tudi sila med prečkama (7) in slej ko prej se zaradi mehanskega trenja prečki gibljeta enakomerno.

V naslednjem koraku predpostavimo, da se lahko giblje samo prečka B, medtem ko ostane prečka A del negibljivega dela tokovne zanke (slika 5).

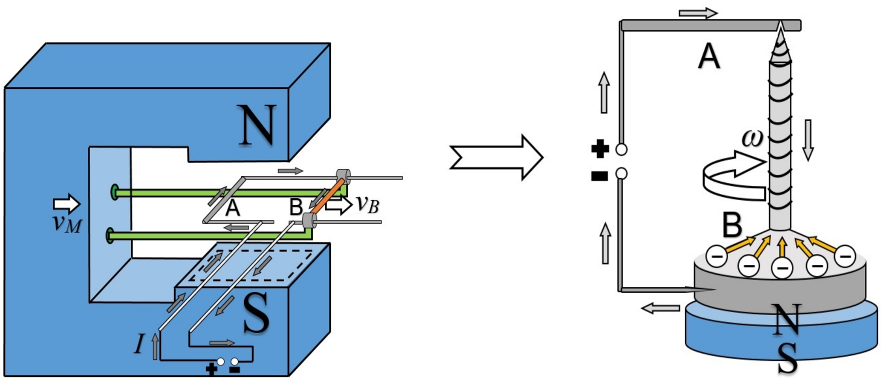


Slika 5. Analogija z eno samo gibljivo stranico B. Rezultanta sil na magnet ostaja enaka nič.

Sila na prečko B ostane enaka, magnetno silo na prečko A pa uravnovesi okolica, tj. podlaga, na katero je zanka pričvrščena. Enako velja za preostala dva odseka vezja. Celotna neto sila magneta na tokovno zanko je enaka nič in podobno kot v prejšnjem zgledu tudi magnet ne čuti nobene rezultante. Na prvi pogled se lahko zdi, kot da deluje sila samo na prečko B. Ker je izvor te sile v magnetu in ker ne zaznamo ustrezne reakcije premikanja magneta, se zdi, kot da delovanje motorja krši zakon o ohranitvi gibalne količine. V tej luči so razlage, ki ne upoštevajo zunanjih opornih sil (ali navorov), nepopolne. Napetost se zdaj inducira samo na gibljivi prečki B, zato je dvakrat manjša glede na napetost v prejšnjem zgledu, a slej ko prej se bo prečka zaradi trenja spet gibala enakomerno.

Analizirajmo še problem gibanja magneta. Privzemimo, da se magnet na sliki 5 giblje enakomerno z majhno hitrostjo v desno, v smeri gibanja prečke B. Magnetni sili na prečki A in B se ne spremenita (7), rezultanta sil na magnet ostaja nič. Kako pa je z reakcijsko inducirano napetostjo? Če privzamemo hipotezo o pomembnosti relativne hitrosti med izvirom in nosilci naboja, se zaradi gibanja magneta inducirana napetost na prečki B nekoliko zmanjša, primanjkljaj nadomesti napetost na mirujoči prečki A. Celotna inducirana napetost ostane nespremenjena. Pridemo torej do istega rezultata kot ob privzetku, da je za velikost inducirane napetosti pomembno le absolutno gibanje obeh prečk (absolutna razlaga).

Z ugotovitvijo, da gibanje magneta pri homopolarnih motorjih ne vpliva na inducirano napetost, naredimo še dodatni korak v razvoju analogije. Ko povežemo magnet z gibljivo prečko B preko togega izolatorja, postane podobnost z obravnavano obliko homopolarnega motorja iz eksperimenta (slika 2) še bolj očitna: gibljiva prečka B predstavlja glavo vijaka, negibljiva prečka A predstavlja del vezja v eksperimentu, ki je pravokoten na magnetno polje, povezovalni togi izolator pa nadomesti lepenje med magnetom in glavo vijaka (slika 6).



Slika 6. Podobnost v delovanju dveh oblik homopolarnega motorja; premo gibanje dela tokovne zanke (analogija) primerjamo z vrtenjem (eksperiment). V obeh primerih sledi gibanju prevodnika tudi magnet.

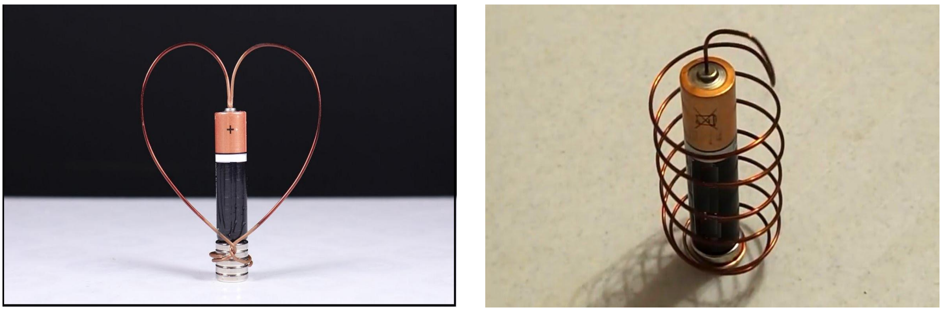
V analogiji smo privzeli, da se večji del tokovne zanke nahaja v enakem (homogenem) magnetnem polju. V realnem eksperimentu je najverjetneje magnetno polje na oddaljenem mestu šibkejše kot v neposredni bližini magneta. V tem primeru se magnetne silnice razklenejo, magnetno polje pa pridobi poleg oslabljene navpične komponente tudi vodoravno komponento.

Primanjkljaj magnetne sile na del vodnika A se nadomesti s silo na navpični odsek vodnika (slika 6), celotna magnetna sila na tokovno zanko pa tako, kot smo ugotovili v analogiji, ostaja nič. Sklep potrjuje tudi eksperimentalna izkušnja, ki kaže na to, da v grobem delovanje homopolarnega motorja (slika 2) ni odvisno od dolžine in geometrije tokovnih vodnikov.

Pedagoški vidik

Homopolarni motorji zelo nazorno prikazujejo spreminjanje električne energije v mehansko, zato lahko imajo veliko demonstrativno moč že pri osnovnošolskem pouku fizike ali tehnike. Njihova izdelava in optimizacija posameznih parametrov delovanja se zdi primerna naloga za projektno oz. raziskovalno delo (slika 7). Pri pouku fizike na srednjih šolah in fakultetah lahko služijo homopolarni motorji za ponazoritev magnetne sile na gibajoči se naboj (tokovni vodnik) oziroma so lahko v pomoč pri analizi elektromagnetne indukcije in narave elektromagnetizma. Ponuja se primerjava homopolarnega motorja s klasičnim elektromotorjem na izmenični tok: vloge rotorja, statorja, kolektorja, komutatorja in drugih sestavnih delov se precej poenostavijo ali celo izginejo. Tudi načrtovanje dovolj natančnega eksperimenta in preverjanje enačb (2) in (6) je lahko primeren izziv.

Poleg resnih znanstvenih člankov o homopolarnih motorjih [7, 1, 2] lahko najdemo množico izvedb in navodil za izdelavo v obliki fotografij in filmov tudi na spletu [9, 10]. Ob vsem naštetem preseneča relativno slabo poznavanje teh preprostih naprav, tako s strani dijakov kot tudi s strani učiteljev. V pomoč učitelju pri iskanju rešitev in ustreznih razlag ob demonstracijski uporabi homopolarnih motorjev lahko med drugim služi tudi prej prikazana analogija, pri tem se zdi ključen prehod iz opisa tokovne zanke z dvema gibljivima prečkama k zanki z eno gibljivo prečko.



Slika 7. Dva primera izvedbe homopolarnih motorjev [9, 10]. Oba pola baterije predstavljata za žični sistem drsni kontakt. Magnetno polje ustvarja ploščni magnet pod baterijo. Tako kot pri motorju z vijakom na sliki 2 je pomemben magnetni navor na del vezja, ki je pravokoten na smer magnetnega polja (os vrtenja).

Zaključek

Za zaključek citirajmo Rovellija [5]. Čeprav se njegove besede zvečine nanašajo na večje konceptualne probleme, pa lahko prenesemo njegov pogled na negotovost in verjetnost v okviru fizike toplote tudi na problem razumevanja inducirane napetosti v homopolarnih napravah. Hkrati naj citat velja kot vabilo za bolj splošen pogled na električno in magnetno polje, ki ga prikažemo v dodatku.

> *Napovedljivost ali nenapovedljivost se ne tiče njunega točnega stanja. Tiče se le dokaj omejene podskupine njunih lastnosti, s katerimi součinkujemo mi. Ta podskupina lastnosti je odvisna od našega posebnega součinkovanja z žličko in balonom. Verjetnost se ne nanaša na razvoj snovi same. Nanaša se le na razvoj tistih njenih posebnih lastnosti, na katere delujemo mi. In že spet se pokaže, da so zamisli, s katerimi si urejamo svet, v bistvu relacijske – kako součinkujejo deli sveta med seboj.*

Dodatek – Teorija EM polja

Za bralca, ki ga, tako kot včasih M. Faradaya, vprašanje o gibanju magnetnega polja pri homopolarnih napravah še zmeraj bega, prikličemo teorijo elektromagnetnega (EM) polja. Kako torej bolj splošno pristopiti k problemu in razlagi odnosa med izvirom in poljem? Sestavili bomo četverec elektromagnetnega polja, ga transformirali z Lorentzovo transformacijo v koordinatni sistem gibajočega se naboja (in magneta) ter pogledali, kaj se pri tem zgodi z magnetnim in električnim poljem.

