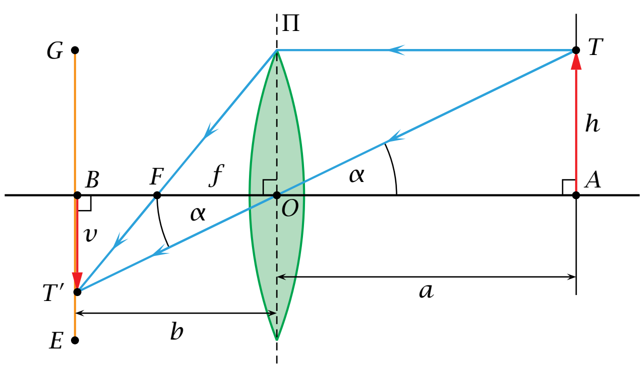
Ostrenje na sredinsko točko

Peter Legiša

Opis problema

Že pred desetletji so fotoaparati dobili samodejno ostrenje – avtofokus. To je fotografu zelo olajšalo delo in omogočilo mnogo hitrejše zajemanje slik.

Kamere imajo navadno v iskalu označene točke, na katere lahko ostrimo. Pri zrcalno refleksnih aparatih je pogosto najbolj točno (in v šibki svetlobi tudi edino mogoče) ostrenje z osrednjo točko, v centru iskala. Zato mnogi fotografi kamero najprej usmerijo tako, da je ta osrednja točka tam, kjer želijo ostrino (npr. na očesu slikane osebe), nato pa aparat premaknejo (zavrtijo), da dobijo pravi izrez. Kot bomo videli, pa to vodi k napaki v ostrenju. Pri bolj oddaljenih objektih in zaprti zaslonki je taka napaka večinoma zanemarljiva. Pri povsem odprti zaslonki in pri slikanju iz bližine pa je tak način ostrenja zgrešen in lahko vzrok za neostre slike.



SLIKA 1.
Leča daljico AT preslika na daljico BT'.

Denimo, da ima objektiv goriščno razdaljo f. Privzeli bomo, da objektiv deluje kot okrogla tanka leča s središčem O in z goriščno razdaljo f. Poglejte si sliko 1. Leča ravno ploščo, vzporedno ravnini Π leče in na sliki 1 za a oddaljeno od te ravnine, ostro upodobi na tipalo, ki je prav tako vzporedno Π in od Π oddaljeno za b, če velja

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

To je enačba tanke leče, nedavno izpeljana v Preseku, [1, str. 4].

Leča daljico AT z dolžino h preslika na daljico BT' z dolžino v. Pravokotna trikotnika OAT in OBT' sta podobna, kot AOT označimo z α in je enak kotu BOT'. Razmerje

$$m=\frac{v}{h}=\frac{b}{a}$$

je *povečava*. V tem članku se ne bomo ukvarjali s fotografijo iz bližine, zato bo $m<1$ in »povečava« v resnici pomanjšanje. Če postavimo $b=ma$ v enačbo (1), dobimo

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{a}=\frac{1}{f}$$

in od tod

$$a=\frac{1+m}{m}f=\left(m^{-1}+1\right)f, \qquad b=(1+m)f.$$

Razdalja med tipalom in objektom – daljico AT je

$$a+b=(m^{-1}+2+m)f.$$

To je razdalja, ki jo lahko odčitamo ali nastavimo na nekaterih objektivih.

Primer 1. Naj bo $f=30$ mm in $m=0{,}1$. Potem je $b=33$ mm in $a=330$ mm $=33$ cm. Razdalja med tipalom in daljico AT je 36,3 cm.

Premik

Na sliki 1 je točka T' pri zelenem izrezu in pravi izostritvi (tako, da je točka T ostro upodobljena) oddaljena za v od sredine tipala.

Primer 2. Vzemimo, da je tipalo velikosti APS-C, konkretno 22,2 mm × 14,8 mm. Razdalja v je manjša od polovice diagonale. Ta polovica po Pitagorovem izreku znaša $\sqrt{11{,}1^2 + 7{,}4^2} \approx 13{,}3$ mm. V praktično vseh primerih bo $v \leq 8$ mm.

Dolžina daljice OT' je enaka

- $|OT'| = \sqrt{b^2 + v^2}$.

Zaradi podobnosti je razdalja a_1 od O do T enaka $a_1 = m^{-1}|OT'| = m^{-1}\sqrt{b^2 + v^2}$. Če s sredino iskala izostrimo točko T kot na sliki 2, izmerimo razdaljo $a_1 > a$ med T in ravnino premaknjene leče. Naj bo $a = ka_1$. Seveda je zaradi podobnosti tudi $b = k\sqrt{b^2 + v^2}$. Tu je $k < 1$. Mnogi verjetno veste, da številu k rečemo *kosinus* kota α, torej $k = \cos\alpha$, vendar za naš članek to niti ni pomembno.

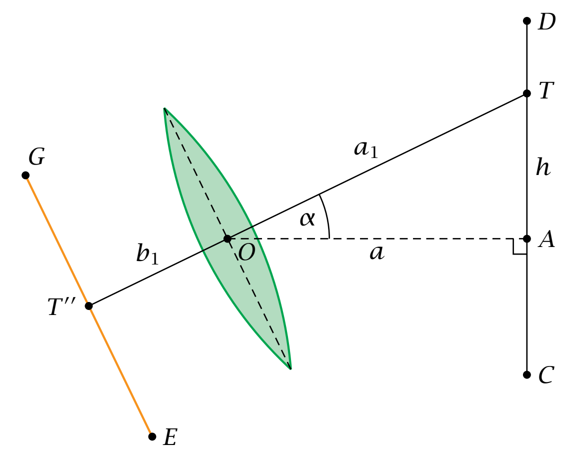
Delimo enakost $b = k\sqrt{b^2 + v^2}$ z b, pa dobimo $1 = k\sqrt{1 + v^2/b^2}$. Upoštevamo še, da je $b = (1 + m)f$, pa je

- $$k = \frac{1}{\sqrt{1+K}}, \qquad K = \frac{v^2}{(1+m)^2 f^2}. \qquad (2)$$

Po enačbi 1 se razdalja med točko O in tipalom zmanjša na $b_1 < b$, kjer je

- $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}.$$

Na sliki 2 je to približanje narisano pretirano.



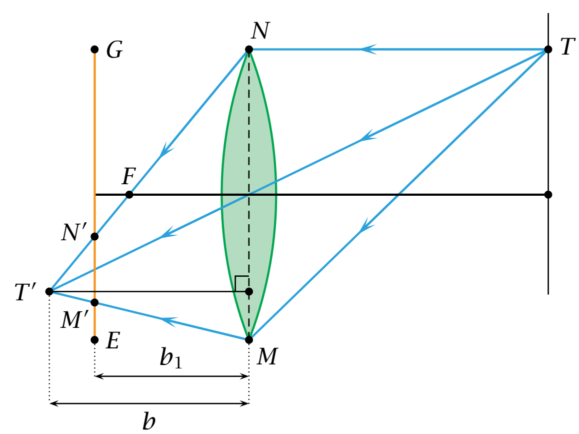
SLIKA 2.
Ko kamero zavrtimo navzgor, se razdalja med T in ravnino leče poveča na a_1.

Primer 3. Če je $f = 30$ mm, $m = 0{,}1$ in $v = 8$ mm, je $|OT'| = \sqrt{33^2 + 8^2} \approx 33{,}96$ mm in tako $a_1 = 10|OT'| \approx 33{,}96$ cm. Ker je bil $a = 33$ cm, se je a povečal za slab centimeter ali za kake tri odstotke. Po enačbi (1) izračunamo $b_1 \approx 32{,}9074$ mm. Ker je bil $b = 33$ mm, je $b - b_1 \approx 0{,}0926$ mm. Kako to vpliva na kakovost slike?