Za začetek zapišimo Maxwellove enačbe:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \tag{8}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{11}$$

Enačbe postanejo bolj simetrične z vpeljavo vektorskega potenciala $\vec{A}$ in skalarnega potenciala ϕ, tako da velja:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{12}$$

S tako definicijo potencialov sta enačbi (9) in (10) identično izpolnjeni, iz enačb (8) in (11) ter s pomočjo vektorske identitete $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ pa dobimo

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Simetrija med $\vec{B}$ in $\vec{E}$, ki je razvidna iz Maxwellovih enačb, se prenese tudi na enačbi za vektorski potencial $\vec{A}$, s katerim predstavimo magnetno polje, ter skalarni potencial ϕ, ki predstavlja električno polje. Iz definicije (12) ugotovimo, da rodita vektorska potenciala $\vec{A}$ in $\vec{A'}$, ki se razlikujeta za gradient poljubnega potenciala $-\nabla\psi$, isto magnetno polje $\vec{B}$. Podobna ugotovitev velja tudi za dva skalarna potenciala; ϕ in ϕ', ki se razlikujeta za člen $\partial\psi/\partial t$, pripeljeta do istega električnega polja $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}\vec{A'} &= \vec{A} + \nabla\psi\\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}.\end{aligned} \tag{14}$$

Ker sta $\vec{B}$ in $\vec{E}$ edini merljivi količini, sta potenciala $\vec{A}$ in ϕ nedoločena do umeritvenega (kalibracijskega) polja ψ. To imenujemo umeritvena invarianta elektromagnetnega polja. Omogoča nam, da lahko izberemo polji $\vec{A}$ in ϕ tako, da ustrezata še dodatnemu skalarnemu pogoju. Zelo ugodno je izbrati pogoj:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \tag{15}$$

Do izbranega pogoja (15) (ki naj velja tudi za potenciala $\vec{A'}$ in ϕ'), nas privede umeritveni potencial ψ, za katerega velja:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{16}$$

Ker gre za (rešljivo) valovno enačbo, si lahko torej z umeritvijo (16) poenostavimo desne strani enačb (13) tako, da dobimo

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}\\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\end{aligned} \tag{17}$$

Zapis valovnega operatorja $\nabla^2 - \partial^2/(c^2\partial t^2)$, ki na levi strani enačb (16) in (17) deluje na ψ, $\vec{A}$ in ϕ, se z uvedbo dodatne časovne koordinate ct, ki je značilnost teorije relativnosti, poenostavi. Ob tem bomo s četvercem predstavili tudi elektromagnetno polje, hkrati razširili s četrto komponento še vektor gostote toka, s čimer dobimo iz enačb (13) enotno enačbo EM polja. Še prej pojasnimo pravila zapisa, značilnega za teorijo relativnosti.

Četverec koordinate dogodka $P(ct, x, y, z,)$ označimo z (x^0, x^1, x^2, x^3). Vpeljimo še matriko Minkovskega s komponentami $\eta^{\mu\nu}$ tako, da je $\eta^{00} = -1$, $\eta^{ii} = 1$ za $i = 1, 2, 3$, vse druge komponente pa so enake 0. Za zgled zapišimo delovanje valovnega operatorja $\nabla^2 - \partial^2/(c^2\partial t^2)$ na skalarnem potencialu ϕ v krajši obliki:

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu\nu} \tag{18}$$

V zgornjem zapisu (18) se skrivata dva dogovora: če se grški indeks v produktu ponovi tako, da nastopa enkrat zgoraj in enkrat spodaj, potem gre za tekoči indeks, po katerem seštevamo, ko teče od 0 do 3. Drugi dogovor je ta, da označimo parcialni odvod funkcije po koordinati x^μ kot:

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \qquad \phi_{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Vpeljimo četverec elektromagnetnega polja tako, da vektorskemu potencialu $\vec{A}$ dodamo ničelno komponentno, ki jo sestavimo iz skalarnega potenciala ϕ kot:

$$A_0 = -\frac{\phi}{c},$$

kjer je c svetlobna hitrost. Umeritvena invarianta (14) se zapiše

$$A'_\mu = A_\mu + \psi_{,\mu}\,.$$

Valovni enačbi (17), ki smo ju dobili z umeritvijo (15), lahko sedaj združimo:

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\mu_0 j_\lambda,$$

pri čemer smo razširili še vektor gostote toka $\vec{j}$ v četverec z dodano časovno komponento $j_0 = -\rho c$.

Valovni operator $\eta^{\mu\nu}\partial^2\phi/(\partial x^\mu \partial x^\nu)$ se pri prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega s klasično Galilejevo transformacijo ne ohranja. Da elektromagnetna teorija ni invariantna na Galilejevo transformacijo, je bilo jasno že konec 19. stoletja. Ustrezna transformacija $\underline{L}$, ki ohrani valovni operator, mora zadostiti pogoju:

$$\underline{L}\;\underline{\eta}\;\widetilde{\underline{L}} = \underline{\eta}, \tag{19}$$

pri čemer je $\widetilde{\underline{L}}$ inverzna transformacija $\underline{L}$. Pogoj (19) zadovoljijo Lorentzovi potiski, to je matrika oblike:

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_x\gamma & \beta_y\gamma & \beta_z\gamma \\ \beta_x\gamma & & & \\ \beta_y\gamma & & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\vec{\beta}\otimes\vec{\beta} & \\ \beta_z\gamma & & & \end{pmatrix},$$

pri čemer je vektor $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$ in pomeni zapis $\vec{\beta}\otimes\vec{\beta}$ matriko

$$\vec{\beta}\otimes\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x\beta_x & \beta_x\beta_y & \beta_x\beta_z \\ \beta_y\beta_x & \beta_y\beta_y & \beta_y\beta_z \\ \beta_z\beta_x & \beta_z\beta_y & \beta_z\beta_z \end{pmatrix}.$$

Lorentzove transformacije, značilnost Einsteinove teorije relativnosti, so torej ustrezne tudi za transformacije četvercev elektromagnetne teorije, kar nakazuje na to, da je tudi ta v svojem bistvu relativistična.

Poglejmo sedaj, kako $\underline{L}$ transformira četverec EM polja. V koordinatnem sistemu $S : x^0, x, y, z$ naj kaže konstantno magnetno polje $\vec{B} = (0, 0, B)$ v smeri osi z. Najbolj preprost $\vec{A}$, ki ustreza temu polju, tvori četverec:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V sistemu $S' : x'^0, x', y', z'$, ki se giblje glede na sistem S z relativno hitrostjo $\vec{v}$, je

$$\underline{A'} = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{\beta}\gamma \\ \vec{\beta}\gamma & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\otimes\vec{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A} \\ \vec{A} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{A}) \end{pmatrix}.$$

Za naše polje velja $\vec{\beta}\cdot\vec{A} = \beta_y Bx$, tako da dobimo:

$$\underline{A'} = \begin{pmatrix} \gamma B\beta_y x \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\begin{pmatrix} \beta_x\beta_y Bx \\ \beta_y\beta_y Bx \\ \beta_z\beta_y Bx \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Z inverzno Lorentzovo transformacijo dobimo zvezo med x in x'. Iz

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{\beta}\gamma \\ -\vec{\beta}\gamma & I + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\otimes\vec{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dobimo

$$x = -\beta_x \gamma x^{0'} + x' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x(\beta_x \cdot x' + \beta_y \cdot y' + \beta_z \cdot z')$$

ter

$$\underline{A'} = \left(\begin{array}{c} \gamma B \beta_y \\ \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\beta}\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_y B \end{array} \right) \cdot \\ \cdot \left(-\beta_x \gamma x^{0'} + x' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x(\beta_x \cdot x' + \beta_y \cdot y' + \beta_z \cdot z') \right),$$

iz česar lahko po definiciji (12) izluščimo polji $\vec{B}'$ in $\vec{E}'$. Tako dobimo vrednosti:

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}B\beta_x\beta_z \\ -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}B\beta_y\beta_z \\ B + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}B(\beta_x^2 + \beta_y^2) \end{pmatrix} \text{ in } \vec{E}' = \begin{pmatrix} \gamma B v_y(1 + 2\frac{\gamma^3}{\gamma+1}\beta_x^2) \\ \gamma B v_x(1 + 2\frac{\gamma^3}{\gamma+1}\beta_y^2) \\ \gamma 2\frac{\gamma^4}{\gamma+1}Bc\beta_x\beta_y\beta_z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Ker smo uporabili magnetno polje, ki je imelo komponento samo v smeri osi z, se nam je v zapisu rezultata navidezno izgubila simetrija v zapisu komponent $\vec{B}'$ in $\vec{E}'$. Vendar lahko, upoštevajoč aditivnost obeh polj in linearnost Lorentzove transformacije $\underline{L}$, uganemo polje v transformiranem sistemu tudi pri gibanju po magnetnem polju, ki vsebuje vse tri neničelne komponente.