Posledica premika

Denimo, da smo kamero premaknili nazaj navzdol tako, da je točka O spet na praktično istem mestu kot na začetku in da točko A vidimo v sredini iskala. Kamera je zdaj izostrena na preveliko razdaljo. Točka T je spet za a oddaljena od ravnine leče, zato njena ostra slika nastane spet v isti točki T' kot na začetku. Ampak zdaj je T' za tipalom. Razdalja med T' in tipalom je $b - b_1$. Žarke, ki izhajajo iz točke T in padajo na lečo, ta preusmeri v stožec z vrhom T' na sliki 3. Lahko je verjeti, da je presek tega stožca s tipalom krožec s premerom $M'N'$. (Središčni razteg s središčem T', ki M preslika na M', nam krog s središčem O in s premerom $D = |MN|$ preslika na vzporeden krog s premerom $d = |M'N'|$, ki tako leži v ravnini tipala. Ta razteg ohranja stožec žarkov skozi T'.) Število D je premer leče. Trikotnika $T'M'N'$ in $T'MN$ sta podobna. Njuni vodoravni višini sta $b - b_1$ in b, zato je $d : (b - b_1) = D : b$ in od tod

- $d = D(b - b_1)b^{-1}$.



SLIKA 3.
Žarke iz T nam leča lomi v stožec žarkov, ki gredo skozi T'.

Slika točke T se nam tako razmaže v krožec s premerom d. Temu krožcu včasih pravimo *razmazani krožec*, angleško *circle of confusion*. O tem smo pred leti več pisali v Presekovem članku o globinski ostrini [2].

Količnik $w = f/D$ imenujemo *zaslonsko število*. Premer D leče lahko zmanjšamo z zaslonko, ki spušča svetlobo le skozi osrednji del leče. Stožec žarkov tako zožimo in s tem zmanjšamo razmazani krožec. Seveda pa potem na tipalo pada manj svetlobe. Torej:

- $D = \dfrac{f}{w}$.

Večina bralcev pozna ali pa je vsaj opazila zaporedje zaslonskih števil: 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22; 32 ...

Vsako drugo število v tem zaporedju je potenca števila 2. Samo zaporedje pa imamo lahko za zaporedje potenc števila $\sqrt{2}$, zaokroženih na dve mesti. Vsako naslednje število pomeni, da premer odprtine delimo s $\sqrt{2}$, kar pomeni pol manjšo ploščino odprtine in pol manjšo količino svetlobe skozi objektiv. Tako pri zaslonki (zaslonskem številu) 2 skozi objektiv prihaja pol manj svetlobe kot pri zaslonki 1,4. Kamere pametnih telefonov imajo navadno na razpolago le eno zaslonsko število, ki je pogosto okrog 2.

Primer 4. Denimo, da je $m = 0{,}1$, $v = 8$ mm, $f = 30$ mm, $w = 2$. (Najprej smo hoteli vzeti $w = 1{,}4$. Taki objektivi obstajajo, ampak razen pri zelo dragih modelih ostrine na robu pri polni odprtini, $f/1{,}4$ ali $1\colon 1{,}4$, ne moremo doseči, če se še tako trudimo. Moj objektiv z goriščnico 50 mm je pri zaslonki 1,4 za silo dober le v sredini, tako da je nujno pomembni objekt postaviti v center slike.) Za $w = 2$ je $D = 30/2$ mm, torej 15 mm in tako, če upoštevamo številke iz primera 3, v milimetrih

- $d \approx \dfrac{15 \times 0{,}0926}{33} \approx 0{,}0421.$

Razmazani krožec ima premer 42 mikrometrov. Za minimalno kakovost želimo, da ima na sliki velikosti 15 cm × 22 cm razmazani krožec premer največ 0,15 mm, saj je to na meji ločljivosti očesa pri gledanju iz bližine. Sliko te velikosti dobimo s približno desetkratno povečavo slike na tipalu APS-C, torej sme biti premer razmazanega krožca na takem tipalu največ 15 mikrometrov. V našem primeru je razmazani krožec skoraj trikrat prevelik.