Iz rezultata (20) je razvidno, da v lastnem sistemu delca, ki se giblje v ravnini xy, pravokotni na izbrano smer magnetnega polja, magnetno polje ostaja nespremenjeno. Ker velja $\beta_z = 0$, odpadeta komponenti $B'_x = B'_y = 0$, izraz $B'_z = B + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}B(\beta_x^2 + \beta_y^2)$ pa se z upoštevanjem $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ poenostavi v $B'_z = \gamma\beta$. Pri nerelativističnih hitrostih ($\gamma \approx 1$) se torej magnetno polje z opisano transformacijo ohranja $\vec{B}' = \vec{B}$. V primeru gibanja v smeri homogenega polja ($\beta_x = \beta_y = 0$) pa velja ohranitev magnetnega polja tudi za relativistične hitrosti.

Z Lorentzovo transformacijo v koordinatni sistem S' smo pridelali tudi električno polje. V (20) se v komponentah električnega polja skriva vektorski produkt $\gamma\vec{v} \times \vec{B}$. Ta je okleščen, saj smo uporabili najbolj preprosto obliko magnetnega polja z le eno neničelno komponento. V lastnem sistemu delca, ki se giblje v ravnini xy, ostaja električno polje v ravnini in kaže pravokotno na smer njegovega gibanja. Nastanek električnega polja je v skladu z relativistično sliko elektromagnetizma. Lorentzova sila na naboj v polju

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (21)$$

ki je merljiva količina, mora biti v vseh inercialnih sistemih enaka. Ker je hitrost v lastnem sistemu gibajočega se naboja enaka nič, delec ne čuti magnetne sile, njeno vlogo prevzame električna sila.

Vidimo, da med pojmoma električno in magnetno polje ni absolutne razlike, delitev je odvisna od posameznega inercialnega sistema. Tako je tudi (izmerjena) inducirana napetost odvisna od izbire opazovanega koordinatnega sistema, najpogosteje je ta vezan na preostanek električnega kroga (slika 1). Ugotovimo, da brez sklenjenega električnega kroga o inducirani napetosti ni smiselno govoriti. Vse to se ujema tudi z enakovrednostjo absolutne in relativne razlage inducirane napetosti, ki smo jo uporabili pri opisu delovanja homopolarnih naprav.

Vrnimo se k transformaciji magnetnega polja. Ugotovili smo, da se homogeno magnetno polje v sistemu, ki se giblje v ravnini, pravokotni na smer $\vec{B}$, ohranja. Ugotovitev mora veljati tudi v sistemu gibajočega se magneta. Gibanje izvira magnetnega polja se torej ne odraža v spremembi magnetnega polja, temveč v nastalem električnem polju (v sistemu magneta). Privzemimo, da se magnet giblje v smeri osi x z nerelativistično hitrostjo $v = v_x$, v njegovi okolici pa se nahaja mirujoči naboj e. Sila na naboj, ki jo izmerimo v sistemu magneta (21), ima dve komponenti: poleg električne komponente, ki je posledica nastalega električnega polja $F_{el} = ev_xB$, vsebuje še magnetno komponento $F_m = -ev_xB$. Slednja je posledica tega, da mirovanje naboja v gibajočem se magnetu zaznamo kot gibanje s hitrostjo $v = -v_x$. Obe komponenti sile se izničita, celotna Lorentzova sila na mirujoči naboj ostaja nič. Naboj torej ne zazna vpliva gibanja magneta. Podobno velja za vrtenje magneta okrog simetrijske osi in za gibajoči naboj znotraj prevodnika v homopolarnih napravah.

LITERATURA

[1] R. D. Eagleton, *The radial magnetic field homopolar motor*, Am. J. Phys. **56** (1988), 858–.

[2] J. Guala Valverde, P. Mazzoni in R. Arcilles, *The homopolar motor: A true relativistic engine*, Am. J. Phys. **70** (2002), 1052–.

[3] R. Hauko, *Homopolarna indukcija*, Obzornik mat. fiz. **61** (2014), 52–60.

[4] H. Montgomery, *Unipolar induction: a neglected topic in the teaching of electromagnetism*, Eur. J. Phys. **20** (1999), 271–280.

[5] C. Rovelli, *Sedem kratkih lekcij iz fizike*, prev. A. Kodre, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2019, 50–51.

[6] J. Strnad, *Fizika*, 2. del, 5. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1995, 362–365.

[7] A. Serra-Valls in C. Gago-Bousquet, *Conducting Spiral as an Acyclic ou Unipolar Machine*, Am. J. Phys. **38** (1970), 1273–.

[8] *Homopolar motor*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Homopolar\_motor`, ogled 14. 11. 2019.

[9] *How to make a Homopolar Motor from Battery*, dostopno na `www.youtube.com/watch?v=RGFtpOZxThc`, ogled 30. 10. 2019.

[10] *DIY: How to Make a Simple Homopolar Motor*, dostopno na `www.youtube.com/watch?v=voHz6sxwQ2Q`, ogled 30. 10. 2019.

Leonardo da Vinci (1452–1519) – ob petstoletnici njegove smrti: Renesančni človek

Uvod: Leonardo in renesansa

Petsto let od svoje smrti Leonardo da Vinci, ta največji in najbolj preučevani renesančni genij, še vedno navdihuje in preseneča. Velja za najpopolnejše utelešenje humanističnega ideala vsestranskega človeka (*l'uomo universale*). Okrog njegove javne podobe se je skozi stoletja spletel pravi mit, ki njegove dosežke nekritično in pretirano poveličuje. Njegovi občudovalci so mu pripisovali tudi nekatere izume, o katerih ni razmišljal; tako so npr. neko njegovo risbo imeli za prikaz računskega stroja, čeprav je v resnici prikazovala prestavni mehanizem. Kljub neštetim analizam (in celo poskusom osvetlitve njegovega nezavednega s strani samega očeta psihonalize, Sigmunda Freuda) Leonardo ostaja skrivnosten kot Giocondin smehljaj, ali kot temna stran meseca, ali kot skalna jama, pred katero je nekoč obstal, v precepu med strahom, ki ga je zadrževal, in radovednostjo, ki ga je gnala naprej [4, str. 20]. V zgodovino se je zapisal predvsem kot umetnik in izumitelj, čeprav je bil, kot razkrivajo njegove beležnice in razprave, ki jih je za časa svojega življenja pokazal le redkim, tudi znanstvenik, naravoslovec in mislec ter matematik.

Leonardo je vedno rad uporabljal *analogije* in brez težav prehajal med različnimi področji. *Opažanja vzorcev* in spoznanja iz narave, od katere se je učil neposredno, brez učiteljev in knjig, je pogosto prenesel v umetnost ali izumiteljstvo, podprto z znanstvenim raziskovanjem in matematičnim razmišljanjem. Kar je na primer spoznal o letenju ptic, ki ga je strastno preučeval vse življenje, je skušal prenesti v svoje izume letalnih strojev.

Leonardo je imel izredno sposobnost opazovanja. V *Traktatu o slikarstvu* je zapisal: »Slikarjev um naj bo podoben ogledalu, ki se vedno spremeni v barvo tiste stvari, ki jo ima pred seboj, in se napolni s toliko liki, kolikor je stvari, ki se nahajajo pred njim. Vedi torej, slikar, da ne moreš biti dober, če nisi vsestranski mojster in s svojo umetnostjo ne posnemaš vseh vrst oblik, ki jih ustvarja narava; teh pa ne boš znal napraviti, če jih ne vidiš in jih ne upodobiš v duhu« [9, 53. *Čemu mora biti podoben slikarjev um*]. Po drugi strani pa svari, naj pri tem posnemanju ne zaidemo v drugo skrajnost: »Slikarjem pravim, da ne sme nikdar nihče oponašati manire drugega, saj bo imenovan za vnuka in ne sina narave. Kajti glede na to, da je naravnih stvari v tolikšnem izobilju, se je treba vedno vračati k naravi in ne k mojstrom, ki so se učili od nje« [9, 78. *O oponašanju slikarjev*]. Isto misel je izrazil v še splošnejši obliki takole: »Kdor lahko gre k izviru, tega ne zanima vrč vode.« Njegov priljubljeni moto je bil: »Modrost je hči izkušnje.« Kljub temu je sčasoma razvil navado, da je podrobno in sistematično preučil vse, kar so o določeni temi, ki ga je zanimala in jo je želel raziskati, napisali drugi.

Najzanesljivejši primarni viri za preučevanje Leonarda so *Leonardova dela*, dokončana in nedokončana (ohranjene slike, risbe, freske, kipi, študije, razprave, načrti, tehnični izumi, naprave in stroji). Dragocen vir podatkov o Leonardu je knjiga *Življenja umetnikov* (prva izdaja 1550, druga izdaja 1568); v njej je italijanski slikar, arhitekt, pisec in zgodovinar Giorgio Vasari (1511–1574), ki velja za prvega umetnostnega zgodovinarja, opisal življenje in delo več kot 200 slikarjev, kiparjev in arhitektov italijanske renesanse.

Poznavanje Leonarda pomagajo širiti tudi razstave o njem po svetu, še posebej veliko jih bo letos, ob petstoletnici njegove smrti. V gradu Cloux v Amboisu (Francija), kjer je živel nazadnje, je urejena njegova spominska soba, razstavljeni so tudi eksponati njegovih izumov.

Raziskovalcem njegovega življenja in dela je zanimiv tudi kot avtor slavnih *beležnic*. Vanje je zapisoval svoje globoke misli, lucidna opažanja, rezultate svojih eksperimentov, razprave, ki jih nikoli ni objavil in skice neštetih tehničnih izumov, ki so bili veliko pred svojim časom. Te kaotične zapiske, v katerih so se na posameznih listih mešale najrazličnejše teme, je pokazal le redkim. Sam jih je zaman poskušal urediti za objavo. Po Leonardovi smrti se je njegova pisna zapuščina začela drobiti, izgubljati, krasti [2, str. 109–116]. Večino beležnic so odkrili in preučili šele konec 19. stoletja, ko so jih našli založene v arhivih večjih evropskih knjižnic. Ohranjenih je 21 njegovih beležnic z okrog 7200 stranmi zapiskov, risb, skic, idej, vprašanj, opažanj, misli, načrtov, seznamov stvari, ki jih mora postoriti ali spoznati, pa tudi piktogramov [6, str. 114–115], ki so v 20. stoletju navdihnili izum miselnih vzorcev. Vsebujejo zametke številnih razprav (o anatomiji, o slikarstvu, o perspektivi, o ptičjem letu itd.), ki pa jih ni nikoli objavil. Iz njih so kasneje sestavili različne *kodekse* (njihov seznam in popis vsebine bralec najde v [1, str. 63–66] in v [4, str. 527–529]). Po njih so tudi konstruirali prototipe številnih njegovih izumov. Leonardo je pisal v *zrcalni pisavi*, od desne proti levi, z levico, da ne bi razmazal črnila [4, str. 32], in ne zato, ker bi želel skriti svoja odkritja, kot so razlagali nekateri.

Zgoščen opis Leonardovega življenja in dela je podan v [3, 7]. Njegova dela in izumi so prikazani v [5, 6]. Vsebinsko poglobljene razlage Leonarda ponujajo razprave [2]. Njegovi prispevki k fiziki so predstavljeni v [8]. Podrobnejšo zgoščeno kronologijo njegovega življenja in dela, pospremljeno s fotografijami, urejeno v obliki dveh plakatov, ter podrobne razlage njegovih najpomembnejših del lahko bralec najde v [4]. Veliko o njem je v privlačni obliki predstavljeno tudi v bogato ilustrirani knjigi [6] s številnimi reprodukcijami njegovih del. Njegova zbrana dela najdemo na spletni strani [11].

Naš kratki prikaz Leonardovega življenja in dela začnimo z nekaj osnovnimi podatki o njem in o značilnostih obdobja, v katerem je živel in ustvarjal.

Rodi se 15. aprila 1452 v toskanski vasici Vinci. Med 1466 in 1477 je vajenec pri Andrei del Verrochiu, firenškem kiparju, zlatarju in slikarju.

Leta 1472 je sprejet v ceh lekarnarjev, zdravnikov in umetnikov. Leta 1481 slika *Poklon svetih treh kraljev.* Leta 1482 piše znamenito pismo Ludovicu Sforzi, milanskemu regentu, in se preseli v Milano.[1] Leta 1490 se osamosvoji in ustanovi svojo delavnico. V letih 1495–1498 slika *Zadnjo večerjo* pod pokroviteljstvom Ludovica Sforze. Leta 1500 se vrne v Firence. Leta 1502 sprejme mesto glavnega inženirja pri Cesareju Borgii. Leta 1506 dokonča *Mono Lizo*, od katere se do konca življenja ne loči. Leta 1512 iz Milana pobegne v Rim. Leta 1516 zapusti Italijo in se preseli v Amboise, kjer je glavni kraljevi slikar, inženir in arhitekt. Umre 2. maja 1519.

Leonardovi zaščitniki, delodajalci in pokrovitelji so bili mogočneži tistega časa. Najprej je bil to Lorenzo Medičejski Veličastni (1449–1492) v Firencah, nato Ludovico Sforza (1452–1508) v Milanu, nato Cesare Borgia (pribl. 1475–1507), nato Charles d'Amboise (1473–1511), francoski guverner Milana od 1503 do 1511, nato Giuliano Medičejski (1479–1516), Lorenzov sin, v Rimu, nazadnje Franc I., francoski kralj od leta 1515. Leonardo je (okoli 1502) svoje storitve pisno ponudil tudi turškemu sultanu Bajazidu II., ko je ta zaman iskal arhitekta za most čez Zlati rog med Istanbulom in Galato (študije za konstrukcije in pismo v arabščini so v [5, str. 120–121]).

Izraz *renesansa* (v italijanščini *rinascimento*) etimološko ustreza francoskima besedama *renaitre* (oživeti) in *naissance* (rojstvo). Pomeni preobrazbo pogleda na svet, oživljanje klasičnega antičnega ideala človeške moči in zmožnosti. Ta ideal obudi Giotto, razvijejo ga Brunelleschi, Alberti in Masaccio, popoln razcvet doživi z Leonardom, Michelangelom in Rafaelom. Renesanso zaznamujejo tudi številna nova odkritja in izumi (tisk, svinčnik in poceni papir, astrolab, magnetni kompas, velike jadrnice, top z dolgim dosegom, mehanska ura). V tem se bistveno razlikuje od *predrenesančne Evrope.*

Kuga v 14. stoletju je pomorila skoraj polovico Evropejcev; nekaterim posameznikom je ostalo veliko kapitala, ki so ga vlagali v trgovino in obrt, kot pokrovitelji in meceni pa tudi v razvoj znanja in umetnosti – to je bila ena izmed pomembnih spodbud za nastop renesanse. Druga spodbuda je bil beg grških izobražencev iz Konstantinopla leta 1452; v Evropo so prinesli antično znanje in rokopise [3, str. 27–31]. V obdobju renesanse so pomembna novost tudi velike, vsem dostopne knjižnice; kot pravi templji učenosti so spodbujale izmenjavo misli in svobodno razmišljanje.

Na začetku 15. stoletja ni bilo nobenega kraja s tako ustvarjalnim okoljem, kot so bile Firence. V Firencah so se zbirali ustvarjalni duhovi z različnih ustvarjalnih področij. Bogata kultura je nagrajevala predvsem tiste, ki so obvladali in znali zliti v svojem ustvarjalnem delu različne discipline [4, str. 25–28]. Bolj kot firenška renesansa, ki se je navdihovala predvsem pri antiki in klasičnih avtorjih ter avtoritetah ter ni imela posluha za na-

[1] To pismo, ki ga, potem ko navede številne svoje sposobnosti in izume, zaključi z ugotovitvijo, da zna tudi slikati, in to bolje od kogarkoli drugega, imajo za »verjetno najboljšo prošnjo za službo vseh časov« [3, str. 35–37].

ravoslovje in matematiko, je bila Leonardu blizu milanska umetnostna in znanstvena scena, zato je tudi največji del svojega življenja preživel prav v Milanu.

Leonardov pristop k znanosti je bil utemeljen na opazovanju in eksperimentih ter tesno povezan z uporabo novih spoznanj pri različnih izumih, za razliko od klasične znanosti, ki je izšla iz antične filozofije in logike. Klasična aristotelska znanost je svet pojasnjevala, iskala je bistva in vzroke pojavov ter argumente in dokaze, *zakaj* je nekaj res.[2] Bila je bolj ali manj *kvalitativna*, temelječa na logiki silogizmov. Znanost sholastikov je bila ujeta v svoje predpostavke, visoko učena razglabljanja in sledenje avtoritetam.