Denimo, da imamo na našem tipalu velikosti 22,2 mm × 14,8 mm ≈ 329 kvadratnih milimetrov 24 milijonov pikslov. Na kvadratni milimeter imamo potem približno 73 tisoč kvadratnih pikslov ali približno 270 × 270 pikslov. Stranica piksla meri približno 1/270 milimetra ali približno 3,7 μm, se pravi 3,7 mikrometra (mikrona). Idealno naj razmazani krožec ne bi bil kaj dosti večji od enega piksla.

Približna formula

Če se ne ukvarjamo z makro fotografijo (kjer tako in tako pogosto ostrimo ročno), dobimo dober približek za d po formuli:

- $d \approx \dfrac{mv^2}{2fw(1+m)^2}.$ (3)

Primer 5. Denimo, da je $m = 0{,}1$, $v = 8$ mm, $f = 30$ mm, $w = 2$. Potem je po približni formuli (3) v milimetrih

- $d \approx \dfrac{6{,}4}{60 \times 2 \times 1{,}21} \approx 0{,}0441.$

To je blizu vrednosti, ki smo jo izračunali v primeru 4.

Če obdržimo prejšnje podatke in vzamemo $m = 0{,}02$, slikamo na razdalji približno $52f$ od tipala, to je nekaj več kot meter in pol. V milimetrih dobimo

- $d \approx \dfrac{1{,}28}{60 \times 2 \times 1{,}02^2} \approx 0{,}0103,$

torej približno 10 mikronov. Če bi računali natančno, bi dobili 0,0098 ..., tako da je naš približek zelo dober. Packa premera 10 mikronov na tipalu bo na sliki formata A4 videti kot točka. Če dodatno zapremo zaslonko na 4, pa pokrije razmazani krožec približno tako površino kot en piksel in je vse v najlepšem redu tudi pri maksimalni povečavi.

Izpeljava formul

Izpeljimo zdaj najprej natančno enačbo za d. Te račune, ki sicer niso posebno zapleteni, lahko tudi preskočite in si ogledate graf za d kot funkcijo goriščne razdalje f v nadaljevanju.

Iz enačbe (1) dobimo $b = af/(a-f)$ in, ker je $ka_1 = a$, je

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{ka_1 f}{k(a_1 - f)} = \frac{af}{a - kf}.$$

Od tod je

$$b - b_1 = af\left(\frac{1}{a-f} - \frac{1}{a-kf}\right) = af^2\frac{1-k}{(a-f)(a-kf)}.$$

Pomnožimo zgoraj in spodaj z m^2, upoštevamo $ma = b = (1+m)f$, torej $ma - mf = f$, pa dobimo

$$\frac{b-b_1}{b} = mf\frac{1-k}{(ma-mf)(ma-mkf)} = \frac{m(1-k)}{1+m-mk}.$$

Če ta rezultat pomnožimo z $D = f/w$, upoštevamo $k = \cos\alpha$, dobimo d

$$d = \frac{mf(1-k)}{w(1+m(1-k))} = \frac{mf(1-\cos\alpha)}{w(1+m(1-\cos\alpha))}, \tag{4}$$

kjer je k dan z enačbo (2).

Na sliki 4 imamo graf za d v mikronih kot funkcijo goriščne razdalje f, merjene v milimetrih. Pri tem je $v = 8$ mm, $m = 0{,}1$ in $w = 2$. Na spletni strani [3] pa imate interaktivni graf za d in aproksimacijo p po (3) v GeoGebri s tremi drsniki, s katerimi lahko spreminjate parametre v, m, w. Z grafa vidimo, da je približna formula (3) skoraj povsod zelo dobra.