Nemški teolog, filozof in matematik Nikolaj Kuzanski (1401–1464), ki ga imajo številni za Leonardovega vzornika v »fiziki«, je v fiziko vnesel *kvantitativni* princip. Opozoril je na pomen merjenja pri raziskovanju, trdil je, da je vse gibanje relativno in da se tudi Zemlja giblje [2, str. 53], kar je zagovarjal tudi Leonardo. Leta 1438 je Kuzanski v Italijo iz Konstantinopla prinesel Diofantovo *Aritmetiko*. Znan je tudi po tem, da je z razdelitvijo kroga na neskončno mnogo infinitezimalno tankih krožnih izsekov izpeljal zvezo med ploščino ter radijem in obsegom kroga: $p = or/2$. Z delitvami kroga na manjše trikotnike se je, pri poskusih njegove pretvorbe v ploščinsko enak kvadrat, ukvarjal tudi Leonardo. Pravzaprav so za številne Leonardove zamisli našli neke predhodnike s podobnimi idejami. Vendar so bile njegove raziskave praviloma sveže in izvirne, zastavljal si je preprosta, a domiselna vprašanja, natančno je opisal stvari, ki se zdijo samoumevne, kot so npr. meja med svetlobo in senco, različne barve ozračja na različnih straneh neba itd. Leonardova znanost je utemeljena na načelu, da je najpomembneje »znati videti« (ital. *saper vedere*) in je omejena na tisto, kar se da narisati.[3] Leonardo se je do svojega širokega znanja dokopal predvsem z opazovanjem narave, eksperimentiranjem, praktičnimi izkušnjami in teoretičnimi razmisleki, pa tudi preko sodelovanja in pogovorov s sodobniki (npr. z matematikom in frančiškanskim menihom Luco Paciolijem (1445–1514), z arhitektom Donatom Bramantejem (1445–1514), s profesorjem anatomije Marcantonijem della Torrejem (1481–1511), s katerim sta nameravala skupaj izdati teoretično delo o anatomiji, in številnimi drugimi), ter z branjem del drugih avtorjev (npr. Vitruvija, Brunelleschija, Arhimeda, grških in arabskih fizikov). Njegova slikarska umetnost ni mimetična, ampak se tako rekoč znanstveno ukvarja z vprašanjem, kako z različnimi slikarskimi sredstvi, npr. kompozicijo, perspektivo, barvo itd., ustvariti čim bolj harmonično, skladno umetniško delo. Že kot otrok je strastno zbiral najrazličnejše stvari, kot npr. živali, rože, liste in koščke lesa nenavadnih oblik itd. Kasneje je s podobno zbirateljsko strastjo sestavljal različne sezname, od različnih

[2]Tako se je npr. celo še Johannes Kepler (1571–1630), ena ključnih figur v znanstveni revoluciji 17. stoletja, spraševal, *zakaj* je število planetov takšno, kot je (takrat so jih poznali le šest), odgovor pa našel v številu pravilnih poliedrov.

[3]Leonardo se je že pri Verrochiu intenzivno učil risanja, npr. prstov rok, lilij, draperij.

oblik nosov do besed, ki se jih je naučil, in stvari, ki jih mora postoriti ali o njih koga povprašati itd.

V času, ko so umetnost še vedno vrednotili kot eno izmed obrti, je z različnimi primerjavami dokazoval večvrednost slikarstva v primerjavi s pesništvom in glasbo [9, str. 5–41]. Med prvimi italijanskimi slikarji je uporabil oljne barve. Uporabljal je izredno tanke nanose barv in ponekod slikal tudi s prsti. Na najzgodnejši njegovi ohranjeni risbi iz leta 1473, ki prikazuje pokrajino reke Arno in grad Montelupo, je kot prvi naslikal pokrajino brez človeških figur in simbolizma. Slikarstvo je oprl na znanost (geometrijo, optiko, linearno perspektivo, anatomijo itd.). Rezultate svojih anatomskih in fizioloških študij je strnil v odlične anatomske risbe. Žal jih ni objavil v knjižni obliki.

Leonardov *Traktat o slikarstvu* [9] je nekakšen poskus nadgradnje in sinteze Evklidove geometrije, optike arabskih fizikov ter Vitruvijevih, Brunelleschijevih in Albertijevih nazorov o arhitekturi v znanost o svetlobi, senci, barvi, perspektivi in proporcih. V tem delu – ki ga je iz kaotičnih zapiskov sestavil njegov učenec Francesco Melzi (1491–1568/70), ki mu je prepustil v varstvo vso svojo pisno zapuščino – po eni strani razvija (slikarsko) *teorijo* na aksiomatski, geometrijski, deduktiven način zavoljo nje same, po drugi strani pa vanjo integrira izsledke opazovanj, zagovarja izkustveni, induktivni in celo eksperimentalni pristop ter daje zelo konkretne napotke za uporabo te teorije v (slikarski) *praksi*, kot na primer: »Slikar, ki želi, da ga njegova dela častijo, mora vedno iskati neposrednost gibov v spontanih naravnih dejanjih ljudi, rojenih iz močnega izbruha njihovih čustev. O tem si mora delati kratke zapiske v svojih knjižicah in jih uporabiti v svoj namen pri postavljanju nekega človeka v enak položaj, da bi videl lastnosti in videz delov telesa, ki se uporabljajo v takšnih dejanjih« [9, 124. *Pravila slikarstva*]. Njegovi posnemovalci v umetnosti, »leonardisti«, ga niso dosegli ali presegli. Leonardo je s svojim upodabljanjem aktivnih, anatomsko realističnih figur močno vplival na velikega italijanskega slikarja in arhitekta visoke renesanse Rafaela Santija (1483–1520), pa tudi na svojega velikega tekmeca Michelangela Buonarottija (1475–1564), italijanskega kiparja, slikarja, arhitekta in pesnika, s katerim se sicer ni najbolje razumel. Leonardove ideje iz [9] so vplivale tudi na francosko umetnost, v kateri so se izoblikovala še številna bolj podrobna slikarska pravila kot tista, ki jih je začel zapisovati on.

Znanstvenik, umetnik in izumitelj

Privlačila so ga najrazličnejša znanstvena področja: anatomija, botanika, geologija, geografija, kartografija, matematika, fizika, optika, astronomija itd. Kot znanstvenik je bil samouk. To je imelo svoje prednosti (izvirnost, nebrzdana radovednost in vsestranska ustvarjalnost) in obenem slabosti (nihče ga ni usmerjal, fokusiral, mentoriral, recenziral njegovega dela).

Ker ni imel formalne izobrazbe (samega sebe je imenoval »uomo senza lettere«), je sprva podcenjeval vlogo teorije in se je moral vsega naučiti iz lastnih izkušenj.

Poveličeval je neodvisnost in izvirnost misli, zavračal posnemanje drugih in opominjal, da se moramo obrniti neposredno na naravo, ki nam ponuja bogastvo svojih pojavnih oblik [3, str. 92]. Raje je posploševal iz eksperimentov kakor sklepal iz abstraktnih načel. V tem se je razlikoval od arhetipskega renesančnega človeka, ki je sprejemal preporod modrosti, izhajajoč iz vnovič odkritih del klasične antike. Podobno kot pred njim že Nicolas Oresme (1323–1383) je prekinil tradicijo srednjeveških sholastikov in celo humanistov v zgodnjem obdobju renesanse, ki so raje ponavljali modrosti iz klasičnih besedil, kakor da bi preverjali njihovo verodostojnost. Predpisal je celo, kako je treba poskuse ponavljati in spreminjati, da bi zagotovili njihovo verodostojnost. S svojim pristopom je nakazal poznejšo znanstveno metodo. Povezoval je eksperiment in teorijo, podobno kot za njim Bacon in Galilej, in podobno, kot je Alhazen povezoval opazovanje in eksperiment v optiki.[4] Iskal je vzorce in analogije, te je uporabljal kot preprosto metodo postavljanja teorij. Zlahka je prehajal med različnimi področji, ni bil specialist, kot so to znanstveniki v današnjem času. Njegove raziskave niso bile namenjene le praktičnim aplikacijam, čeprav so se dostikrat začele z mislijo nanje. Zelo pozorno je opazoval in zapisoval svoja opažanja. Pomemben je tudi kot izumitelj in konstruktor različnih tehničnih naprav (npr. padalo, jadralno letalo, različni bojni stroji (katapulti, samostreli, parni top, tank, oblegovalne lestve), premični mostovi, podmornica, skafander, čoln na pedala, zapornice pri jezu, mehanična ura, hidravlični in predilni stroji, načrti za prekope, kanale, mostove, kupole itd. [2, str. 79]) ter vizionar (načrti za idealno mesto z dvignjenimi cestami). Sam je izdelal številne prototipe svojih izumov, nekateri so ostali samo na papirju, druge pa so šele v zadnjih desetletjih in letih naredili po njegovih načrtih. Zavedal se je, da se rezultati znanstvenega raziskovanja lahko uporabijo tudi neetično, zato je npr. nekatere svoje vojne izume ohranil zase.

Ob znanju, ki ga je pridobival v Milanu, se je njegov prezir do prejetih modrosti omilil. Začel se je učiti latinščine, da bi lahko študiral antične avtorje. Ko je v devetdesetih letih 15. stoletja začel črpati znanje iz knjig, je vse bolj začel spoznavati pomen teoretičnih osnov. Spoznal je, da se oba pristopa dopolnjujeta. »Praksa mora vedno temeljiti na zdravi teoriji,« je zapisal leta 1510. Tako je več kot stoletje pred Galilejem postal eden izmed najpomembnejših mislecev Zahoda. Ker ni imel na voljo matematičnih orodij, kakršne so pozneje uporabljali Kopernik, Galilej in Newton, ko so

[4]Francis Bacon (1561–1626) velja za očeta empirizma in znanstvene metode, razložene v knjigi *Novum Organum* (1620)), ki naj bi nadomestila metodo iz Aristotelovega *Organona.* Galileo Galilej (1564–1642) velja za očeta opazovalne astronomije, moderne fizike in moderne znanosti. Alhazen (965–1040) je avtor več kot 90 knjig, med drugim zelo vplivne knjige o optiki.

oblikovali teoretične naravne zakone, se je zanašal na bolj elementarne metode: v naravi je videl vzorce, teorije pa je postavljal z analogijami. Na analogiji sloni npr. da Vincijevo pravilo, po katerem se vsaka veja drevesa razcepi v veje, ki imajo enako skupno debelino kot prvotna veja, podobno kot se reka razcepi v rokave z enako skupno količino vode [9, str. 361–364].[5]

Morda najlepši vpogled v Leonardovo znanstveno-izumiteljsko metodo daje njegova kratka razprava, danes znana kot *Kodeks o letenju ptic.* Začenši okrog leta 1490 je več kot dve desetletji skrbno preučeval ptičje letenje in možnost konstruiranja naprav, s katerimi bi lahko letel tudi človek. V razpravi najdemo opažanja in razmišljanja o raziskovalni metodi, kot so npr.: »Če želimo znanstveno pojasniti letenje ptic, moramo znanstveno pojasniti veter, to pa bomo storili s preučevanjem gibanja vode.« »Z znanstveno razlago gibanja vode bomo prišli do spoznanja o letenju stvari po zraku.« »Ko se ptice spuščajo proti tlom in imajo glavo niže od repa, rep spustijo in močno razširijo, s krili pa hitro mahajo. Glava se tako dvigne nad rep, let se upočasni in ptica lahko mehko pristane.« Raziskovanje letenja ptic ga je vodilo do načrtov za letalni stroj, ki bi ga poganjale človeške mišice, pa tudi do načrtov za jadralno letalo. »Ptica je instrument, ki deluje po matematičnih zakonih, človek pa lahko poustvari tak instrument« [4, str. 179–189]. Nazadnje je spoznal, da ideja letalnega stroja z gibljivimi krili ni uresničljiva.

Ena izmed najslavnejših Leonardovih risb, ki je dobila svojo pomanjšano upodobitev tudi na evrskem kovancu, je »Vitruvijski človek«. Temelji na Leonardovem preučevanju razprave »O arhitekturi«, ki jo je napisal Mark Vitruvij Polio, rojen okrog 80. leta pr. n. št. in v kateri je opisal arhitekturo klasične antike. Leonardo je v krog, ki po nekaterih interpretacijah simbolizira nebo, in kvadrat, ki simbolizira zemljo, okrog leta 1490 izredno skrbno zarisal idealne proporce človeškega telesa, t. i. *Kanon proporcev človeškega telesa* in s tem močno presegel podobni vizualni ponazoritvi razlage teh proporcev iz Vitruvijeve razprave, ki sta ju Francesco di Giorgio in Giacomo Andrea naredila ob približno istem času.[6] Ni sprejel vsega, kar je zapisal Vitruvij (tako je npr. Vitruvij telesno višino moškega podal kot šestkratno dolžino stopala, Leonardo pa kot sedemkratno [4, str. 156]), temveč se je zanašal na lastne izkušnje in poskuse. Kljub temu pa je sprejel osnovno Vitruvijevo misel, da so razmerja človeškega telesa analogna razmerjem dobro zasnovanega svetišča, pa tudi makrokozmosu sveta. V Leonardovem »Anthroposu« nekateri vidijo svojevrsten umetniški poskus kvadriranja kroga, pa tudi nekakšen avtoportret [4, str. 157], podobno kot imajo nekateri tudi

[5] Poskusimo to pravilo izraziti matematično: če ima veja ploščino pravokotnega preseka πR^2, razcepi pa se v veje s ploščinami presekov $\pi R_1^2, \pi R_2^2, \ldots, \pi R_2^n$, potem je $\pi R^2 = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \cdots + \pi R_n^2$.

[6] Problem razmerij človekovega telesa so obravnavali že stari Egipčani, ki so risali človeka po predpisanih proporcih na podlagi kvadratne mreže; stari Grki so občudovali Poliklejtov kip, imenovan Kanon, pri katerem so razmerja temeljila na zlatem rezu.

Mono Lizo za svojevrsten mojstrov avtoportret, le da se Anthropos mršči, Mona Liza pa smehlja.

Kot zanimivost omenimo še, da so v Leonardovi rodni vasici Vinci postavili tridimenzionalno verzijo Leonardovega »Anthroposa«.

Skrivnost Leonardove genialnosti

Leonardova genialnost naj vsaj načeloma ne bi bila tako nedostopna razumevanju, kot to menijo tisti, ki ga pretirano poveličujejo in zmanjšujejo ali opravičujejo njegove napake, značajske posebnosti in muhavosti (ko je npr. tudi po več ur samo razmišljal in strmel v fresko *Zadnje večerje*, potem pa s čopičem naredil le potezo ali dve) in neuspehe (kot je bil npr. fiasko z eksperimentiranjem z novo slikarsko tehniko, ko je slikal *Bitko pri Anghiariju*, katere videz poznamo le po kopiji Petra Paula Rubensa [4, str. 356], in so nanesene barve ob sušenju slike z baklami začele polzeti po zidu). Ni bil le muhast umetnik, po potrebi je bil tudi pragmatik in realist; ko ni mogel uresničiti svojega načrta za veličasten konjeniški spomenik Ludovicu Sforzi, ker so potrebovali bron za topove, se je s tem dostojanstveno sprijaznil, čeprav je v zasnovo tega kipa vložil izjemno veliko časa in truda in naj bi predstavljal njegovo najpomembnejšo kiparsko stvaritev. Skrivnost njegove genialnosti je morda tudi v tem, da je v sebi spajal na videz nepomirljiva nasprotja. Tako npr. ni bil le brezčutnež, ki je z največjim zanimanjem skiciral obešenca ali seciral truplo starčka, s katerim se je tik pred njegovo smrtjo še pomenkoval, da bi dognal skrivnost njegove dolgoživosti, ampak je bil veliko pred svojim (in današnjim) časom tudi v svojem odnosu do živih bitij, ko je zapisal: »Prišel bo dan, ko bodo ljudje sodili o uboju živali prav tako, kot danes presojajo o uboju človeka. Prišel bo čas, ko bomo zauživanje živali obsojali prav tako, kot danes obsojamo zauživanje nam enakih, ljudožerstvo.« Eden izmed redkih, ki je vsaj delno razumel Leonardovo genialnost in jo znal ceniti, je bil francoski kralj Franc I, ki mu je v zadnjih letih življenja ponudil prijeten grad in vso podporo, da je premišljeval in delal, kar je želel [3, str. 48–51].

Pri vsem ni bil velikan, delal je tudi napake – toda kdo jih ne? Veliko stvari je začel, razmeroma malo jih je dokončal; morda je bila vzrok temu značajska slabost, nedisciplinirran um, begajoča pozornost, morda pa tudi nesoglasja z naročniki njegovih del. Zanimalo ga je preveč stvari, kot kažejo npr. zapisi: »Napihni prašičja pljuča in opazuj, ali se jim pri tem povečata tako širina kot dolžina, ali le širina.« »Opiši jezik žolne« [4, str. 525].

Leonardu sta bili znanost in umetnost tako rekoč eno. Ni ju videl kot ločeni področji. Zato v današnjem času vse večje specializacije nekateri Leonardu odrekajo status znanstvenika, ali pa omalovažujejo njegove ideje (češ da jih je večino dobil od drugih), njegove izume (češ da je bolj ali manj o njih samo fantaziral, pa skoraj nobenega uresničil), njegove slike in kipe (češ da jih tako ali tako ni veliko dokončal), njegove zapiske (češ da so neurejeni, da se v njih stvari ponavljajo), njegove didaktične metode (češ da je preveč vztrajal na slikarskih pravilih iz svojega *Traktata o slikarstvu*) itd.

V njegovem času so mu tekmeci očitali, da ni izobražen, da ne obvlada slikarskih tehnik, tudi v okviru svojega slikarskega ceha je ostal vse življenje bolj ali manj odrinjen na rob in ni dobival veliko naročil za slike. Večinoma pa se sodobnikom ni niti sanjalo, s čim vse se ukvarja na skrivaj.

Naravo Leonardove genialnosti lepo povzema Isaacson: »Njegovo genialnost lahko razumemo, lahko se od nje tudi učimo. Temeljila je na sposobnostih, ki si jih vsakdo lahko z lastno voljo izostri, na primer na vedoželjnosti in natančnem opazovanju. Njegova sposobnost, da razblini ločnico med stvarnostjo in fantazijo, je bila – podobno kot tehnika sfumata – s katero je zabrisal črte na sliki, ključna za njegovo ustvarjalnost« [4, str. 3–4]. Načela, ki se jih je držal Leonardo, lahko bralec najde v knjigi [3].