Sledi še izpeljava približka.

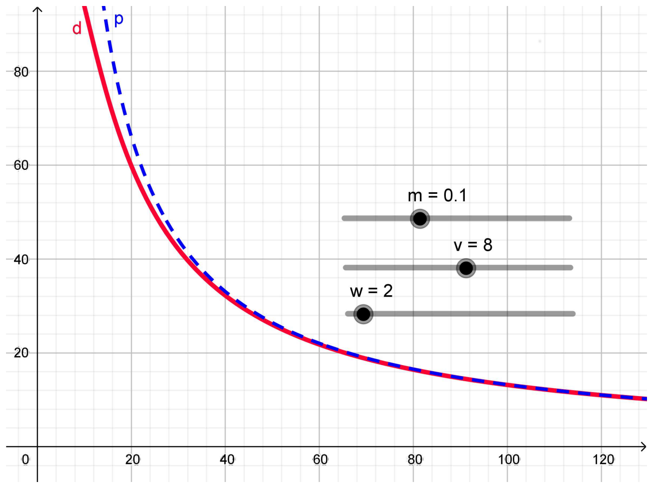
V enačbi (2) bomo privzeli, da je $0 < m < 0{,}5$ in $v \le f$. Potem je $0 < K < 1$. Ker je $(1 + K/2)^2 = 1 + K + K^2/4 > 1 + K$, je

$$1 < \sqrt{1+K} < 1 + \frac{K}{2}.$$

Če je K blizu 0, je $K^2/4$ majhen v primerjavi s K in tako $(1+K/2)^2 \approx 1 + K$. Torej:

$$\sqrt{1+K} \approx 1 + \frac{K}{2}.$$

Približek je nekoliko nad pravo vrednostjo.



SLIKA 4.
Graf za d (v mikrometrih) in (črtkano) približka p za d kot funkcija goriščnice f v milimetrih

Primer. $\sqrt{1,21} \approx 1{,}105$, kar je blizu pravi vrednosti 1,1.

Celo $\sqrt{1+1} \approx 1 + 0{,}5$ ni tako slab približek za $\sqrt{2}$.

Za r blizu 0 je r^2 majhen v primerjavi z r in tako lahko vzamemo $(1-r)(1+r) = 1 - r^2 \approx 1$, od tod

$$\frac{1}{1+r} \approx 1 - r.$$

Primer 6. $1 : 1{,}1 \approx 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. To je blizu pravi vrednosti 0,909 ...

Ocenjujmo:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+K}} \approx \frac{1}{1+\frac{K}{2}} \approx 1 - \frac{K}{2}$$

in tako

$$1 - k \approx \frac{K}{2} = \frac{v^2}{2(1+m)^2 f^2}.$$

Primer 7. Za $v = 10$ mm in $f = 30$ mm je $1 - k \approx 1/(18(1+m)^2) < 1/18$ in za $m \le 0{,}1$ je $m(1-k) < 1/180$.

Večinoma sta tako m kot $1-k$ blizu 0 in tako je njun produkt zelo majhen v primerjavi z 1. Fiziki bi rekli, da lahko produkt $m(1-k)$ zanemarimo. V enačbi (4) tako vzamemo $1 + m(1-k) \approx 1$ in dobimo naš približek:

- $$d \approx \frac{mf(1-k)}{w} \approx \frac{mfv^2}{2w(1+m)^2 f^2} = \frac{mv^2}{2wf(1+m)^2}.$$

Očitno d narašča praktično s kvadratom razdalje v! Pri $v = 4$ mm bo premer razmazanega krožca le približno četrtina tistega pri $v = 8$ mm.