Leonarda lahko posnemamo vsaj v tem, da vedno nosimo s seboj beležnico in si vanjo zapisujemo najrazličnejše misli, opažanja, vprašanja, nove besede tujega jezika, ki smo se jih naučili, pa tudi miselne vzorce, risbe, sezname stvari, ki jih želimo postoriti ali izvedeti. Tako se nam najlažje odpro vrata do neizčrpne ustvarjalnosti, ohranili pa bomo tudi marsikatero opažanje ali misel, ki bi sicer zdrsnila v pozabo.

LITERATURA

[1] G. T. Bagni in B. D'Amore, *Leonardo e la Matematica*, Giunti Editore, Milano, 2006.

[2] A. Detela (et al.), *Razprave o Leonardu*, Studia humanitatis, Ljubljana, 2005.

[3] M. J. Gelb, *Postanite ustvarjalni kot Leonardo da Vinci* (podnaslov: *Sedem korakov do genialnosti*), Založba Tangram, Ljubljana, 2003.

[4] W. Isaacson, *Leonardo da Vinci, Fascinantna biografija enega največjih genijev vseh časov*, Učila International, Tržič, 2018.

[5] O. Letze in T. Buchsteiner, *Leonardo da Vinci, znanstvenik, izumitelj, umetnik*, Narodni muzej Slovenije, Ljubljana, 1999–2000.

[6] R. Ormiston, *The Life and Works of Leonardo da Vinci, A full exploration of the artist, his life and context, with 500 images and a gallery of his greatest works*, Hermes House, Anness Publishing Ltd, 2011.

[7] J. Strnad, *Leonardo da Vinci, znanstvenik, izumitelj, umetnik*, Presek **27** (1999/2000), 196–198.

[8] J. Strnad, *Leonardo da Vinci in fizika*, Presek **27** (1999/2000), 216–222.

[9] Leonardo da Vinci, *Traktat o slikarstvu*, Studia humanitatis, Ljubljana, 2014.

[10] *Leonardo da Vinci, Italian artist, engineer and scientist*, dostopno na `www.britannica.com/biography/Leonardo-da-Vinci/Anatomi-cal-studies-and-drawings`, ogled 17. 4. 2019.

[11] *Leonardo da Vinci, The Complete Works*, dostopno na `www.leonardoda-vinci.org/`, ogled 17. 4. 2019.

Jurij Kovič

Predsednik Pahor podelil srebrni red za zasluge DMFA Slovenije

Na priložnostni slovesnosti v predsedniški palači je predsednik Borut Pahor 10. julija 2019 Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ob 70-letnici njegovega delovanja podelil državno odlikovanje srebrni red za zasluge za njegove prispevke k razvoju pedagoškega, strokovnega in znanstvenega dela na področjih matematike, fizike in astronomije. Slovesnosti se je poleg predsednika društva, Dragana Mihailovića, ki se je v imenu društva zahvalil za prejeto priznanje, udeležilo tudi nekaj članov društva.

V nadaljevanju najprej navajamo celotno utemeljitev odlikovanja, ki jo lahko najdemo tudi na spletnih straneh predsednikovega urada [1], nato pa še govor predsednika društva Dragana Mihailovića ob sprejemu priznanja.

Slika 1. Predsednik Pahor podeljuje odlikovanje. Foto: Andrej Guštin

Utemeljitev odlikovanja

Društvo matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) Slovenije ima letos 70 let, saj je bilo kot Društvo matematikov in fizikov ustanovljeno leta 1949. Njegovi temeljni dejavnosti sta podpora kakovostnemu pedagoškemu delu ter popularizacija matematike, fizike in astronomije.

Društvo prireja različna tekmovanja v matematiki, fiziki in astronomiji na vseh stopnjah šolanja. Osnovnošolski in srednješolski mladini je vsako leto namenjenih 12 državnih tekmovanj s ciljem spodbujati zanimanje za znanost. Najdaljšo tradicijo imajo srednješolska tekmovanja v matematiki, ki potekajo neprekinjeno že od šolskega leta 1957/58 in so bila sploh prva slovenska tekmovanja v znanju. Najbolj množično pa je tekmovanje osnovnošolcev, znano kot Matematični kenguru. Lani je samo v matematičnih tekmovanjih v osnovnih šolah tekmovalo 73.430 učencev.

Prvo vseslovensko tekmovanje v fiziki je bilo maja 1981 v Mariboru v okviru 5. srečanja mladih tehnikov Slovenije. Že naslednje leto so fiziki v Mariboru skupaj z Društvom matematikov, fizikov in astronomov Slovenije priredili samostojno republiško tekmovanje in tako je letos potekalo že 39. tekmovanje za Stefanova priznanja. Društvo prireja tudi tekmovanja v znanju astronomije za Dominkova priznanja, prvo je bilo v šolskem letu 2009/2010, in tekmovanja Kresnička, ki so tekmovanja v naravoslovju. Vsako leto izbere in pripravi ekipe slovenskih udeležencev za več kot deset mednarodnih tekmovanj, med katerimi sta mednarodna matematična in mednarodna fizikalna olimpijada, ki imata več kot 50-letno tradicijo. Na mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike je leta 2017 slovenski dijak Aleksej Jurca dosegel absolutno prvo mesto.

Za učitelje in širšo strokovno javnost društvo redno pripravlja seminarje in predavanja. Pri tem sodelujejo ugledni strokovnjaki z različnih ustanov in znanstvenih področij. Skrb za stroko že 50 let izraža s podeljevanjem priznanj mentorjem za uspešno delo z mladimi. Skoraj tako dolgo kakor zgodovina društva je tudi njegovo publicistično in založniško udejstvovanje: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije od leta 1971 izdaja *Presek*, list za mlade bralce, za širši krog članov že od leta 1951 *Obzornik za matematiko in fiziko* in ob tem še knjižno zbirko *Sigma*. Ob raznovrstnih knjižnih in priložnostnih publikacijah, kot so učbeniki, zborniki, bilteni in podobno, društvo sodeluje tudi pri izdaji mednarodne znanstvene revije *Ars Mathematica Contemporanea*.

DMFA prireja številne razstave, pripravlja poljudna predavanja in izvaja druge aktivnosti za promocijo znanstvenih dosežkov, raziskovalnega dela in poklicev v znanosti. Kot glavni slovenski organizator je sodelovalo na mednarodnih prireditvah v okviru mednarodnega leta astronomije 2009, svetovnega leta fizike 2005 in svetovnega leta matematike 2000. Zdaj pripravlja 8. evropski matematični kongres, ki bo julija 2020 v Portorožu, in evropsko fizikalno olimpijado, ki bo leta 2021 v Ljubljani. Društvo upravlja hišo in spominsko sobo prof. dr. Josipa Plemlja na Bledu, kjer občasno potekajo poletne šole ter znanstvene in strokovne delavnice.

V bogati 70-letni zgodovini so društvu predsedovali in v njem sodelovali številni ugledni slovenski matematiki in fiziki. Kot prvi častni član je bil leta 1949 izvoljen prof. dr. Josip Plemelj, slovenski matematik mednarodnega ugleda in prvi rektor Univerze v Ljubljani. Častno članstvo društvo podeljuje strokovnjakom ali pedagogom, ki s svojim delom pomembno prispevajo k razvoju matematičnih in naravoslovnih znanosti oziroma društva. Doslej so izvolili 35 častnih članov in članic.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ima status društva v javnem interesu, vanj pa so včlanjeni vsi, ki se želijo izobraževati in izpopolnjevati znanje in znanost ter ju prenašati novim rodovom. Danes ima društvo 850 aktivnih članov, vsi sodelujejo povsem prostovoljno. Vodi jih prepričanje, da delajo za znanje in znanost, nagrajujejo pa jih sijajni uspehi, ki jih mladi znanstveni navdušenci dosegajo doma in v tujini.

Za 70 let neutrudnega pedagoškega, strokovnega in znanstvenega dela na področjih matematike, fizike in astronomije ter za spodbujanje ljubezni do znanja pri mladih se Slovenija Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije zahvaljuje z visokim državnim odlikovanjem.

Slika 2. Skupinska slika po podelitvi.

Zahvalni govor predsednika društva

Spoštovani gospod predsednik, spoštovani ugledni gostje, spoštovani kolegi! Dovolite mi, da se v imenu DMFA Slovenije zahvalim za to izjemno priznanje. Zahvaljujem se vsem, ki so ob 70-letnici delovanja DMFA prepoznali pomen te obletnice in prispevali k današnjemu dogodku.

DMFA Slovenije združuje raziskovalce, profesorje, učitelje in dijake v stanovski zvezi, ki skrbi za popularizacijo stroke med mladimi in v širši javnosti. Organizira znanstvena srečanja in promovira znanstvene dosežke. Izdaja društveno glasilo *Obzornik za matematiko in fiziko* ter *Presek*, list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje.

Verjetno najpomembnejše poslanstvo društva je kravžljanje mladih možganov. Talente je namreč treba prebuditi. Ključna za uspeh pri prebujanju talentov pa je motivacija, kar je naloga društva. Uspeh pa ne pride brez velikega truda in dolgoletne tradicije. Društvo pripravlja in sodeluje na različnih tekmovanjih vseh vrst, od šolskih tekmovanj do mednarodnih olimpijad. Organizira tekmovanja iz znanja, ki se jih vsako leto udeleži več kot 100.000 tekmovalcev. V sedemdesetih letih se to število kar namnoži.