Kot vidimo, je pri malo bolj zaprti zaslonki in slikanju oddaljenih predmetov uporaba centralne točke za ostrenje čisto v redu, še posebno, če točka, ki jo želimo izostriti, ni daleč od središča želene slike, se pravi da je število v majhno v primerjavi s stranicama tipala. Pri majhnih zaslonskih številih in slikanju bolj od blizu, denimo pri portretih, pa je tak način ostrenja problematičen. Ne samo zaradi gornjih računov: premikanje aparata sem ter tja krade čas. Morda pozabimo na koncu umiriti aparat in tako »stresemo« sliko; oseba se vmes lahko premakne, kakor tudi mi. Bolje je vključiti kako drugo točko za ostrenje (ali premakniti okvirček za ostrenje), tako da bo, recimo, na končni sliki na bližnjem očesu portretiranca. Pri nekaterih aparatih imamo odlično možnost, da lahko izostrimo na določeno točko tako, da se dotaknemo njene slike na zaslonu, včasih celo pri gledanju skozi iskalo. Pri slikanju ljudi lahko vključimo prepoznavanje obrazov, čeprav so zaenkrat le redke kamere sposobne izostriti prav oči. Celo popolna avtomatika, ki navadno izostri na najbližji objekt v osrednjem delu slike, je včasih boljša od ostrenja z osrednjo točko, še posebno, če je ta točka po nesreči ravno med dvema obrazoma, in tako izostrimo ozadje.

Literatura

[1] P. Legiša, *Moteča perspektiva*, Presek **44** 1, 2016, 4–14.

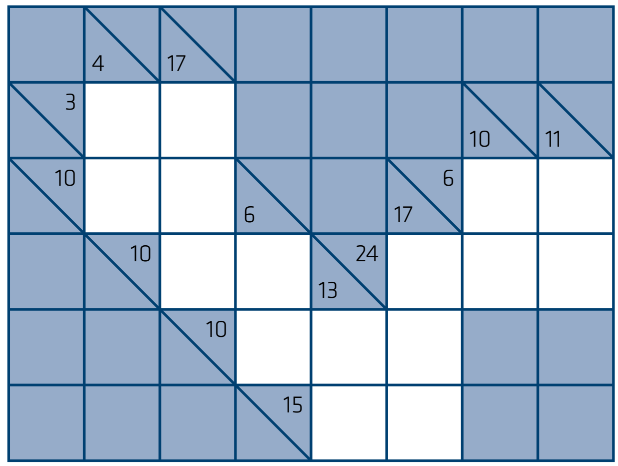
[2] P. Legiša, *Fotografija in matematika, 3. del – globinska ostrina*, Presek **25** 4, 1998, 194–201, dostopno na, `www.presek.si/25/1340-Legisa.pdf`, ogled 28. 6. 2018.

[3] Interaktivna ilustracija napake pri ostrenju z osrednjo točko je na avtorjevi strani na GeoGebra Tube `www.geogebra.org/m/MkndDjE2`, ogled 28. 6. 2018.

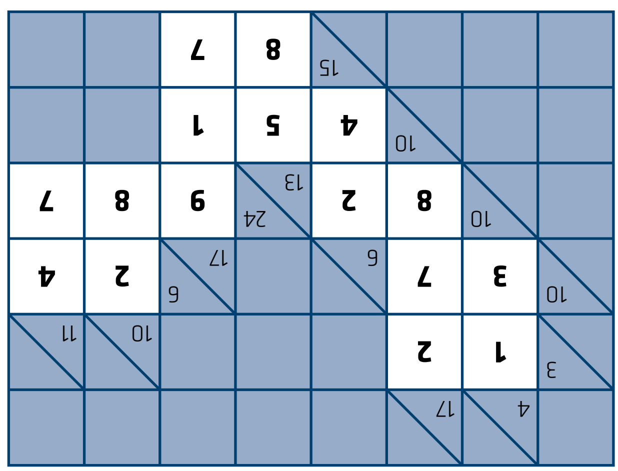
× × ×

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×