V zadnjih letih beležimo izjemne dosežke posameznikov na olimpijadah, kar nedvomno prispeva k ugledu Slovenije v svetu tam, kjer šteje – med mladimi. Olimpijade iz matematike, fizike in astronomije potekajo po celem svetu in so zelo podobne športnim olimpijadam, le da se pri enih tekmuje v umskih veščinah, pri drugih pa v telesnih. Razlika je tudi v tem, da je neposredni televizijski prenos matematičnega tekmovanja lahko nekoliko manj zanimiv, kot je na primer smučanje. Je pa dolgoročni družbeni pomen nabiranja znanja iz naravoslovno-matematičnih veščin verjetno širšega pomena, kot je šport, saj je ključ do uspeha na vseh področjih znanosti, gospodarstva, medicine in tudi družboslovja ter športa.

Člani društva so prostovoljci, ki delajo brezplačno. Predsedniško priznanje je še posebej pomembno za vse tiste posameznike, ki jih ne morem danes poimensko našteti, a dobro vemo, kdo so. Oni svoje življenjsko delo posvečajo poslanstvu društva. Seveda smo nagrajeni tudi vsakič, ko naši tekmovalci izkažejo uspehe, a državno odlikovanje je vendarle pomembno priznanje širše družbe za požrtvovalno delo skupine posameznikov, ki tvorijo društvo. V izjemno čast mi je, da lahko v imenu DMFA Slovenije prejmem to priznanje in se v imenu vseh članov društva zanj srčno zahvalim.

LITERATURA

[1] Predsednik Pahor na posebni slovesnosti vročil državna odlikovanja: srebrni red za zasluge, red za zasluge in medalje za zasluge, dostopno na `www.up-rs.si/up-rs/uprs.nsf/objave/A3042FB21FC143A4C125843300255232?OpenDocument`, ogled 10. 7. 2019.

Uredništvo

Šestindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tudi letos je konec julija v Blagoevgradu v Bolgariji potekalo mednarodno tekmovanje študentov matematike. Pomerilo se je 360 študentov. Ljubljansko univerzo so predstavljali Viktor Cvrtila, Grega Saksida, Tea Štrekelj in Gašper Urh, Univerzo na Primorskem pa Đorđe Mitrović, Besfort Shala in Roman Solodukhin.

Besfort Shala in Roman Solodukhin sta dobila drugo nagrado, Đorđe Mitrović in Gašper Urh tretjo, Gregor Saksida in Tea Štrekelj pa sta dobila pohvalo.

Slika 1. Predstavniki Slovenije pred kampusom Ameriške univerze v Blagoevgradu. Z leve: Grega Saksida, Gašper Urh, Đorđe Mitrović, Besfort Shala, Roman Solodukhin, Tea Štrekelj in Viktor Cvrtila.

Naloge s tekmovanja in posamične rezultate lahko najdete na internetni strani `www.imc-math.org`.

Za vtis sledi nekaj rešenih nalog s tekmovanja. Upam, da vas bo kakšna od nalog motivirala za možgansko telovadbo, še preden boste pogledali njeno rešitev.

Tekmovalci so dva dni, vsak dan po pet ur, reševali po pet nalog. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko naloge. Praviloma teža naloge narašča z zaporedno številko.

I.1. *Izračunaj produkt*

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

Podobno kot seštejemo teleskopske vsote, lahko naredimo tudi s produkti.

Razpišimo n-ti faktor produkta a_n kot

$$\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n^3-8)(n^3+8))} = \frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)} =$$

$$= \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n^2+3}{(n-1)^2+3} \cdot \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.$$

Za $N \geq 3$ je N-ti delni produkt $\prod_{n=3}^{N} a_n$ enak

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n}{n-2}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n}{n+2}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right) \\
&\qquad = \frac{N(N-1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{N^2+3}{2^2+3} \cdot \frac{3^2+3}{(N+1)^2+3} \\
&\qquad = \frac{72}{7} \frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N-1)(N+2)((N+1)^2+3)}.
\end{aligned}$$

Ko gre N proti neskončno, zgornji izraz konvergira proti $\frac{72}{7}$.

Kot zanimivost naj omenim, da je velika večina tekmovalcev dobila pravo idejo in pokrajšala ustrezne zaporedne člene, pri tem pa naredila napako, ker ni delala z limitami končnih produktov. Ocenjevalci so v tem primeru nalogo ocenili s 60 %, zraven pa ilustrirali težavo z neskončnim produktom

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1},$$

ki je enak 0 (N-ti delni produkt je enak $\frac{1}{N+1}$), na videz pa se vsi členi pokrajšajo in bi tako moral biti produkt enak 1.

I.3. *Naj bo* $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija, za katero velja*

$$2f'(x) + xf''(x) \geq 1 \quad \textit{za vse } x \in (-1,1).$$

Pokaži, da je

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx \geq \frac{1}{3}.$$

Naloga črpa idejo iz zakladnice na videz nemogočih rešitev nalog z Rollovim in Lagrangeevim izrekom, kjer moramo funkcijo napisati kot odvod primerne funkcije. Hitro ugotovimo, da je drugi odvod funkcije

$$g(x) = xf(x) - \tfrac{x^2}{2}$$

enak ravno

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geq 0,$$

zato je funkcija g konveksna in se njena tangenta nahaja pod grafom funkcije. Če je $g'(0) = a$, je

$$g(x) \geq g(0) + g'(0)x = ax,$$

zato je

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right) dx \geq \int_{-1}^{1} \left(ax + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

II.2 *Naj C označuje množico vseh sestavljenih števil. Za vsako število $n \in C$ definirajmo a_n kot najmanjše naravno število k, za katero n deli $k!$. Utemelji, ali konvergira vrsta*

$$\sum_{n \in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n.$$

Pokazali bomo, da je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{3} \text{ za } n > 4,$$

zato dano vrsto od drugega člena naprej majorizira konvergentna geometrijska vrsta s kvocientom $\frac{2}{3} < 1$.

Vsako sestavljeno število $n > 4$ je lahko treh različnih oblik:

(i) Recimo, da je število n deljivo z vsaj dvema različnima praštevilōma. Tedaj ga lahko razcepimo na produkt tujih števil $n = qr$, kjer je $r \geq 2$ in je brez škode za splošnost $q > r$. Tedaj $n = qr$ deli $q! = r!(r+1)\cdots(q-1)q$, zato je $a_n \leq q$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} = \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}.$$

(ii) Tokrat naj bo $n = p^2$ kvadrat praštevila $p \geq 3$ (gledamo le $n > 4$). Ker p^2 deli $p \cdot 2p$, ki deli $(2p)!$, je $a_n \leq 2p$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} \leq \frac{2}{3}.$$

(iii) Naj bo n potenca praštevila, $n = p^k$, $k \geq 3$. Tedaj $n = p^k$ deli produkt $p \cdot p^2 \cdots p^{k-1}$, zato je $a_n \leq p^{k-1}$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{p^{k-1}}{p^k} = \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}.$$

II.4 *Določi vsa naravna števila n, za katera obstajata kvadratni obrnljivi realni matriki A in B velikosti $n \times n$, za kateri velja*

$$AB - BA = B^2 A.$$

Enakost, ki velja za matriki A in B, lahko predelamo v veliko bolj informativno enačbo

$$B = A^{-1}(B^2 + B)A,$$

ki pove, da sta si matriki B in $B^2 + B$ podobni.

Naj bo najprej velikost matrik n liho število. Tedaj ima karakteristični polinom matrike B vsaj eno realno ničlo, recimo λ. Po izreku o preslikavi spektra je tudi $\lambda^2 + \lambda > \lambda$ realna lastna vrednost matrike B, ki je večja od λ, saj zaradi obrnljvosti matrike B velja $\lambda \neq 0$. Tako pridemo do neskončne množice različnih realnih lastnih vrednosti matrike B, kar je v nasprotju s končno velikostjo matrike B.

Preostane nam še možnost, ko je n sodo število. V primeru $n = 2$ množica

$$\{\lambda, \lambda^2 + \lambda, (\lambda^2 + \lambda)^2 + \lambda^2 + \lambda\}$$

ne sme imeti več kot dveh elementov. Tako hitro najdemo kandidata za lastni vrednosti matrike B, z nekaj vztrajnega poskušanja pa še primerno realno matriko, na primer

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

in podobnostno transformacijo med B in $B^2 + B$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo teh 2×2 matrik lahko zgradimo diagonalno bločni matriki poljubne sode velikosti

$$A = A' \oplus \cdots \oplus A',\ B = B' \oplus \cdots \oplus B',$$

ki sta seveda realni, obrnljivi in ustrezata enakosti $AB - BA = B^2 A$.

Marjan Jerman

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2019
Letnik 66, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Srebrni red za zasluge, ki ga je predsednik Borut Pahor podelil Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, glej novico na strani 114. (Foto: Andrej Guštin)